

# Resistencia de Materiales Aplicada


The background of the cover is a technical drawing of a stepped shaft. The shaft is shown in a perspective view, with several different diameters. The transitions between diameters are chamfered at a 45-degree angle. The drawing uses fine lines and hatching to represent the geometry and shading of the shaft. The text is overlaid on this drawing.

tercera Edición

PEARSON  
Prentice  
Hall

Robert L. Mott

# Resistencia de materiales aplicada



# Resistencia de materiales aplicada

Tercera edición

**Robert L. Mott, P.E.**

University of Dayton

TRADUCCIÓN:

**Rodolfo Navarro Salas**  
Ingeniero Mecánico

REVISIÓN TÉCNICA:

**Javier León Cárdenas**  
Ingeniero Mecánico  
Universidad Michoacana

**PEARSON**  
Educación®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador  
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

**EDICIÓN EN INGLÉS:**

Editor: Stephen Helba  
Production Editor: Patricia A. Skidmore  
Production Coordination: Deborah S. Powers, Beacon Graphics Corp.  
Text Designer: Rebecca M. Bobb  
Cover Designer: Retter/Patton & Associates, Inc.  
Production Manager: Laura Messerly  
Marketing Manager: Debbie Yarnell

**MOTT: RESISTENCIA DE MATERIALES APLICADA, 3a. ed.**

---

Traducido del inglés de la obra: **APPLIED STRENGTH OF MATERIALS, THIRD EDITION.**

All rights reserved. Authorized translation from English language edition published by Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company.

Todos los derechos reservados. Traducción autorizada de la edición en inglés publicada por Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the publisher.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o método sin autorización por escrito del editor.

Derechos reservados © 1996 respecto a la primera edición en español publicada por PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A.  
Atacomulco Núm. 500-5º Piso  
Col. Industrial Atoto  
53519, Naucalpan de Juárez, Edo. de México

**ISBN 968-880-801-6**

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1524.

Original English Language Edition Published by Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company.  
Copyright © MCMXCVI  
All rights reserved

**ISBN 0-13-376278-5**

**IMPRESO EN MÉXICO / PRINTED IN MEXICO**

A mi esposa, **Marge**

A nuestros hijos **Lynné, Robert, Jr. y Stephen**

A mi **madre** y a mi **padre**



# Prefacio

## OBJETIVOS DEL PRESENTE TEXTO

*Resistencia de Materiales Aplicada* proporciona una cobertura amplia y profunda de los temas más importantes en resistencia de materiales, con un énfasis en aplicaciones, solución de problemas y diseño de miembros estructurales, dispositivos mecánicos y sistemas. El libro está escrito para quienes estudian el curso llamado "Resistencia de Materiales" en una nomenclatura tecnológica de ingeniería para los niveles universitarios y finales de la preparatoria o en un curso de ingeniería aplicada. La intención del presente texto es ser legible para el estudiante, dar una cobertura apropiada de los principios de la resistencia de materiales para el profesor de la materia, y un enfoque hacia la solución de problemas y el diseño que sea útil para el diseñador practicante de dispositivos mecánicos, estructuras y sistemas. Los programas educativos en los campos mecánico, civil, construcción y de fabricación, considerarán que este texto es adecuado para un uso introductorio a la resistencia de materiales.

## ESTILO

Hay un gran énfasis en las *aplicaciones* de los principios de la resistencia de materiales a problemas mecánicos, estructurales y de construcción, en tanto que también da un firme fundamento para comprender estos principios. Al mismo tiempo, las *limitaciones* en el uso de las técnicas de análisis se enfatizan para asegurar que se apliquen adecuadamente.

Las unidades que se emplean son una mezcla de unidades métricas y anglosajonas, para mantenerse con la costumbre del uso dual de unidades evidente en la industria y construcción de Estados Unidos.

## PRERREQUISITOS

Se espera de los estudiantes que puedan aplicar los principios de la estática antes de utilizar este texto. Aunque no es esencial, se recomienda que los estudiantes hayan terminado un curso introductorio al cálculo, antes de estudiar este curso. Tal y como lo recomiendan las agencias de acreditación, el cálculo se utiliza para desarrollar los principios y fórmulas más importantes que se utilizan en este texto. Pero la aplicación de las fórmulas y la solución de problemas y técnicas de diseño, pueden lograrse sin el uso del cálculo.

## CARACTERÍSTICAS DEL TEXTO

El gran número de ejemplos totalmente solucionados se presentan en un formato uniforme, lógico y atractivo. Los ejemplos se resaltan con un diseño gráfico distintivo y otro tipo de letra. Los lectores son guiados en el proceso de formular un enfoque a la solución de los problemas que incluye:

- a. Formulación del objetivo del problema.
- b. Resumen de la información dada.
- c. Definición de la técnica de análisis que se utilizará.
- d. Detallado desarrollo de los resultados con todas las ecuaciones utilizadas y manipulación de unidades.
- e. Comentarios sobre la solución, para recordar al lector los conceptos más importantes involucrados, y para juzgar lo apropiado de la solución. Los comentarios con frecuencia presentan enfoques alternativos o perfeccionamientos al elemento de máquina, o al miembro estructural que se analiza. De este modo, el proceso de pensamiento del lector se lleva más allá de la respuesta que se pide, hacia una revisión crítica del resultado. Con ese proceso, los diseñadores obtienen buenos hábitos de organización al resolver sus propios problemas.

El presente texto tiene un gran énfasis en la presentación y uso de *enfoques de diseño* además del *análisis*. Hay mucha más información acerca de criterios para diseños de dispositivos mecánicos y miembros estructurales que en la mayoría de los demás textos sobre el mismo tema. Los enfoques se basan en otro libro que escribí, *Machine Elements in Mechanical Design*. Para complementar el énfasis sobre el diseño, en el Apéndice se proporciona una gran cantidad de datos de diseño, y también en capítulos seleccionados de este mismo texto.

El capítulo 2, "Propiedades de diseño de los materiales", incluye mucha información y discusión sobre la selección y adecuada aplicación de materiales de ingeniería de muchos tipos, tanto metálicos como no metálicos. Hay una amplia introducción a materiales compuestos, que se presenta junto con comentarios a lo largo del libro acerca de la aplicación de materiales compuestos a diversas clases de miembros que soportan cargas. Se da a los lectores información acerca de las ventajas de los materiales compuestos en relación con los materiales estructurales tradicionales como los metales, madera, concreto y plástico. Se estimula al lector a buscar más educación y experiencia para aprender las técnicas de análisis y diseño únicas en su tipo que se requieren para la adecuada aplicación de materiales compuestos. Es lógico que un estudio de esta naturaleza sea posterior a un curso introductorio de resistencia de materiales, para el que se destinó este texto.

## AUXILIARES ELECTRÓNICOS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y DISEÑO


Muchos capítulos incluyen problemas con programación de computadora, junto con sugerencias para el uso de hojas de cálculo, software para solución de ecuaciones como MATLAB, y calculadoras graficadoras relacionadas con la resistencia de materiales. Estos auxiliares electrónicos, cuando se utilizan para complementar la comprensión básica de los principios de resistencia de materiales, resultan en una apreciación más profunda de los principios y sus aplicaciones a situaciones más complejas.

### RECONOCIMIENTOS

Agradezco las útiles sugerencias de William Wood, de la Youngstown State University, y a Jerome Lange, del Milwaukee Area Technical College, quienes revisaron este texto.

Robert L. Mott





# Contenido

## **CAPÍTULO 1 CONCEPTOS BÁSICOS EN LA RESISTENCIA DE MATERIALES 1**

- 1-1 Objetivos del libro 1
- 1-2 Objetivos de este capítulo 4
- 1-3 Sistemas de unidades básicas 5
- 1-4 Relaciones entre masa, fuerza y peso 7
- 1-5 Concepto de esfuerzo 9
- 1-6 Esfuerzo normal directo 10
- 1-7 Elementos sometidos a esfuerzo para la visualización de esfuerzos normales directos 13
- 1-8 Esfuerzo cortante directo 14
- 1-9 Elementos sometidos a esfuerzo para visualizar esfuerzos cortantes 19
- 1-10 Esfuerzo de apoyo 20
- 1-11 Concepto de deformación 24
- 1-12 Coeficiente de Poisson 25

- 1-13 Deformación por cortante 26
- 1-14 Módulo de Elasticidad 27
- 1-15 Módulo de elasticidad a cortante 27
- 1-16 Medidas preferidas y perfiles estándar 27

## CAPÍTULO 2 PROPIEDADES DE DISEÑO DE LOS MATERIALES

- 2-1 Objetivos de este capítulo 45
- 2-2 Metales en el diseño mecánico 46
- 2-3 Acero 55
- 2-4 Hierro fundido 60
- 2-5 Aluminio 62
- 2-6 Cobre, latón y bronce 64
- 2-7 Zinc, magnesio y titanio 64
- 2-8 No metales en el diseño de ingeniería 65
- 2-9 Madera 65
- 2-10 Concreto 66
- 2-11 Plásticos 67
- 2-12 Materiales compuestos 67

## CAPÍTULO 3 DISEÑO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES SOMETIDOS A ESFUERZO DIRECTO

- 3-1 Objetivos de este capítulo 82
- 3-2 Diseños de miembros bajo tensión o compresión directa 83
- 3-3 Esfuerzos normales de diseño 84
- 3-4 Factor de diseño 85
- 3-5 Criterios en la determinación del factor de diseño 87
- 3-6 Métodos para calcular el esfuerzo del diseño 88
- 3-7 Diseño por esfuerzo cortante 94
- 3-8 Diseño por esfuerzos de apoyo 98
- 3-9 Factores de concentración de esfuerzo 103

## CAPÍTULO 4 DEFORMACIÓN Y ESFUERZO TÉRMICO

- 4-1 Objetivos de este capítulo 115
- 4-2 Deformación elástica en elementos sometidos a tensión y compresión 116
- 4-3 Deformación que causan cambios de temperatura 120
- 4-4 Esfuerzo térmico 125

**CAPÍTULO 5 ESFUERZO CORTANTE TORSIONAL Y DEFLEXIÓN TORSIONAL 135**

- 5-1 Objetivos de este capítulo 135
- 5-2 Par de torsión, potencia y velocidad de rotación 136
- 5-3 Esfuerzo cortante torsional en elementos estructurales de sección transversal circular 139
- 5-4 Derivación de la fórmula para el esfuerzo cortante torsional 142
- 5-5 Momento polar de inercia de barras circulares sólidas 144
- 5-6 Esfuerzo cortante torsional y momento polar de inercia de una barra circular hueca 145
- 5-7 Diseño de elementos circulares sometidos a torsión 147
- 5-8 Comparación de elementos circulares sólidos y huecos 153
- 5-9 Concentraciones de esfuerzo en elementos sometidos a torsión 154
- 5-10 Torsión – deformación torsional elástica 161
- 5-11 Torsión en secciones no circulares 169

**CAPÍTULO 6 FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES EN VIGAS**

181

- 6-1 Objetivos de este capítulo 181
- 6-2 Cargas en vigas, apoyos y tipos de vigas 182
- 6-3 Apoyos de vigas y reacciones en los apoyos 191
- 6-4 Fuerzas cortantes 195
- 6-5 Momentos flexionantes 204
- 6-6 Fuerzas cortantes y momentos flexionantes en vigas en voladizo 214
- 6-7 Vigas con cargas distribuidas linealmente variables 216
- 6-8 Diagramas de cuerpo libre de componentes de estructuras 219
- 6-9 Análisis matemático de diagramas de vigas 223

**CAPÍTULO 7 CENTROIDES Y MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS**

244

- 7-1 Objetivos de este capítulo 244
- 7-2 El concepto de centroide – formas simples 245
- 7-3 Centroides de formas complejas 246
- 7-4 Concepto de momento de inercia 251
- 7-5 Momento de inercia de figuras compuestas cuyos componentes tienen el mismo eje centroidal 253
- 7-6 Momento de Inercia de figuras compuestas – Caso general – Uso del

teorema de la transferencia del eje 255

- 7-7 Definición matemática del momento de inercia 259
- 7-8 Secciones compuestas hechas de perfiles comercialmente disponibles 260
- 7-9 Momento de inercia de perfiles cuyas partes son todas rectangulares 264

## CAPÍTULO 8 ESFUERZO CAUSADO POR FLEXIÓN

274

- 8-1 Objetivos de este capítulo 274
- 8-2 Fórmula de flexión 275
- 8-3 Condiciones para el uso de la fórmula de flexión 278
- 8-4 Distribución del esfuerzo en la sección transversal de una viga 280
- 8-5 Derivación de la fórmula de flexión 281
- 8-6 Aplicaciones – análisis de vigas 284
- 8-7 Aplicaciones – diseño de vigas y esfuerzos de diseño 287
- 8-8 Módulo de sección y procedimientos de diseño 289
- 8-9 Concentraciones de esfuerzo 296
- 8-10 Centro de flexión (centro de cortante) 301
- 8-11 Perfiles preferidos para secciones transversales de vigas 304
- 8-12 Diseño de vigas hechas de materiales compuestos 309

## CAPÍTULO 9 ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS

- 9-1 Objetivos de este capítulo 326
- 9-2 Visualización de esfuerzos cortantes en vigas 328
- 9-3 Importancia de los esfuerzos cortantes en vigas 329
- 9-4 Fórmula general de cortante 330
- 9-5 Distribución del esfuerzo cortante en vigas 337
- 9-6 Desarrollo de la fórmula general de cortante 344
- 9-7 Fórmulas del cortante especiales 347
- 9-8 Esfuerzo cortante de diseño 351
- 9-9 Flujo de cortante 352

## CAPÍTULO 10 EL CASO GENERAL DE LOS ESFUERZOS COMBINADOS Y EL CÍRCULO DE MOHR

361

- 10-1 Objetivos de este capítulo 361
- 10-2 Elemento sometido a esfuerzo 362
- 10-3 Distribución del esfuerzo creada por esfuerzos básicos 363
- 10-4 Creación del elemento sometido a esfuerzo inicial 365

- 10-5 Ecuaciones para determinar esfuerzos en cualquier dirección 372
- 10-6 Esfuerzos principales 376
- 10-7 Esfuerzo cortante máximo 377
- 10-8 Círculo de Mohr para esfuerzo 379
- 10-9 Ejemplos del uso del círculo de Mohr 386
- 10-10 Condición de esfuerzo en planos seleccionados 393
- 10-11 Caso especial en el cual los dos esfuerzos principales tienen el mismo signo 396
- 10-12 Teoría de falla del esfuerzo cortante máximo 401

**CAPÍTULO 11 CASOS ESPECIALES DE ESFUERZOS COMBINADOS 405**

- 11-1 Objetivos de este capítulo 405
- 11-2 Esfuerzos normales combinados 406
- 11-3 Esfuerzos combinados normales y cortantes 414

**CAPÍTULO 12 DEFLEXIÓN DE VIGAS 429**

- 12-1 Objetivos de este capítulo 429
- 12-2 La necesidad de considerar las deflexiones de vigas 430
- 12-3 Definición de términos 431
- 12-4 Deflexiones de vigas con el método de la fórmula 434
- 12-5 Superposición mediante fórmulas de deflexión 439
- 12-6 Principios básicos para determinar la deflexión en vigas con el método de integración sucesiva 443
- 12-7 Deflexión de vigas – método de integración sucesiva – enfoque general 446
- 12-8 Deflexión de vigas – método del área de momento 456
- 12-9 Aplicaciones del método del área de momento 460
- 12-10 Vigas con cargas distribuidas – método del área de momento 474

**CAPÍTULO 13 VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS 484**

- 13-1 Objetivos de este capítulo 484
- 13-2 Ejemplos de vigas estáticamente indeterminadas 485
- 13-3 Fórmulas para vigas estáticamente indeterminadas 487
- 13-4 Método de superposición 497
- 13-5 Vigas continuas – teorema de los tres momentos 502

**CAPÍTULO 14 COLUMNAS 513**

- 14-1 Objetivos de este capítulo 513

14-2	Razón de esbeltez	514
14-3	Razón de esbeltez de transición	518
14-4	Fórmula de Euler para columnas largas	520
14-5	Fórmula de J. B. Johnson para columnas cortas	521
14-6	Factores de diseño para columnas y carga permisible	521
14-7	Resumen – método de análisis de columnas	522
14-8	Perfiles eficientes para secciones transversales de columna	525
14-9	Especificaciones del AISC	526
14-10	Especificaciones de la Aluminum Association	528
14-11	Columnas con carga no centrada	529

## CAPÍTULO 15 RECIPIENTES A PRESIÓN

536

15-1	Objetivos de este capítulo	536
15-2	Distinción entre los recipientes a presión de pared delgada y pared gruesa	537
15-3	Esferas de pared delgada	539
15-4	Cilindros de pared delgada	541
15-5	Cilindros y esferas de pared gruesa	546
15-6	Procedimiento para analizar y diseñar recipientes a presión esféricos y cilíndricos	546
15-7	Otras consideraciones de diseño para recipientes a presión	554

## CAPÍTULO 16 CONEXIONES

560

16-1	Objetivos de este capítulo	560
16-2	Tipos de conexiones	561
16-3	Modos de falla	562
16-4	Conexiones remachadas	563
16-5	Esfuerzos permisibles	565
16-6	Conexiones atornilladas	566
16-7	Ejemplos – juntas remachadas y atornilladas	567
16-8	Juntas remachadas y atornilladas excéntricamente cargadas	569
16-9	Juntas soldadas con cargas concéntricas	573

## APÉNDICE

582

## ÍNDICE

635



# 1

## Conceptos básicos en la resistencia de materiales

### 1-1 OBJETIVOS DEL LIBRO

Es esencial que cualquier producto, máquina o estructura sea segura y estable bajo las cargas ejercidas sobre aquéllas durante cualquier uso previsible. El análisis y diseño de estos dispositivos o estructuras, para que garanticen la seguridad, es el principal objetivo de este texto.

La falla de un componente de una estructura puede ocurrir de diversas formas:

1. El material del componente puede fracturarse totalmente.
2. El material puede deformarse en exceso bajo la carga, de tal manera que el componente ya no sea conveniente para su propósito.
3. La estructura puede hacerse inestable y pandearse, y, por lo tanto, volverse incapaz de soportar las cargas para las que se diseñó.

Los ejemplos de estos modos de falla pueden ayudar al lector a comprender la importancia de conocer bien los principios de la resistencia de materiales aplicada, que se describen en este texto.

**Prevención de falla por fracturas.** La figura 1-1 muestra dos varillas que soportan una pesada pieza fundida. Imagine que es usted la persona responsable del diseño de las varillas. Ciertamente, querría asegurar que las varillas fuesen lo suficientemente fuer-

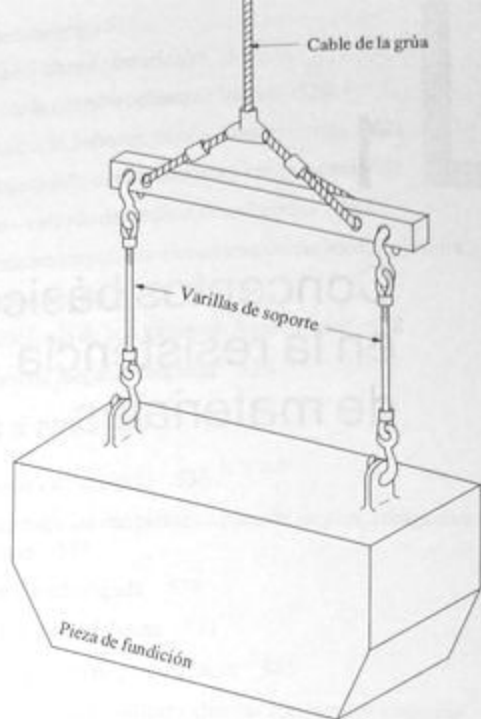


FIGURA 1-1 Dos varillas que cargan un bloque pesado.

tes para que no se rompieran ni permitiesen que la pieza fundida cayera causando, posiblemente, grandes daños tanto materiales como a personas. Si usted fuera el diseñador de las varillas, ¿qué información necesitaría? ¿qué decisiones debería tomar para el diseño? A continuación exponemos una lista parcial.

1. ¿Cuál es el peso y tamaño físico de la pieza fundida?
2. ¿Dónde está su centro de gravedad? Esto es importante para que usted pueda decidir dónde colocar los puntos de agarre de las varillas con el bloque.
3. ¿Cómo se unirán las varillas a la pieza fundida y al sistema de soporte en la parte superior?
4. ¿De qué material deben estar hechas las varillas? ¿Cuál es su resistencia?
5. ¿Cuál será el tamaño y forma de la sección transversal de las varillas?
6. ¿Cómo se aplicará inicialmente la carga de la pieza fundida a las varillas: de manera lenta, con impacto, o con movimiento de sacudida?
7. ¿Se utilizarán las varillas para muchos ciclos de carga durante su vida esperada?



El conocimiento de estos factores permitirá a usted diseñar las varillas para que sean seguras; es decir, para que no se rompan en las condiciones de servicio anticipadas. En los capítulos 1 y 3 esto se tratará con mayor detalle.

**Prevención de deformación excesiva.** Los engranes se utilizan en dispositivos mecánicos transmisores de potencia como la transmisión de un camión, en bandas transportadoras o en el uso de una máquina-herramienta. Para una correcta operación de los engranes, es esencial que estén alineados adecuadamente, con tal que los dientes del engrane de mando coincidan con precisión con los del engrane mandado. La figura 1-2 muestra dos flechas con sus engranes trabados. Las flechas están apoyadas sobre cojinetes que están a su vez montados rigidamente en la caja de transmisión. Cuando los engranes transmiten potencia, se desarrollan fuerzas que tienden a separarlos. Estas fuerzas son resistidas por las flechas, de modo que tienen cargas como las que se muestran en la figura 1-3. La acción de las fuerzas perpendiculares a las flechas tiende a flexionarlas, lo que causaría que los dientes de los engranes quedaran desalineados. Por consiguiente, los ejes deben tener un diseño tal que el pandeo en los engranes esté a un nivel reducido y aceptable. Desde luego, las flechas deben tener un diseño que las haga seguras bajo las cargas que se les aplican. En este tipo de carga, se considera a las flechas como *vigas*. Los capítulos 8 y 12 tratan los principios de los diseños de vigas por resistencia y deflexión.

**Estabilidad y pandeo.** Una estructura puede desplomarse debido a que uno de sus miembros de apoyo más importante es incapaz de conservar su forma bajo cargas aplicadas, aun cuando el material no falle por fractura. Un ejemplo de esto es un poste largo y delgado o columna, sujeto a una fuerza de compresión dirigida hacia abajo. A cierta carga crítica, la columna se *pandea*. Es decir, de repente se dobla, perdiendo su forma recta original. Cuando esto ocurre, si la carga permanece aplicada, la columna se colapsará totalmente. La figura 1-4 muestra un dibujo de una columna de este tipo, relativamente larga y con una sección transversal rectangular delgada. Se puede utilizar una vara de medir o una regla común para demostrar el pandeo en este tipo de columna. Para prevenir el pandeo, se debe tener la capacidad para especificar el material, forma y tamaño apropiados para la sección transversal de un miembro de una longitud dada sometido a compresión, de modo que permanezca recto bajo las cargas esperadas. El capítulo 14 presenta el análisis y diseño de columnas.

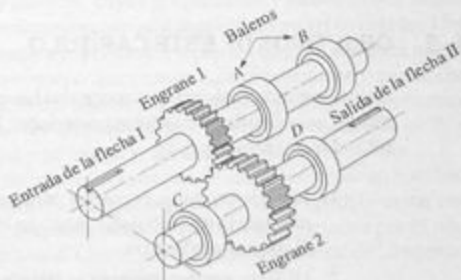


FIGURA 1-2 Dos flechas con engranes trabados.

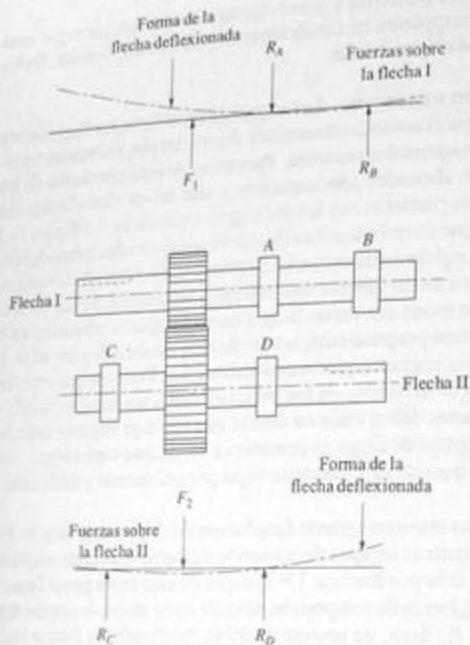


FIGURA 1-3 Fuerzas ejercidas sobre las flechas I y II de la figura 1-2, con la deflexión resultante de las flechas.

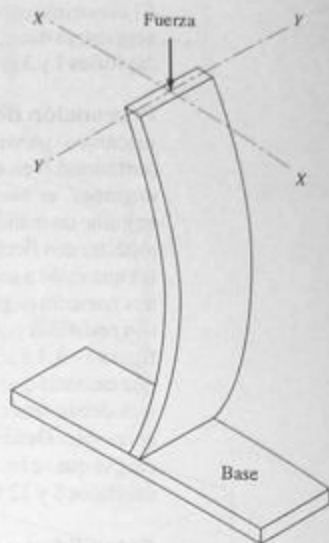


FIGURA 1-4 Columna delgada a compresión, que ilustra la inestabilidad elástica o pandeo.

En resumen, el diseño y el análisis, al utilizar los principios de resistencia de materiales, son necesarios para garantizar que un componente sea seguro en lo que se refiere a su *resistencia, rigidez y estabilidad*. El objetivo de este texto es ayudar al lector a adquirir habilidad para diseñar y analizar componentes de estructuras y máquinas que soporten carga y que sean seguros y adecuados para el uso a que se destinan estas piezas.

## 1-2 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En este capítulo presentamos conceptos básicos de resistencia de materiales y se analizarán con más detalle en capítulos posteriores. Después de terminar el estudio de este capítulo, el lector será capaz de:

1. Utilizar unidades correctas para las cantidades que aparecen en el estudio de resistencia de materiales, tanto en el sistema de unidades métricas SI, como en el sistema anglosajón.
2. Utilizar correctamente los términos *masa y peso* y tener la capacidad de calcular el valor de una de estas medidas cuando se da el valor de la otra.
3. Definir *esfuerzo*.

4. Definir *esfuerzo normal directo* y calcular el valor de este tipo de esfuerzo tanto para carga de tensión como de compresión.
5. Definir el *esfuerzo cortante directo* y calcular su valor.
6. Identificar las condiciones en las que un miembro de carga se encuentra sometido a *esfuerzo cortante simple* o a *esfuerzo cortante doble*.
7. Dibujar *elementos sometidos a esfuerzo*, en los que se muestren los esfuerzos normal y cortante que actúan en un punto cualquiera en un miembro que soporta cargas.
8. Definir *esfuerzo de apoyo* y calcular su valor.
9. Definir la *deformación normal unitaria* y la *deformación por cortante unitaria*.
10. Definir el *coeficiente de Poisson* y dar su valor para materiales típicos que se utilizan en el diseño mecánico y estructural.
11. Reconocer perfiles estructurales estándar y cuerdas de tornillos estándar, y utilizar datos en relación con éstos.
12. Definir el *módulo de elasticidad a tensión*.
13. Definir el *módulo de elasticidad a cortante*.
14. Entender las responsabilidades de los diseñadores.

### 1-3 SISTEMAS DE UNIDADES BÁSICAS

Los cálculos que se requieren en la aplicación de la resistencia de materiales involucran la manipulación de varios conjuntos de unidades en ecuaciones. Para obtener precisión numérica, es de gran importancia asegurar que se utilizan unidades consistentes en las ecuaciones. A lo largo de este texto, se escribirán los números con sus respectivas unidades.

Debido a la transición que se está llevando a cabo de las unidades tradicionales en Estados Unidos a unidades del sistema métrico decimal, en esta obra se utilizan ambas. Se espera que las personas que ingresan a una carrera industrial o van a continuarla dentro de los próximos años, se familiaricen con ambos sistemas. Por una parte, muchos productos nuevos, tales como automóviles y maquinaria comercial, se fabrican utilizando dimensiones del sistema métrico. Por consiguiente, las piezas y equipo de fabricación se especificarán en esas unidades. Sin embargo, esta transición no ocurre uniformemente en todos los campos. Los diseñadores tendrán que trabajar con artículos como acero estructural, aluminio y madera, cuyas propiedades y dimensiones están dadas en unidades anglosajonas en referencias convencionales. Además (en Estados Unidos), los diseñadores, personal de ventas y servicios, y aquellos que laboran en la industria manufacturera, deben trabajar con equipo que ya se instaló previamente y que se construyó de acuerdo con las dimensiones del sistema de unidades anglosajonas. Por consiguiente, parece lógico que las personas que prestan sus servicios actualmente en la industria deban ser capaces de trabajar y pensar en la aplicación de ambos sistemas.

El nombre formal para el sistema de unidades de uso en Estados Unidos es el Sistema de Unidades Gravitacionales Inglesas (EGU: English Gravitational Unit System). El Sistema métrico, aceptado internacionalmente, se conoce por el nombre en francés de *Système International d'Unités*, o Sistema Internacional de Unidades que, en el presente texto, se abrevia con las siglas SI.

En la mayoría de los casos, los problemas en este libro se trabajan tanto en el sistema de unidades estadounidenses como en el sistema SI, en vez de mezclar unidades. En

los problemas donde los datos se dan en ambos sistemas de unidades, es deseable cambiar todos los datos al mismo sistema antes de terminar la solución del problema. El apéndice A-25 da factores de conversión para utilizarse al momento de realizar las conversiones. Las magnitudes básicas para cualquier sistema de unidades son: longitud, tiempo, fuerza, masa, temperatura y ángulo. La tabla 1-1 es una lista de las unidades para estas magnitudes en el SI, y la tabla 1-2 lista las magnitudes en el sistema de unidades anglosajonas.

**Prefijos para unidades SI.** En el SI, deben utilizarse prefijos para indicar órdenes de magnitud y de este modo eliminar dígitos y proporcionar un conveniente sustituto para escribir potencias de 10, como generalmente se prefiere para cálculos. Se recomiendan los prefijos que representan saltos de 1000. Aquellos que generalmente se encuentran en la resistencia de materiales, se listan en la tabla 1-3. En la tabla 1-4 se muestra la forma en que deben convertirse los resultados que se calcularon para utilizarse con los prefijos convencionales de unidades.

TABLA 1-1 Dimensiones básicas del sistema métrico decimal (SI)

Magnitud	Unidad SI	Otras unidades métricas
Longitud	metro (m)	milímetro (mm)
Tiempo	segundo (s)	minuto (min), hora (h)
Fuerza	newton (N)	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$
Masa	kilogramo (kg)	$\text{N} \cdot \text{s}^2/\text{m}$
Temperatura	kelvin (K)	grados Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ )
Ángulo	radián	grado

TABLA 1-2 Dimensiones básicas en el sistema de unidades anglosajonas

Magnitud	Unidad anglosajona	Otras unidades anglosajonas
Longitud	pie (ft)	pulgada (plg)
Tiempo	segundo (s)	minuto (min), hora (h)
Fuerza	libra (lb)	kip*
Masa	slug	$\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie}$
Temperatura	$^{\circ}\text{F}$	
Ángulo	grado	radián (rad)

\* 1.0 kip = 1000 lb. El nombre se deriva del término *kilopound* (kilolibra).

TABLA 1-3 Prefijos para unidades SI

Prefijo	Símbolo SI	Otras unidades métricas
giga	G	$10^9 = 1\,000\,000\,000$
mega	M	$10^6 = 1\,000\,000$
kilo	k	$10^3 = 1\,000$
mili	m	$10^{-3} = 0.001$
micro	$\mu$	$10^{-6} = 0.000\,001$

TABLA 1-4 Método adecuado para reportar cantidades

Resultado calculado	Resultado reportado
0.005 48 m	$5.48 \times 10^{-3}$ m, o 5.48 mm
12 750 N	$12.75 \times 10^3$ N, o 12.75 kN
34 500 kg	$34.5 \times 10^3$ , o 34.5 Mg (megagramos)

## 1-4 RELACIONES ENTRE MASA, FUERZA Y PESO

La fuerza y la masa son magnitudes separadas y distintas. El peso es una clase especial de fuerza.

*La masa se refiere a la cantidad de sustancia que hay en un cuerpo.*

*La fuerza es la acción de empujar o jalar que se ejerce sobre un cuerpo, ya sea por una fuente externa, o por la gravedad.*

*El peso es la fuerza de la atracción gravitacional sobre un cuerpo.*

La masa, la fuerza y el peso, se relacionan por la ley de Newton:

$$\text{fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración}$$

Con frecuencia utilizamos los símbolos  $F$ , para fuerza,  $m$  para masa y  $a$  para aceleración. Entonces:

$$F = m \times a \quad \text{o} \quad m = F/a$$

Cuando se involucra la atracción de la gravedad en el cálculo del peso de una masa,  $a$  toma valor de  $g$ , la aceleración debida a la gravedad. Entonces, utilizando  $W$  para peso,



Relación  
peso-masa

$$W = m \times g \quad \text{o} \quad m = W/g \quad (1-1)$$

Utilizaremos los siguientes valores para  $g$ :

$$\text{Unidades SI: } g = 9.81 \text{ m/s}^2 \quad \text{Unidades anglosajonas: } g = 32.2 \text{ pies/s}^2.$$

**Unidades de masa, fuerza y peso.** En las tablas 1-1 y 1-2 se muestran las unidades preferidas, y algunas otras unidades convenientes para masa y fuerza, en los sistemas de unidades SI y anglosajones. Las unidades para fuerza también se utilizan como unidades para peso.

El newton (N) en el SI se llama así en honor de Isaac Newton y representa la cantidad de fuerza que se requiere para dar una aceleración de  $1.0 \text{ m/s}^2$  a una masa de  $1.0 \text{ kg}$ . Las unidades equivalentes para el newton pueden obtenerse al sustituir las unidades correspondientes en la 2a. ley de Newton:

$$F = m \times a = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{newton}$$

En el sistema de unidades anglosajonas, la unidad para fuerza se define como libra, es tanto que la unidad de masa (slug) se deriva de la 2a. ley de Newton de la forma siguiente.

$$m = \frac{F}{a} = \frac{\text{lb}}{\text{pies/s}^2} = \frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{pies}} = \text{slug}$$

En los siguientes ejemplos de problemas se ilustra la conversión de peso y masa.

**Ejemplo 1-1 (sistema SI)** Un montacargas levanta 425 kg de concreto. Calcular el peso del concreto, es decir, la fuerza que ejerce el concreto sobre el montacargas.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular el peso de una masa de concreto.
	<b>Datos</b>	$m = 425 \text{ kg}$
	<b>Análisis</b>	$W = m \times g; g = 9.81 \text{ m/s}^2$
	<b>Resultados</b>	$W = 425 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 4170 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 4170 \text{ N}$ .
	<b>Comentario</b>	Por consiguiente, 425 kg de concreto pesan 4170 N.

**Ejemplo 1-2 (Sistema anglosajón)** Una tolva de carbón pesa 8500 lb. Determine su masa.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular la masa de una tolva de carbón.
	<b>Datos</b>	$W = 8500 \text{ lb}$
	<b>Análisis</b>	$m = W/g; g = 32.2 \text{ pies/s}^2$
	<b>Resultados</b>	$m = 8500 \text{ lb}/32.2 \text{ pies/s}^2 = 264 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pies} = 264 \text{ slugs}$
	<b>Comentario</b>	Por consiguiente, 8500 lb de carbón tienen una masa de 264 slugs.

**Densidad y peso específico.** Para caracterizar la masa o peso de un material en relación con su volumen, utilizamos los términos *densidad* y *peso específico*, que se definen de la forma siguiente:

*Densidad es la cantidad de masa por unidad de volumen de un material.*

*Peso específico es la cantidad de peso por unidad de volumen de un material.*

Utilizaremos la letra griega  $\rho$  (rho) como símbolo de densidad. Para el peso específico utilizaremos  $\gamma$  (gamma).

A continuación se resumen las unidades para densidad y peso específico.

	Unidades anglosajonas	SI
Densidad	slugs/pies <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>
Peso específico	lb/pies <sup>3</sup>	N/m <sup>3</sup>

Algunas veces se utilizan otras convenciones, que en consecuencia producen confusiones. Por ejemplo, en Estados Unidos, en ocasiones se expresa la densidad en lb/pies<sup>3</sup> o lb/plg<sup>3</sup>. Para esto se utilizan dos interpretaciones. Una es que el término implica la *densidad en peso*, con el mismo significado que el peso específico. Otra es que la magnitud *lb* significa *libra-masa* en lugar de *libra-peso*, y ambas tienen valores numéricos iguales.

## 1-5 CONCEPTO DE ESFUERZO

El objetivo de cualquier análisis de resistencia es establecer la seguridad. Lograr esto requiere que el *esfuerzo* que se produzca en el material del miembro que se analiza esté por debajo de un cierto nivel de seguridad, que se describirá en el capítulo 3. Comprender lo que significa *esfuerzo* en un miembro que soporta carga, como se describe a continuación, es de la mayor importancia para estudiar la resistencia de materiales.

*Esfuerzo es la resistencia interna que ofrece un área unitaria del material del que está hecho un miembro para una carga aplicada externa.*

Nos interesamos en lo que sucede *dentro* de un miembro que soporta una carga. Debemos determinar la magnitud de *fuerza* que se ejerce sobre cada *área unitaria* del material. El concepto de esfuerzo puede expresarse matemáticamente como:



Definición de esfuerzo

$$\text{esfuerzo} = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{F}{A} \quad (1-2)$$

En algunos casos, como se describe en la siguiente sección que trata del *esfuerzo normal* directo, la fuerza aplicada se reparte uniformemente en la totalidad de la sección transversal del miembro. En estos casos, el esfuerzo puede calcularse con la simple división de la fuerza total por el área de la parte que resiste la fuerza. Entonces, el nivel de esfuerzo será el mismo en un punto cualquiera de una sección transversal cualquiera.

En otros casos, tal como en el caso de *esfuerzo debido a flexión* que se presenta en el capítulo 8, el esfuerzo variará en los distintos lugares de la misma sección transversal. Entonces, es esencial que usted considere el nivel de esfuerzo *en un punto*. Por lo general,

el objetivo es determinar en qué punto ocurre el esfuerzo máximo, y cuál es su magnitud. En el sistema de unidades anglosajonas, la unidad típica de fuerza es la libra, y la unidad de superficie más conveniente es la pulgada cuadrada. Por consiguiente, el esfuerzo se indica en  $\text{lb/plg}^2$ , que se abrevia *psi*. Los niveles de esfuerzo característicos, en los diseños de maquinaria y análisis estructurales, son de varios miles de psi. Por esta razón, con frecuencia se utiliza la unidad de  $\text{kip/plg}^2$ , que se abrevia *ksi*. Por ejemplo, si se calcula que el esfuerzo es de 26 500 psi, puede reportarse como:

$$\text{esfuerzo} = \frac{26\,500 \text{ lb}}{\text{plg}^2} \times \frac{1 \text{ kip}}{1000 \text{ lb}} = \frac{26.5 \text{ kip}}{\text{plg}^2} = 26.5 \text{ ksi}$$

En el sistema de unidades del SI, la unidad convencional para fuerza es el newton y la superficie o área se expresa en metros cuadrados. Por consiguiente, la unidad convencional para esfuerzo está dada en  $\text{N/m}^2$ , la cual recibe el nombre de *pascal* y se abrevia Pa. Los niveles típicos de esfuerzo son de varios millones de pascuales, de forma que la unidad de esfuerzo más conveniente es el megapascal o MPa. Esto también es conveniente por otra razón. Al calcular el área de la sección transversal de miembros que soportan cargas, con frecuencia se utilizan mediciones que se expresan en mm. Entonces el esfuerzo estaría dado en  $\text{N/mm}^2$  y puede demostrarse que es numéricamente igual a la unidad de MPa. Por ejemplo, supongamos que se ejerce una fuerza de 15 000 N en un área cuadrada de 50 mm de lado. El área de resistencia sería de  $2500 \text{ mm}^2$ , y el esfuerzo resultante sería:

$$\text{esfuerzo} = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{15\,000 \text{ N}}{2500 \text{ mm}^2} = \frac{6.0 \text{ N}}{\text{mm}^2}$$

Convirtiendo esto a pascuales, obtendríamos:

$$\text{esfuerzo} = \frac{6.0 \text{ N}}{\text{mm}^2} \times \frac{(1000)^2 \text{ mm}^2}{\text{m}^2} = 6.0 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 6.0 \text{ MPa}$$

Esto demuestra que la unidad de  $\text{N/mm}^2$  es idéntica al MPa, una observación por la que nos regiremos a lo largo de este texto.

## 1-6 ESFUERZO NORMAL DIRECTO

Uno de los tipos más fundamentales de esfuerzo es el *esfuerzo normal*, denotado por la letra griega minúscula  $\sigma$  (sigma), en donde el esfuerzo actúa de manera perpendicular, o normal, a la sección transversal del miembro de carga. Si el esfuerzo es también uniforme sobre el área de resistencia, el esfuerzo se conoce como *esfuerzo normal directo*.

Los esfuerzos normales pueden ser de *compresión* o de *tensión*. Un esfuerzo de *compresión* es aquel que tiende a aplastar el material del miembro de carga, y a acortar al miembro en sí. Un esfuerzo de *tensión* es aquel que tiende a estirar al miembro y romper el material.



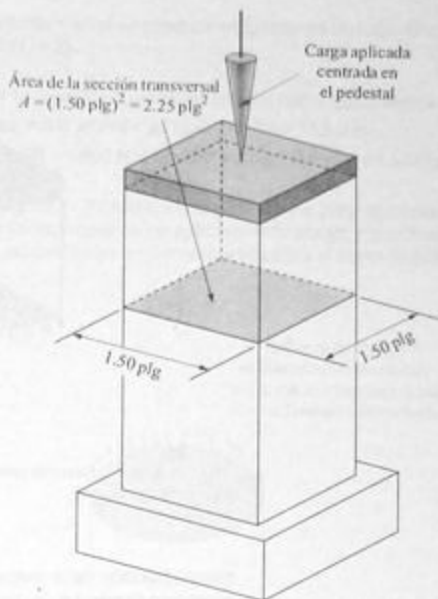


FIGURA 1-5 Ejemplo de esfuerzo de compresión directo.

En la figura 1-5 se muestra un ejemplo de un miembro sujeto a un esfuerzo de compresión. El pedestal de soporte se diseñó para colocarse bajo equipo pesado durante su ensamble y el peso del equipo tiende a aplastar al eje cuadrado del soporte, al someterlo a compresión.

**Ejemplo 1-3** La figura 1-5 muestra un pedestal de soporte diseñado para resistir cargas. Calcule el esfuerzo en la parte superior del cuadrado del pedestal para una carga de 27 500 lb. La línea de acción de la carga que se aplicó está centrada sobre el eje del fuste, y la carga se aplica a través de una placa gruesa que distribuye la fuerza a toda la sección transversal del pedestal.

**Solución** **Objetivo** Calcular el esfuerzo en la parte superior del pedestal.

**Datos** Carga =  $F = 27\,500 \text{ lb}$ ; la carga actúa en el centro del pedestal. La sección transversal es cuadrada y la dimensión de cada lado es de 1.50 plg.

**Análisis** En cualquier sección transversal del pedestal, debe haber una fuerza interna de resistencia que actúe hacia arriba para balancear la carga aplicada hacia abajo. La fuerza interna se distribuye uniformemente sobre el área de la sección transversal, como se muestra en la figura 1-6. Cada unidad de área pequeña de la sección transversal soportaría la

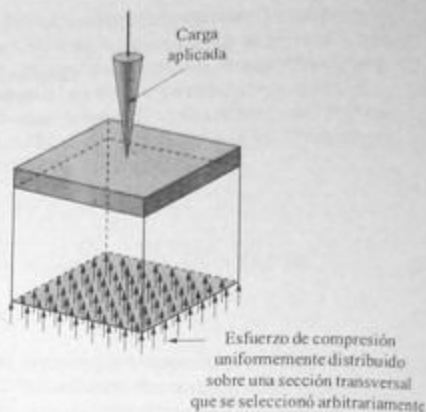


FIGURA 1-6 Esfuerzo de compresión sobre una sección transversal arbitraria del eje de pedestal de soporte.

misma fracción de la carga total. El esfuerzo que se produce sobre el eje cuadrado tiende a aplastar el material y por consiguiente, es un esfuerzo de compresión. Puede utilizarse la ecuación (1-2) para calcular la magnitud del esfuerzo.

**Resultados**

$$\text{esfuerzo} = \sigma = \text{fuerza/área} = F/A \quad (\text{de compresión})$$

$$A = (1.50 \text{ plg})^2 = 2.25 \text{ plg}^2$$

$$\sigma = F/A = 27\,500 \text{ lb}/2.25 \text{ plg}^2 = 12\,222 \text{ lb/plg}^2 = 12\,222 \text{ psi}$$

**Comentario** Este nivel de esfuerzo estaría presente en cualquier sección transversal del eje cuadrado, entre sus extremos.

En la figura 1-1 se muestra un ejemplo de un miembro sujeto a una carga de tensión. Las dos varillas soportan una pesada pieza de fundición que cuelga de una grúa, y el peso de la pieza de fundición tiende a estirarlas y a romperlas.

**Ejemplo 1-4** La figura 1-1 muestra dos varillas circulares que soportan una pieza de fundición que pesa 11.2 kN. Si cada varilla tiene 12.0 mm de diámetro, y ambas comparten por igual la carga, calcule el esfuerzo en las varillas.

**Solución**

**Objetivo** Calcular el esfuerzo en las varillas de soporte.

**Datos** La pieza de fundición pesa 11.2 kN. Sobre cada varilla está la mitad de la carga.  
Diámetro de las varillas =  $D = 12.0 \text{ mm}$ .

<b>Análisis</b>	En cada varilla se produce esfuerzo de tensión directo. Utilice la ecuación (1-2).
<b>Resultados</b>	$F = 11,2 \text{ kN}/2 = 5,60 \text{ kN}$ o $5600 \text{ N}$ sobre cada varilla $\text{Área} = A = \pi D^2/4 = \pi(12,0 \text{ mm})^2/4 = 113 \text{ mm}^2$ $\sigma = F/A = 5600 \text{ N}/113 \text{ mm}^2 = 49,5 \text{ N/mm}^2 = 49,5 \text{ MPa}$
<b>Comentario</b>	La figura 1-7 muestra una parte que arbitrariamente se seleccionó de la varilla, donde la carga aplicada está abajo, y el esfuerzo de tensión interno se distribuye uniformemente sobre el corte de la sección.

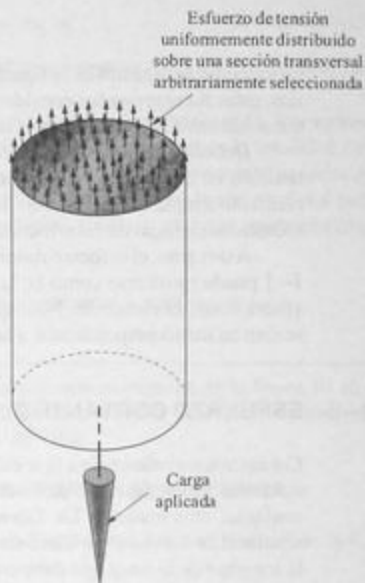


FIGURA 1-7 Esfuerzo de tensión sobre una sección transversal arbitraria de una varilla circular.

## 1-7 ELEMENTOS SOMETIDOS A ESFUERZO PARA LA VISUALIZACIÓN DE ESFUERZOS NORMALES DIRECTOS

La ilustración de esfuerzos en las figuras 1-6 y 1-7 son útiles para visualizar la naturaleza de la resistencia interna a la fuerza aplicada externa, particularmente para aquellos casos en donde los esfuerzos son uniformes sobre la totalidad de la sección transversal. En otros casos, es más conveniente visualizar las condiciones de esfuerzo sobre un elemento pequeño (infinitesimal). Considérese un pequeño cubo de material en alguna parte dentro del eje cuadrado del pedestal de soporte que se muestra en la figura 1-5. Debe haber una fuerza de compresión neta que actúe sobre las caras superior e inferior del

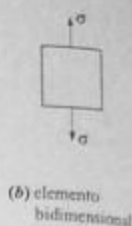
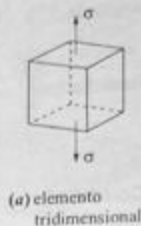
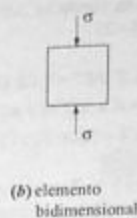
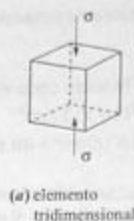


FIGURA 1-8 Elementos para la visualización de esfuerzos de compresión.

FIGURA 1-9 Elemento para la visualización de esfuerzos de tensión.

cubo, como se muestra en la figura 1-8(a). Si se considera que las caras son áreas unitarias, estas fuerzas pueden considerarse como los esfuerzos que actúan sobre las caras del cubo. Un cubo de esta clase se conoce como *elemento sometido a esfuerzo*.


Debido a que el elemento se toma de un cuerpo en equilibrio, el elemento en sí está también en equilibrio, y los esfuerzos en las caras superior e inferior son iguales. Un elemento simple como éste, con frecuencia se muestra como un elemento cuadrado bidimensional en lugar de cubo tridimensional, como se muestra en la figura 1-8(b).

Asimismo, el esfuerzo de tensión sobre cualquier elemento de la varilla de la figura 1-1 puede mostrarse como en la figura 1-9, donde el vector de esfuerzo actúa hacia afuera desde el elemento. Note que los esfuerzos de compresión o tensión mostrados, actúan en forma perpendicular a la superficie del elemento.

## 1-8 ESFUERZO CORTANTE DIRECTO

*Cortante* hace referencia a la acción de corte. Cuando se utilizan unas tijeras domésticas normales, se hace que una de las dos hojas se deslice sobre la otra para cortar papel, tela o cualquier otro material. Un fabricante de lámina metálica utiliza una acción cortante similar al cortar metal para un ducto. En estos ejemplos, la acción de corte progresa sobre la longitud de la línea que debe cortarse, de forma que sólo una pequeña parte del corte total se haga para un tiempo dado. Y, desde luego, el objetivo de la acción es en realidad cortar el material. Es decir, se *quiere* que el material se fracture.

Los ejemplos descritos en esta sección, junto con las figuras anexas, ilustran varios casos donde se produce *cortante directo*. Es decir, la fuerza cortante aplicada se resiste uniformemente por el área de la parte que se corta, lo que produce un nivel uniforme de fuerza cortante sobre el área. El símbolo que se utiliza para el esfuerzo cortante es la  $\tau$  (letra griega minúscula *tau*). Entonces, el esfuerzo cortante directo puede calcularse a partir de:

 **Esfuerzo cortante directo**

$$\text{esfuerzo cortante} = \tau = \frac{\text{fuerza aplicada}}{\text{área cortante}} = \frac{F}{A_s} \quad (1-3)$$

La figura 1-10 muestra una operación de perforación, donde el objetivo es cortar una parte del material del resto. La acción de perforación produce una ranura en la lámina metálica plana. La parte que se extrae en la operación es el *trozo* o *bocado*. Muchas formas diferentes pueden producirse mediante perforación, tanto con el trozo como con

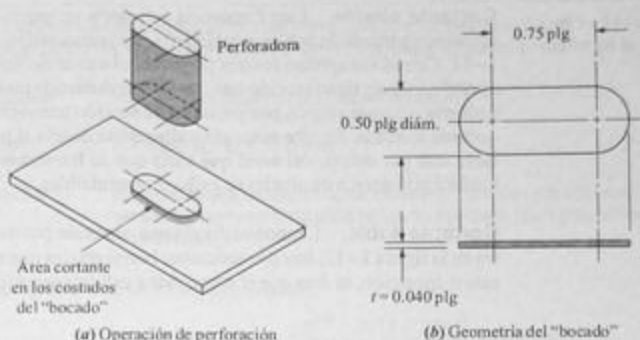


FIGURA 1-10 Ilustración de esfuerzo cortante directo en una operación de perforación.

la lámina en que se ha hecho el agujero en la parte deseada. Normalmente, la operación de perforación se diseña de tal manera que se perfora la totalidad de la forma al mismo tiempo. Por consiguiente, la acción cortante ocurre sobre los *lados* del trozo. El área que se corta en este caso, se calcula multiplicando la longitud del perímetro de la forma cortada, por el espesor de la lámina. Es decir, para una operación de perforación,

Área cortante por perforación

$$A_s = \text{perímetro} \times \text{espesor} = p \times t \quad (1-4)$$

**Ejemplo 1-5** Para la operación de perforación que se muestra en la figura 1-10, calcule el esfuerzo cortante en el material si se aplica una fuerza de 1250 lb a través de la perforadora. El espesor del material es de 0.040 plg.

**Solución** **Objetivo** Calcular el esfuerzo cortante en el material.

**Datos**  $F = 1250$  lb; la forma a perforarse se muestra en la figura 1-10;  $t = 0.040$  pulgadas.

**Análisis** Los lados del trozo se ven sujetos a fuerza cortante directa que resisten la fuerza aplicada. Utilice las ecuaciones (1-3) y (1-4).

**Resultados** El perímetro,  $p$ , es:

$$p = 2(0.75 \text{ plg}) + \pi(0.50 \text{ plg}) = 3.07 \text{ plg}$$

El área sometida a cortante:

$$A_s = p \times t = (3.07 \text{ plg})(0.040 \text{ plg}) = 0.1228 \text{ plg}^2$$

Por consiguiente, el esfuerzo cortante es:

$$\tau = F/A_s = 1250 \text{ lb}/0.1228 \text{ plg}^2 = 10\,176 \text{ psi}$$

**Comentario** En este momento, no sabemos si este nivel de esfuerzo hará que pueda perforarse el trozo; depende de la resistencia de corte del material, lo cual se discutirá en los capítulos 2 y 3.

**Cortante simple.** Con frecuencia se inserta un perno o un remache en un agujero cilíndrico a través de partes coincidentes para conectarlas, como se muestra en la figura 1-11. Cuando se aplican fuerzas perpendiculares al eje del perno, existe la tendencia de cortarlo a través de su sección transversal, produciendo un esfuerzo cortante. Esta acción se llama *cortante simple*, porque una sola sección transversal del perno resiste la fuerza cortante aplicada. En este caso, generalmente se diseña el perno para que el esfuerzo cortante esté por debajo del nivel que haría que se fracturase el perno. En el capítulo 3 se hablará más acerca de niveles de esfuerzo permisibles.

**Cortante doble.** Cuando se diseña una conexión por medio de pernos como se muestra en la figura 1-12, hay dos secciones transversales que resisten la fuerza aplicada. En esta disposición, se dice que el perno está a *esfuerzo cortante doble*.

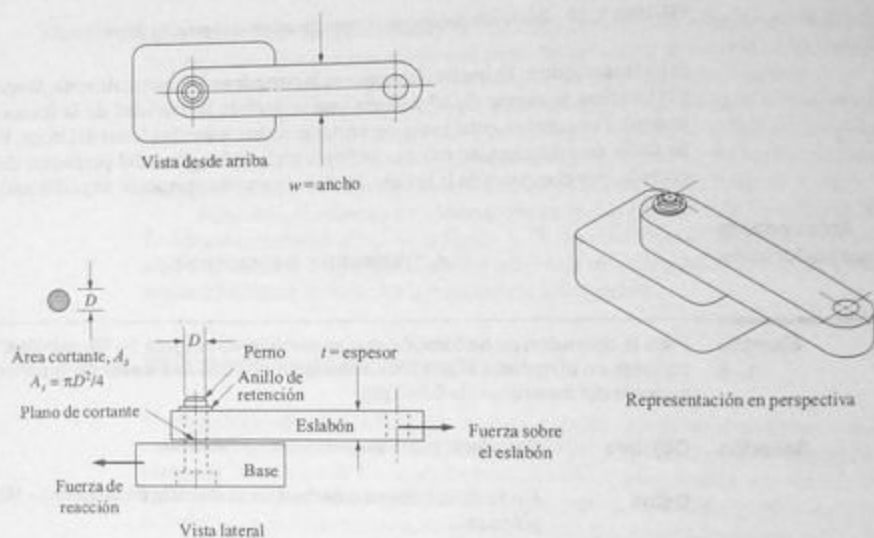


FIGURA 1-11 Conexión mediante perno que ilustra el esfuerzo cortante simple.

El área sometida a corte son *dos* secciones transversales del perno  
 $A_s = 2(\pi D^2/4)$

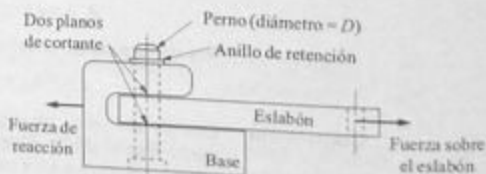


FIGURA 1-12 Junta mediante pernos que ilustra el esfuerzo cortante doble.

**Ejemplo 1-6** La fuerza en el eslabón de la junta del perno que se muestra en la figura 1-11 es de 3550 N. Si el perno tiene un diámetro de 10.0 mm, calcule el esfuerzo cortante en el perno.

**Solución** **Objetivo** Calcular el esfuerzo cortante en el perno.

**Datos**  $F = 3550 \text{ N}$ ;  $D = 10.0 \text{ mm}$

**Análisis** El perno está a esfuerzo cortante directo, donde una sola sección transversal del perno resiste toda la fuerza aplicada (cortante simple). Utilice la ecuación (1-3).

**Resultados** El área de corte,  $A_s$ , es:

$$A_s = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(10.0 \text{ mm})^2}{4} = 78.5 \text{ mm}^2$$

Por consiguiente, el esfuerzo cortante es:

$$\tau = \frac{F}{A_s} = \frac{3550 \text{ N}}{78.5 \text{ mm}^2} = 45.2 \text{ N/mm}^2 = 45.2 \text{ MPa}$$

**Comentario** En la figura 1-13 se muestra este esfuerzo, en una sección transversal del perno.

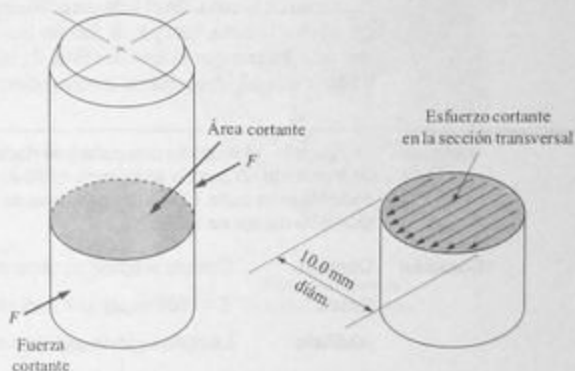


FIGURA 1-13 Esfuerzo cortante directo en un pasador.

**Ejemplo 1-7** Si la junta de pernos que acabamos de analizar se diseñara como se muestra en la figura 1-12, calcule el esfuerzo cortante en el perno.

**Solución** **Objetivo** Calcule el esfuerzo cortante en el perno.

**Datos**  $F = 3550 \text{ N}$ ;  $D = 10.0 \text{ mm}$  (igual al ejemplo 1-6).

**Análisis** El perno está a esfuerzo cortante directo, donde dos secciones transversales del perno resisten la fuerza aplicada (cortante doble). Utilice la ecuación (1-3).

**Resultados** El área de corte,  $A_s$ , es:

$$A_s = 2 \left( \frac{\pi D^2}{4} \right) = 2 \left[ \frac{\pi (10.0 \text{ mm})^2}{4} \right] = 157 \text{ mm}^2$$

El esfuerzo cortante en el perno es:

$$\tau = \frac{F}{A_s} = \frac{3550 \text{ N}}{157 \text{ mm}^2} = 22.6 \text{ N/mm}^2 = 22.6 \text{ MPa}$$

**Comentario** El esfuerzo cortante que se obtuvo es la mitad del valor del cortante simple.

**Cuñas.** La figura 1-14 muestra una importante aplicación del esfuerzo cortante en las transmisiones mecánicas. Cuando un elemento transmisor de potencia, tal como un engrane, una rueda dentada para cadena o patea de banda transportadora se montan en un eje, con frecuencia se utiliza una cuña para conectarlos y transmitir el par de torsión de uno al otro. El par de torsión produce una fuerza tangencial en la superficie de contacto entre la flecha y el interior del cubo. Al par de torsión se le opone el momento de la fuerza en la cuña por el radio de la flecha. Es decir,  $T = F(D/2)$ . Por consiguiente, la fuerza es  $F = 2T/D$ . En la figura 1-14, mostramos la fuerza  $F_1$ , ejercida por la flecha en el lado izquierdo de la cuña. En el lado derecho, una fuerza igual  $F_2$  es la reacción ejercida por el cubo sobre la cuña. Este par de fuerzas tienden a cortar la cuña, produciendo un esfuerzo cortante. Nótese que el área de corte,  $A_s$ , es un rectángulo de  $b \times L$ . El siguiente ejemplo ilustra el cálculo del esfuerzo cortante directo en una cuña.

**Ejemplo 1-8** La figura 1-14 muestra una cuña insertada entre una flecha y el cubo de un engrane. Si se transmite un par de torsión de 1500 lb·plg de la flecha al cubo, calcule el esfuerzo cortante en la cuña. Como dimensiones de la cuña, utilice  $L = 0.75$  plg;  $h = b = 0.25$  plg. El diámetro del eje es 1.25 plg.

**Solución**

<b>Objetivo</b>	Calcule el esfuerzo cortante en la cuña.
<b>Datos</b>	$T = 1500$ lb·plg; $D = 1.25$ plg; $L = 0.75$ plg; $h = b = 0.25$ plg.
<b>Análisis</b>	La cuña soporta esfuerzo cortante directo. Utilice la ecuación (1-3).
<b>Resultados</b>	Área de corte: $A_s = b \times L = (0.25 \text{ plg})(0.75 \text{ plg}) = 0.1875 \text{ plg}^2$ . La fuerza en la cuña se produce por la acción del par de torsión aplicado. Al par de torsión se le opone el momento de la fuerza en la cuña por el radio de la flecha. Es decir, $T = F(D/2)$ . Por consiguiente, la fuerza es:

$$F = 2T/D = (2)(1500 \text{ lb} \cdot \text{plg}) / (1.25 \text{ plg}) = 2400 \text{ lb}$$

Entonces, el esfuerzo cortante es:

$$\tau = F/A_s = 2400 \text{ lb} / 0.1875 \text{ plg}^2 = 12\,800 \text{ psi}$$



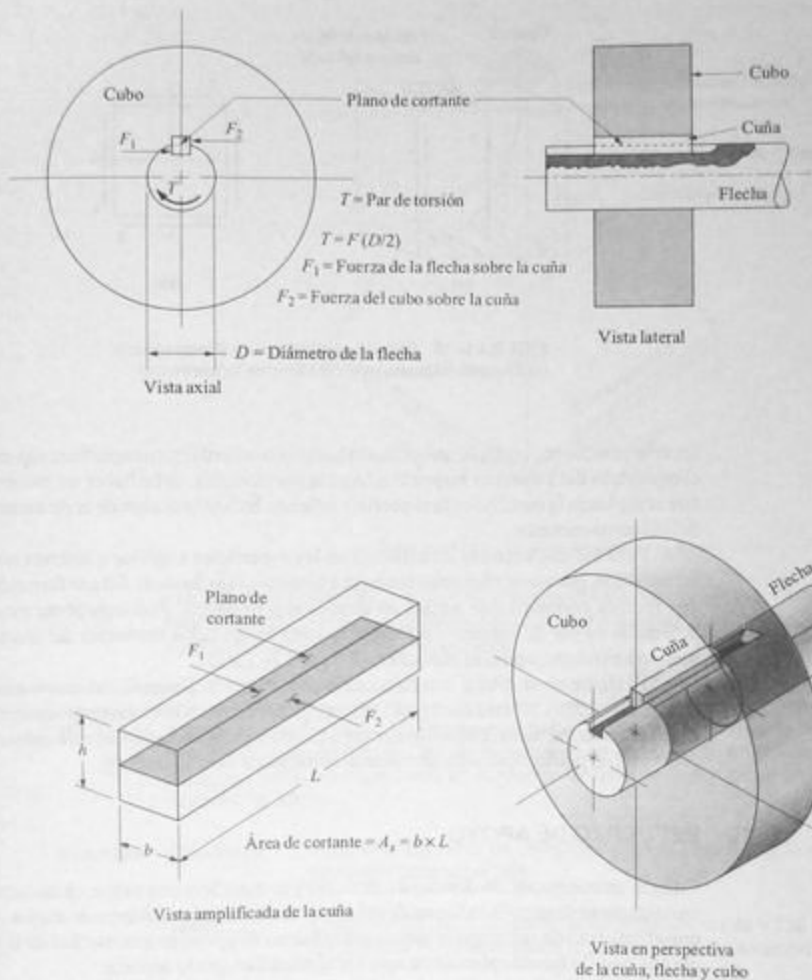


FIGURA 1-14 Acción cortante directa sobre una cuaña entre un eje y el cubo de un engrane, polea o rueda dentada para cadena en un sistema de transmisión mecánica.

### 1-9 ELEMENTOS SOMETIDOS A ESFUERZO PARA VISUALIZAR ESFUERZOS CORTANTES

Un elemento cúbico infinitesimalmente pequeño de material del plano de cortante de cualquiera de los ejemplos que se muestran en la sección 1-8 aparecería como se muestra en la figura 1-15, donde los esfuerzos cortantes actúan paralelos a las superficies del cubo. Por ejemplo, un elemento tomado del plano de cortante de la cuaña de la figura 1-14

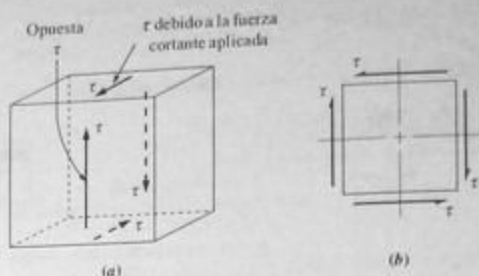


FIGURA 1-15 Elemento que muestra el esfuerzo cortante.  
(a) Elemento tridimensional. (b) Elemento bidimensional

tendría un esfuerzo cortante que actuaría hacia la izquierda en su superficie superior. Para el equilibrio del elemento respecto a fuerzas horizontales, debe haber un esfuerzo igual que actúe hacia la derecha en la superficie inferior. Ésta es la acción de corte característica del esfuerzo cortante.

Pero los dos vectores de esfuerzo en las superficies superior e inferior no pueden actuar solos, porque el elemento tendería a girar por la influencia del par formado por las dos fuerzas cortantes que actúan en direcciones opuestas. Para equilibrar este par, se desarrolla un par de esfuerzos cortantes iguales en los lados verticales del elemento sometido a esfuerzo, como se muestra en la figura 1-15(a).

El elemento se dibuja con frecuencia en la forma bidimensional que se muestra en la figura 1-15(b). Nótese cómo los vectores de esfuerzo en los lados adyacentes tienden a unirse en los vértices. Estos elementos son útiles en la visualización de esfuerzos que actúan en un punto, dentro de un material sometido a fuerza cortante.

## 1-10 ESFUERZO DE APOYO


Cuando un cuerpo sólido descansa sobre otro y le transfiere una carga, en las superficies en contacto se desarrolla la forma de esfuerzo conocida como *esfuerzo de apoyo*. Al igual que el esfuerzo de compresión directo, el esfuerzo de apoyo es una medida de la tendencia que tiene la fuerza aplicada de aplastar al miembro que lo soporta.

El esfuerzo de apoyo se calcula igual que los esfuerzos normales directos:

$$\sigma_b = \frac{\text{carga aplicada}}{\text{área de apoyo}} = \frac{F}{A_b} \quad (1-4)$$

En superficies planas en contacto, el área de apoyo es simplemente el área sobre la que se transfiere la carga de un miembro al otro. Si las dos partes tienen áreas distintas, se utiliza el área menor. Otra condición es que los materiales que transmiten las cargas deben permanecer casi rígidos y planos con el fin de conservar su capacidad de transmitir las cargas. La deflexión excesiva reducirá el área de apoyo efectiva.

La figura 1-16 muestra un ejemplo de la construcción de un edificio, en donde el esfuerzo de apoyo es importante. Una columna cuadrada de acero hueca de 4.00 plg descansa sobre una gruesa placa cuadrada de acero de 6.00 plg. La placa descansa sobre

 Esfuerzo de apoyo

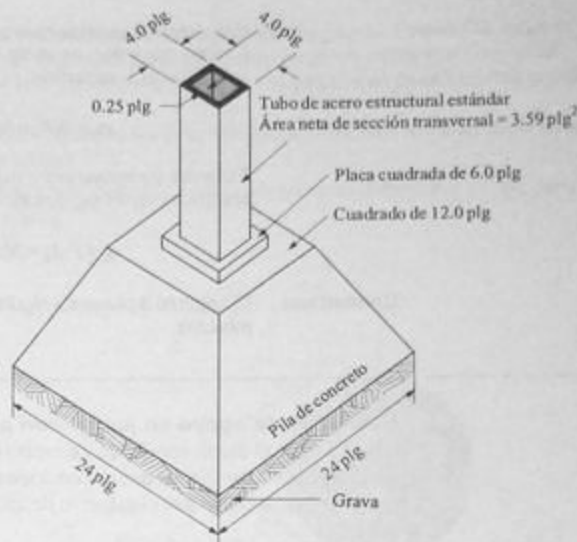


FIGURA 1-16 Ejemplo de esfuerzo de apoyo.

una pila de concreto que, a su vez, descansa sobre una base de grava. Estas áreas sucesivamente más grandes son necesarias para limitar los esfuerzos de apoyo a niveles razonables para los materiales involucrados.

<b>Ejemplo 1-9</b>	Remítase a la figura 1-16. El tubo cuadrado de acero transmite una fuerza de compresión axial de 30 000 lb. Calcule el esfuerzo de compresión en el tubo y el esfuerzo de apoyo entre las superficies en contacto. Considere que el peso de la pila de concreto es de 338 lb.
<b>Solución</b>	<p><b>Objetivos</b> Calcule el esfuerzo de compresión en el tubo. Calcule el esfuerzo de apoyo en cada superficie.</p> <p><b>Datos</b> Carga <math>F = 30\,000</math> lb de compresión. Peso de la pila = 338 lb. En la figura 1-16 se muestra la geometría de los miembros.</p> <p><b>Análisis</b> Tubo: Utilice la fórmula para esfuerzo de compresión directo, ecuación (1-3). Esfuerzos de apoyo: Utilice la ecuación (1-4) para cada par de superficies en contacto.</p> <p><b>Resultados</b> <i>Esfuerzo de compresión en el tubo:</i> (área = <math>A = 3.59 \text{ plg}^2</math>)  <math display="block">\sigma = F/A = 30\,000 \text{ lb}/3.59 \text{ plg}^2 = 8356 \text{ psi}</math> <i>Esfuerzo de apoyo entre el tubo y la placa cuadrada:</i> Será de magnitud igual al esfuerzo de compresión en el tubo, porque el área de la sección transversal del tubo es el área más pequeña en contacto con la placa. Por consiguiente:  <math display="block">\sigma_s = 8356 \text{ psi}</math> </p>

*Esfuerzo de apoyo entre la placa y la cara superior de la pila de concreto:*  
El área de apoyo es la de la placa cuadrada, porque es el área más pequeña en la superficie.

$$\sigma_b = F/A_b = 30\,000 \text{ lb}/(6.00 \text{ plg})^2 = 833 \text{ psi}$$

*Esfuerzo de apoyo entre la pila y la grava:* El área de apoyo es la de un cuadrado, de 24 plg de lado. Súmense 338 libras por el peso de la pila.

$$\sigma_g = F/A_b = 30\,338 \text{ lb}/(24.00 \text{ plg})^2 = 52.7 \text{ psi}$$

**Comentario** El capítulo 3 presenta algunos datos sobre los esfuerzos de apoyo permisibles.

**Esfuerzos de apoyo en juntas con pernos.** Con frecuencia se utilizan pernos cilíndricos en el diseño mecánico y estructural para conectar piezas entre sí. En la figura 1-11 se muestra un diseño de una conexión de esta clase. Al transferir una carga a través del perno, debe calcularse el esfuerzo de apoyo entre el perno y cada uno de los componentes.

El área de apoyo efectiva de un perno cilíndrico en un agujero de ajuste exacto, requiere que se utilice el *área proyectada*, que se calcula como el producto del diámetro del perno y la longitud de la superficie en contacto.

**Ejemplo 1-10** Remítase a la figura 1-11. Calcule el esfuerzo de apoyo entre el perno de 10.0 mm de diámetro y el agujero en el eslabón. La fuerza aplicada al eslabón es de 3550 N. El espesor del eslabón es de 15.0 mm y su ancho de 25.0 mm.

**Solución** **Objetivos** Calcule el esfuerzo de apoyo entre las superficies en contacto del perno y el interior del agujero del eslabón.

**Datos** Carga =  $F = 3550 \text{ N}$ ,  $t = 15.0 \text{ mm}$ ;  $w = 25.0 \text{ mm}$ ;  $D = 10.0 \text{ mm}$ . En la figura 1-11 se muestra la geometría de los miembros.

**Análisis** Esfuerzos de apoyo: utilice la ecuación (1-4) para cada par de superficies en contacto. Utilice el área proyectada del agujero como área de apoyo.

**Resultados** *Entre el perno y el eslabón:*

$$A_b = D \times t = (10.0 \text{ mm})(15.0 \text{ mm}) = 150 \text{ mm}^2$$

Por consiguiente, el esfuerzo de apoyo es:

$$\sigma_b = \frac{3550 \text{ N}}{150 \text{ mm}^2} = 23.7 \text{ N/mm}^2 = 23.7 \text{ MPa}$$

**Esfuerzo de contacto.** Los casos de esfuerzo de apoyo ya considerados en esta misma sección son aquellos en donde lo que está en contacto son *superficies*, y la fuerza

aplicada se distribuye sobre un área relativamente grande. Cuando la carga se aplica sobre un área muy pequeña, debe utilizarse el concepto de *esfuerzo de contacto*.

En la figura 1-17 se muestran ejemplos de situaciones de esfuerzo de contacto:

- Rodillos cilíndricos sobre una placa plana, como una rueda de acero de ferrocarril sobre un riel.
- Bola esférica sobre una placa plana, tal como un dispositivo de bola para mover cargas pesadas.

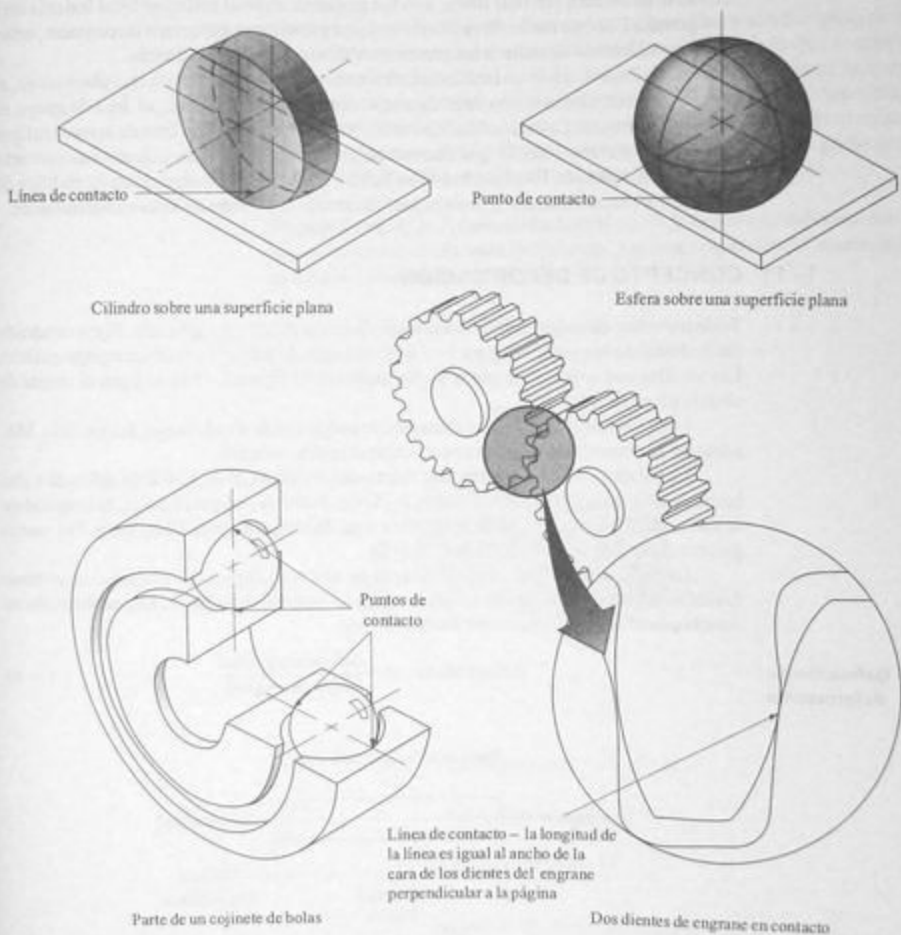


FIGURA 1-17 Ejemplos de miembros de carga sujetos a esfuerzo de contacto.

- Bola esférica sobre una placa curva en un cojinete de bolas que gira sobre su anillo de rodadura externo.
- Dos superficies curvas convexas, como los dientes de engranes en contacto.

Los análisis detallados de esfuerzos de contacto, a los que a veces se les llama esfuerzos *Hertz*, no se desarrollan en este libro. Pero es importante observar que la magnitud de esfuerzo de contacto puede ser sumamente elevada. Considérese el caso de una bola esférica sobre una placa plana que transmite una carga dirigida hacia abajo. Una superficie de perfección esférica hará contacto con un plano en un solo punto infinitamente pequeño. Entonces, al aplicar el coeficiente de esfuerzo de apoyo,  $\sigma_s = F/A_s$ , la magnitud del área tiende a *cero*. Luego el esfuerzo tiende a *infinito*. En realidad, debido a la elasticidad de los materiales en contacto, hay alguna deformación, y el área de contacto se convierte en un área circular finita, aunque pequeña. Pero el esfuerzo local todavía será muy grande. Por esta razón, los miembros de carga sujetos a esfuerzos de contacto, están típicamente hechos de materiales sumamente duros y de alta resistencia.

Asimismo, cuando un rodillo cilíndrico se pone en contacto con una placa plana, el contacto es teóricamente una línea de ancho cero. Por consiguiente, el área de apoyo es teóricamente cero. La elasticidad de los materiales producirá un área de apoyo real que es un angosto rectángulo, lo que nuevamente da por resultado un esfuerzo de contacto finito, aunque grande. En el capítulo 3 se habla más de los casos especiales de rodillos de acero sobre placas de acero. Consulte las referencias 6 y 7 para análisis más detallados.

## 1-11 CONCEPTO DE DEFORMACIÓN

Todo miembro de carga se deforma por la influencia de la carga aplicada. El eje cuadrado del pedestal de apoyo de la figura 1-5 se acorta cuando sobre él se coloca equipo pesado. Las varillas que soportan la pieza de fundición de la figura 1-1 se alargan al colgar de ellas la pieza de fundición.

La deformación total de un miembro de carga puede, desde luego, ser medido. Más adelante se demostrará cómo puede calcularse la deformación.

La figura 1-18 nos muestra una fuerza de tensión axial de 10 000 lb aplicada a una barra de aluminio con un diámetro de 0.75 plg. Antes de aplicar la carga, la longitud de la barra era de 10 plg. Luego de aplicar la carga, la longitud es de 10.023 plg. Por consiguiente, la deformación total es de 0.023 plg.

La *deformación* que también se conoce como *deformación unitaria*, se obtiene dividiendo la deformación total entre la longitud original de la barra. La deformación se denota con la letra griega minúscula épsilon ( $\epsilon$ ):

Definición de deformación

$$\text{deformación} = \epsilon = \frac{\text{deformación total}}{\text{longitud original}} \quad (1-5)$$

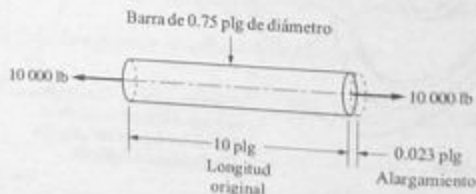


FIGURA 1-18 Alargamiento de una barra en tensión.

Para el caso que se muestra en la figura 1-18:

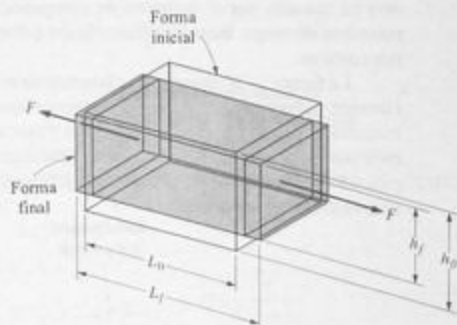
$$\epsilon = \frac{0.023 \text{ plg}}{10.000 \text{ plg}} = 0.0023 \text{ plg/plg}$$

Puede decirse que la deformación es adimensional, porque las unidades del numerador y el denominador se cancelan. Sin embargo, es mejor reportar las unidades como plg/plg o mm/mm, para mantener la definición de deformación por unidad de longitud del miembro. En capítulos posteriores se dirá más acerca de la deformación.

## 1-12 COEFICIENTE DE POISSON

Si se remite a la figura 1-19 podrá obtener una comprensión más completa de la deformación de un miembro sujeto a esfuerzos normales. El elemento que se muestra está tomado de la barra de la figura 1-18. La fuerza de tensión en la barra la alarga en la dirección de la fuerza aplicada, como sería de esperar. Pero, al mismo tiempo, el ancho de la barra se acorta. De este modo, en el elemento de esfuerzo ocurre un alargamiento y contracción simultáneas. Puede determinarse la deformación axial a partir del alargamiento, y, de la contracción, puede determinarse la deformación lateral.

*El coeficiente de la deformación lateral en el elemento a la deformación axial se conoce como coeficiente de Poisson, y es una propiedad del material del que está hecho el miembro de carga.*



$$\text{Deformación axial} = \frac{L_f - L_0}{L_0} = \epsilon_a$$

$$\text{Deformación lateral} = \frac{h_0 - h_f}{h_0} = \epsilon_l$$

$$\text{Coeficiente de Poisson} = \frac{\epsilon_l}{\epsilon_a} = \nu$$

FIGURA 1-19 Ilustración del coeficiente de Poisson para un elemento en tensión.

TABLA 1-5 Valores aproximados del coeficiente de Poisson

Material	Coefficiente de Poisson, $\nu$
Aluminio (la mayoría de sus aleaciones)	0.33
Bronce	0.33
Hierro colado	0.27
Concreto	0.10-0.25
Cobre	0.33
Bronce al fósforo	0.35
Acero al carbón y aleado	0.29
Acero inoxidable (18-8)	0.30
Titanio	0.30

En el presente texto, se utiliza la letra griega minúscula  $\nu$  para denotar el coeficiente de Poisson. Nótese que algunas referencias utilizan  $\mu$ .

Los materiales metálicos más comúnmente usados tienen un coeficiente de Poisson con valor entre 0.25 y 0.35. Para el concreto, varía ampliamente según el grado y el esfuerzo aplicados, pero generalmente cae entre 0.1 y 0.25. Los elastómeros y el caucho tienen un coeficiente de Poisson que llega a ser hasta de 0.50. En la tabla 1-5 se muestran valores aproximados del coeficiente de Poisson.

### 1-13 DEFORMACIÓN POR CORTANTE

Las discusiones anteriores de deformación, describieron la deformación normal, porque ésta es causada por el esfuerzo de compresión o tensión normal, desarrollado en un miembro de carga. Bajo la influencia del esfuerzo cortante, se produce la deformación por cortante.

La figura 1-20 muestra un elemento de esfuerzo sujeto a fuerza cortante. La acción cortante en las caras paralelas del elemento tienden a deformarlo angularmente, como se muestra de forma exagerada. El ángulo  $\gamma$  (gamma), medido en radianes, es la *deformación por cortante*. En los problemas prácticos se encuentran sólo valores sumamente pequeños de deformación por cortante y, por consiguiente, las dimensiones del elemento sólo se cambian levemente.

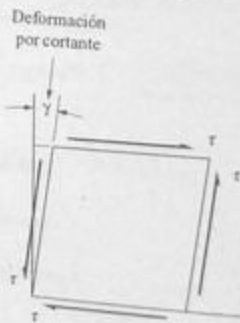



FIGURA 1-20 Deformación por cortante en un elemento infinitesimal.



## 1-14 MÓDULO DE ELASTICIDAD

Puede obtenerse una medida de la rigidez del material calculando el coeficiente del esfuerzo normal en un elemento y la deformación correspondiente en el mismo. Esta relación se conoce como módulo de elasticidad, y se denota por  $E$ .

Es decir:

 Módulo de elasticidad

$$\text{módulo de elasticidad} = \frac{\text{esfuerzo normal}}{\text{deformación normal}}$$


$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (1-6)$$

Un material con un valor de  $E$  elevado se deformará menos con un esfuerzo dado que uno con un valor reducido de  $E$ . Un término más completo para  $E$  sería el módulo de elasticidad a tensión o compresión, porque se define en función del esfuerzo normal. Sin embargo, el término "módulo de elasticidad", sin ningún modificador, generalmente se considera como el módulo de tensión. En el capítulo 2 se dirá más acerca del módulo de elasticidad, y ahí también se identificarán los valores típicos.

## 1-15 MÓDULO DE ELASTICIDAD A CORTANTE


El coeficiente del esfuerzo cortante y la deformación por cortante se conoce como módulo de elasticidad a cortante, o módulo de rigidez, y se denota por  $G$ .

Es decir:

 Módulo de elasticidad a cortante

$$G = \frac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{deformación por cortante}} = \frac{\tau}{\gamma} \quad (1-7)$$

$G$  es una propiedad del material, y se relaciona con el módulo de tensión y el coeficiente de Poisson por:

 Relación entre  $G$  y el coeficiente de Poisson

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1-8)$$

## 1-16 MEDIDAS PREFERIDAS Y PERFILES ESTÁNDAR

Una de las responsabilidades del diseñador es especificar las dimensiones finales de los miembros que soportan carga. Luego de terminar el análisis para el esfuerzo y la deformación, se conocen valores mínimos aceptables para dimensiones, que asegurarán que el miembro satisfaga las condiciones de funcionamiento. Después, el diseñador típicamen-

te especifica las dimensiones finales como valores estándar o convenientes, que facilitarán la compra de materiales, y la fabricación de las piezas. Esta sección presenta algunos criterios para ayudar en estas decisiones.

**Medidas básicas preferidas.** Cuando la pieza que se diseñó se hace según las especificaciones del diseñador, se recomienda que las dimensiones finales se especifiquen a partir de un conjunto de *medidas básicas preferidas*. El apéndice A-2 lista estos datos para dimensiones en fracciones de pulgada, dimensiones de pulgadas decimales y dimensiones métricas.

**Cuerdas de tornillos American Standard.** Los sujetadores roscados y elementos de máquinas con conexiones roscadas se fabrican en dimensiones estándar para asegurar la intercambiabilidad de las partes, y para permitir una fabricación conveniente con máquinas y herramientas estándar. En el apéndice A-3 aparecen las dimensiones de cuerdas American Standard Unified. Los tamaños menores de  $\frac{1}{4}$  de plg están dados en números de 0 a 12, en tanto que las medidas en fracciones de pulgadas se especifican para  $\frac{1}{4}$  de plg y más grandes. Se listan dos series: UNC es la designación para cuerdas gruesas y UNF para cuerdas finas. A continuación, se listan las designaciones estándar.

6-32 UNC (medida en número 6, 32 cuerdas por pulgada, cuerda gruesa)

12-28 UNF (medida en número 12, 28 cuerdas por pulgada, cuerda fina)

$\frac{1}{2}$ -13 UNC (medida en fracción de  $\frac{1}{2}$  plg, 13 cuerdas por pulgada, cuerda gruesa)

$1\frac{1}{2}$ -12 UNF (medida en fracción de  $1\frac{1}{2}$  plg, 12 cuerdas por pulgada, cuerda fina)

En las tablas se da el diámetro mayor básico ( $D$ ), el número de cuerdas por pulgada ( $n$ ), y el área sometida a esfuerzo de tensión que se obtiene de:

$$A_t = 0.7854 \left( D - \frac{0.9743}{n} \right)^2 \quad (1-9)$$

Cuando un miembro roscado se somete a tensión directa, se utiliza el área de esfuerzo de tensión para calcular el esfuerzo de tensión promedio. Corresponde al área más pequeña que se produciría mediante un corte transversal a través de la varilla roscada. Para nuestra conveniencia, algunos estándares utilizan el área de la raíz o el área bruta, y ajustan el valor del esfuerzo permisible.

**Cuerdas de tornillo métricas.** En el apéndice A-3 aparecen dimensiones similares para cuerdas métricas. Las designaciones de las cuerdas métricas estándar son de la forma:

$$M10 \times 1.5$$

donde M significa métrico, el número que le sigue es el diámetro mayor básico en mm, y el último número es el paso entre cuerdas adyacentes en mm. Por consiguiente, la designación anterior denota una cuerda métrica con un diámetro mayor básico de 10.0 mm y un paso de 1.5 mm. Nótese que el paso es  $= 1/n$ .

**Vigas estándar de madera.** El apéndice A-4 da las dimensiones y propiedades de sección para muchos tamaños estándar de vigas de madera. Nótese que el tamaño nominal es simplemente el "nombre" de la viga, y se relaciona con el tamaño aproximado antes

del acabado. Las dimensiones reales acabadas son de modo significativo menores que los tamaños nominales. Por ejemplo, una tabla común "2 x 4" es en realidad de 1.5 plg de ancho y 3.5 plg de alto. También nótese el dibujo de la orientación de las vigas para la designación estándar de los ejes X y Y. Cuando se utiliza como viga a flexión, la dimensión larga debe ser vertical para obtener una resistencia y rigidez máximas.

**Perfiles estructurales de acero.** Los fabricantes de acero proporcionan una amplia variedad de perfiles estructurales estándar, que son eficientes en el uso de materiales, y que son convenientes para especificaciones e instalaciones en estructuras de construcción o bastidores de máquinas. Como se muestra en la tabla 1-6, se incluyen los ángulos estándar (Perfiles L), canales (Perfiles C), vigas de patín ancho (Perfiles W), vigas American Standard (Perfiles S), tubería estructural y tubos. Nótese que en el lenguaje del medio las formas W y S se conocen como "vigas I" porque la forma de la sección transversal parece la letra mayúscula I.

Las tablas A-5 a A-9 del apéndice dan las propiedades geométricas de perfiles estructurales seleccionadas que cubren un rango razonablemente amplio de tamaños. Nótese que en la referencia 2 se presentan muchos más tamaños. Las tablas del apéndice dan datos para el área de la sección transversal (A), el peso por pie de longitud, la localización del centroide de la sección transversal, el momento de inercia (I), el módulo de sección (S), y el radio de giro (r). Es probable que algunas de estas propiedades sean nuevas para el lector en este momento, por lo que se definirán más adelante en este texto, conforme sea necesario. Los valores I y S son importantes en el análisis y diseño de vigas. Para el análisis de columnas, se necesitan I y r.

**Ángulos de acero (perfiles L).** El apéndice A-5 muestra dibujos de las formas típicas de ángulos de acero con longitudes de sus patas iguales o desiguales. Llamados perfiles L debido al aspecto de la sección transversal, los ángulos se utilizan como miembros a tensión de armaduras y torres, como miembros de estructuras de maquinaria, dinteles sobre ventanas y puertas en la construcción, como atiesadores de placas grandes que se utilizan en bastidores y vigas, y apoyos tipo anaquel para equipo. Hay quienes se refieren a estas formas como "hierros angulares". La designación estándar adquiere la forma que se muestra a continuación, para lo que se utiliza una medida como ejemplo:










$$L4 \times 3 \times 1/2$$

donde L se refiere al perfil L, 4 es la longitud de la pata más larga, 3 es la longitud de la pata más corta, y  $\frac{1}{2}$  es el espesor de las patas. Las dimensiones están en pulgadas.

**Canales American Standard (perfiles C).** Véase el apéndice A-6 para el aspecto de los canales y sus propiedades geométricas. Los canales se utilizan en aplicaciones similares a las que se describieron anteriormente para ángulos. El alma y los dos patines forman un perfil generalmente más rígido que los ángulos, que son más resistentes a la torsión causada por carga.

El dibujo en la parte superior de la tabla muestra que los canales tienen patines ahusados y almas de espesor constante. La pendiente del ahusado de los patines es de aproximadamente 2 plg por cada 12 plg, y esto hace difícil unir otros miembros a los patines. Existen arandelas ahusadas especiales que facilitan la sujeción. Nótese la designación de los ejes X y Y en el dibujo, definidos con el alma vertical del canal, lo que le da su característica forma en "C". Esto es sumamente importante al utilizar canales como vigas o columnas. El eje X está situado sobre el eje horizontal de simetría, mientras que

TABLA 1-6 Designaciones para perfiles de acero y aluminio

Nombre del perfil	Perfil	Símbolo	Ejemplo de designación
Ángulo		L	L4 x 3 x 1/2 Apéndice A-5
Canal		C	C15 x 50 Apéndice A-6
Viga de patin ancho		W	W14 x 43 Apéndice A-7
Viga American standard		S	S10 x 35 Apéndice A-8
Tubería estructural - cuadrada			4 x 4 x 1/4 Apéndice A-9
Tubería estructural - rectangular			6 x 4 x 1/4 Apéndice A-9
Tubo			Peso estándar de 4 plg Cédula 40 de 4 plg Apéndice A-12
Canal de la Aluminum Association		C	C4 x 1.738 Apéndice A-10
Viga-I de la Aluminum Association		I	I8 x 6.181 Apéndice A-11

la dimensión  $x$ , dada en la tabla, sitúa al eje Y en relación con la parte trasera del alma. El centroide está en la intersección de los ejes X y Y.

La forma de la designación estándar para canales es:

C15×50

donde C indica que es un perfil C estándar

15 es la altura nominal (y real) en pulgadas, con el alma en posición vertical  
50 es el peso por unidad de longitud, expresada en lb/pies

**Perfiles de patín ancho (perfiles W).** Véase el apéndice A-7. Éste es el perfil más común que se utiliza para vigas, como se discutirá en los capítulos 7, 8 y 12. Los perfiles W tienen almas relativamente delgadas, y patines un poco más gruesos de espesor constante. La mayor parte del área de la sección transversal está en los patines, alejándose del eje centroidal horizontal (eje X), lo que hace que el momento de inercia sea sumamente alto para una cantidad dada de material. Nótese que el momento de inercia y el módulo de sección son mucho más elevados respecto al eje X que respecto al eje Y. Por consiguiente, los perfiles W se utilizan típicamente en la orientación que se muestra en el dibujo del apéndice A-7. Además, estos perfiles alcanzan su mayor eficiencia cuando se utilizan a flexión pura sin torsión, porque son sumamente flexibles a torsión. La designación estándar de los perfiles W presenta mucha información. Considérese el ejemplo,

W14×43

donde W indica que es un perfil W,

14 es la altura nominal en pulgadas  
43 es el peso por unidad de longitud en lb/pies

El término *altura* es la designación estándar de la altura vertical de la sección transversal al colocarse en la orientación que se muestra en el apéndice A-7. Nótese, a partir de los datos en la tabla, que la altura real es con frecuencia distinta de la altura nominal. Para el caso de W14×43, la altura real es de 13.66 pulgadas.

**Vigas American Standard (perfiles S).** El apéndice A-8 muestra las propiedades de perfiles S. Gran parte de la discusión de los perfiles W se aplica también a los perfiles S. Nótese que, nuevamente, el peso por pie de longitud se incluye en la designación, como el S10×35 que pesa 35 lb/pie. En la mayoría, aunque no en todos los perfiles S, la altura real es igual a la nominal. Los patines de los perfiles S están biselados a una pendiente de aproximadamente 2 plg por cada 12 plg, como los patines de los perfiles C. Los ejes X y Y están definidos como se muestra con el alma en posición vertical.

Con frecuencia se prefieren los perfiles de patín ancho (perfiles W) a los perfiles S, por sus patines relativamente anchos, el espesor constante de los patines, y propiedades de sección generalmente más altas para un peso y altura dados.

**Tubería estructural (cuadrada y rectangular).** Véase el apéndice A-9 para el aspecto de propiedades de la tubería estructural de acero. Estos perfiles se forman generalmente de láminas planas soldadas a lo largo. Las propiedades de sección tienen en

cuenta los radios de las esquinas. Nótese los dibujos que muestran los ejes X y Y. La designación estándar toma la forma:

$$6 \times 4 \times 1/4$$

donde 6 es la altura del lado largo, en pulgadas

4 es el ancho del lado más corto, en pulgadas

1/4 es el espesor de pared, en pulgadas

Las tuberías cuadrada y rectangular son sumamente útiles en estructuras de máquinas, porque tienen buenas propiedades de sección para miembros cargados como vigas a flexión, y para cargas de torsión por su sección transversal cerrada. Las caras planas con frecuencia facilitan la sujeción de miembros entre sí o la unión de equipo a los miembros estructurales. Algunos marcos se sueldan para formar una unidad integral que funciona como un marco espacial rígido. Con tubería cuadrada puede hacerse una eficiente sección para columnas.

**Tubos.** Las secciones circulares huecas, que por lo común se les llama *tubos*, son sumamente eficientes para utilizarse como vigas, miembros de torsión y columna. La colocación uniforme del material lejos del centro del tubo aumenta el momento de inercia para una cantidad dada de material, y da al tubo propiedades uniformes respecto a todos los ejes que pasan por el centro de la sección transversal. La forma cerrada de su sección transversal le da una alta resistencia y rigidez a torsión, así como a flexión.

El apéndice A-12 da las propiedades de tubo de acero soldado sin costura American National Standard cédula 40. Éste es el tipo de tubo que se utiliza con frecuencia para transportar agua y otros fluidos, pero funciona igualmente bien en aplicaciones estructurales. Nótese que los diámetros interior y exterior reales son algo distintos de los nominales, excepto para los tamaños muy grandes. El tubo de construcción con frecuencia se llama *tubo de peso estándar* y tiene las mismas dimensiones que el tubo de cédula 40 de  $\frac{1}{2}$  plg a 10 plg. Existen otras "cédulas" y "pesos" de tubería con espesores de pared más pequeños.

Otras secciones circulares huecas comúnmente disponibles se conocen como *tubería*. Éstas están disponibles en acero al carbón, acero inoxidable, aluminio, cobre, bronce, titanio y otros materiales. Véanse referencias 2, 3, y 4 para la variedad de tipos y tamaños de tubo y tubería.

**Canales y vigas I estándar de la Aluminum Association.** En los apéndices A-10 y A-11 se dan las dimensiones y propiedades de sección de canales y vigas I desarrolladas por la Aluminum Association (referencia 1). Éstas son de perfiles extrudidos con espesor uniforme de las almas y los patines, con radios amplios donde se tocan. Las proporciones de estas secciones son ligeramente distintas de las secciones de acero laminado ya descritas. La forma extruida ofrece ventajas en el uso eficiente de materiales y en la unión de miembros. En este texto se utilizarán las siguientes formas para la designación de secciones de aluminio:

$$C4 \times 1.738 \quad \text{o} \quad I8 \times 6.181$$

donde C o I indican la forma básica de la sección

4 u 8 indica la altura del perfil en la orientación que se muestra  
1.738 o 6.181 indican el peso por unidad de longitud en lb/pe

## BIBLIOGRAFÍA

1. Aluminum Association, *Aluminum Standards and Data*, Washington, DC, 1993.
2. American Institute of Steel Construction, *Manual of Steel Construction*, 9th ed., Chicago, 1989.
3. Avallone, Eugene A. and Theodore Baumeister III, eds., *Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers*, 9th ed., McGraw-Hill, New York, 1987.
4. Mott, R. L., *Applied Fluid Mechanics*, 4th ed., Merrill, an imprint of Macmillan Publishing Co., New York, 1994.
5. Oberg, E., F. D. Jones, and H. L. Horton, *Machinery's Handbook*, 24th ed., Industrial Press, New York, 1992.
6. Shigley, J. E., and Mischke, C. R., *Mechanical Engineering Design*, 5th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1988.
7. Young, W. C., *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 6th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.

## PROBLEMAS

### Definiciones

- 1-1. Defina la *masa* y enuncie las unidades de masa en el sistema de unidades anglosajonas y el sistema métrico SI.
- 1-2. Defina el *peso*, y enuncie sus unidades en ambos sistemas.
- 1-3. Defina *esfuerzo*, y enuncie sus unidades en ambos sistemas.
- 1-4. Defina el *esfuerzo normal directo*.
- 1-5. Explique la diferencia entre esfuerzo de compresión y esfuerzo de tensión.
- 1-6. Defina el *esfuerzo cortante directo*.
- 1-7. Explique la diferencia entre cortante simple y cortante doble.
- 1-8. Dibuje un elemento sujeto a esfuerzo de tensión directo.
- 1-9. Dibuje un elemento sujeto a esfuerzo de compresión directo.
- 1-10. Dibuje un elemento sujeto a esfuerzo cortante directo.
- 1-11. Defina la *deformación unitaria normal* y enuncie sus unidades en ambos sistemas.
- 1-12. Defina la *deformación por cortante* y enuncie sus unidades en ambos sistemas.
- 1-13. Defina el *coeficiente de Poisson* y dé sus unidades en ambos sistemas.
- 1-14. Defina el *módulo de elasticidad a tensión* y dé sus unidades en ambos sistemas.
- 1-15. Defina el *módulo de elasticidad a cortante* y dé sus unidades en ambos sistemas.

### Conversiones masa-peso

- 1-16. Un camión transporta 1800 kg de grava. ¿Cuál es el peso de la grava en newtons?
- 1-17. Un camión de cuatro ruedas con una masa total de 4000 kg está sobre un puente. Si el 60% del peso está sobre las ruedas traseras, y el 40% sobre las delanteras, calcule la fuerza ejercida sobre el puente por cada rueda.
- 1-18. Un total de 6800 kg de fertilizante se almacena en un contenedor de fondo plano de  $5.0 \times 3.5$  m. Calcule la carga sobre el piso en newtons por metro cuadrado o en pascales.
- 1-19. Una masa de 25 kg está suspendida de un resorte cuya constante es de 4500 N/m. ¿Cuánto se estirará el resorte?
- 1-20. Mida la longitud, ancho y espesor de este libro en milímetros.
- 1-21. Determine su propio peso en newtons y su masa en kilogramos.
- 1-22. Expresé el peso que se obtuvo en el problema 1-16 en libras.
- 1-23. Expresé las fuerzas que se obtuvieron en el problema 1-17 en libras.
- 1-24. Expresé la carga en el problema 1-18 en libras por pie cuadrado.
- 1-25. Con los datos del problema 1-19, calcule el peso de la masa en libras, la constante del resorte en libras por pulgada, y el alargamiento del resorte en pulgadas.

- 1-26. Una base de hierro colado para una máquina pesa 2750 libras. Calcule su masa en slugs.
- 1-27. Un rodillo de acero que pende de una báscula, produce una lectura de 12 800 lb. Calcule su masa en slugs.
- 1-28. Determine su propio peso en libras y su masa en slugs.

### Conversiones de unidades

- 1-29. Un recipiente de presión contiene un gas a 1200 psi. Expresé la presión en pascales.
- 1-30. Un acero estructural tiene un esfuerzo permisible de 21 600 psi. Expréselo en pascales.
- 1-31. El esfuerzo al que un material se rompe bajo una carga de tensión directa se conoce como *resistencia última*. El rango de resistencias últimas para las aleaciones de aluminio varían de 14 000 a 76 000 psi. Expresé este rango en pascales.
- 1-32. El eje de un motor eléctrico gira a 1750 rpm. Expresé la velocidad de rotación en radianes por segundo.
- 1-33. Expresé un área de 14.1 plg<sup>2</sup> en milímetros cuadrados.
- 1-34. Una deformación permisible de una cierta viga es de 0.080 plg. Expresé la deformación en milímetros.
- 1-35. Una base para una columna de construcción mide 18.0 plg por 18.0 plg de lado, y 12.0 plg de altura. Calcule el área de la sección transversal en pulgadas cuadradas y en milímetros cuadrados. Calcule el volumen en pulgadas cúbicas, pies cúbicos, milímetros cúbicos y metros cúbicos.
- 1-36. Calcule el área en pulgadas cuadradas de una varilla, con un diámetro de 0.505 plg. Luego convierta el resultado en milímetros cuadrados.

### Esfuerzos de compresión y tensión directos

- 1-37.M Calcule el esfuerzo en una barra redonda sujeta a una fuerza de tensión directa de 3200 N si su diámetro es de 10 mm.
- 1-38.M Calcule el esfuerzo en una barra rectangular con dimensiones de sección transversal de 10 mm por 30 mm si se aplica una fuerza de tensión directa de 20 kN.
- 1-39.I Un eslabón de una máquina empacadora automática se somete a una fuerza de tensión de 860 lb. Si el eslabón es cuadrado de 0.40 plg de lado, calcule el esfuerzo sobre el eslabón.
- 1-40.I Una varilla circular, con diámetro de 3/8 plg soporta un calentador que pesa 1850 lb. Calcule el esfuerzo en la varilla.
- 1-41.M Se diseña una repisa para sostener cajones con una masa total de 1840 kg. Dos varillas similares

a las de la figura 1-21 sostienen la repisa. Cada varilla tiene un diámetro de 12.0 mm. Suponga que el centro de gravedad de los cajones está en la parte media de la repisa. Calcule el esfuerzo a la mitad de las varillas.

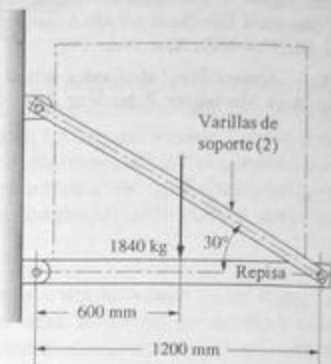


FIGURA 1-21 Soporte de repisa del problema 1-41.

- 1-42.I La base para la columna de concreto es circular, con un diámetro de 8 plg, y soporta una carga de compresión directa de 70 000 lb. Calcule el esfuerzo de compresión en el concreto.
- 1-43.I Tres bloques de madera cortos y cuadrados de 3½ plg de lado, soportan una máquina que pesa 29 500 lb. Calcule el esfuerzo de compresión sobre los bloques.
- 1-44.M El eslabón de un mecanismo soporta una carga de compresión axial de 3500 N. Si tiene una sección transversal cuadrada de 8.0 mm de lado, calcule el esfuerzo en el eslabón.
- 1-45.M Una máquina con una masa de 4200 kg está sobre tres varillas de acero dispuestas como se muestra en la figura 1-22. Cada varilla tiene un diámetro de 20 mm. Calcule el esfuerzo en cada varilla.
- 1-46.M Se utiliza una centrifuga para separar líquidos, según sus densidades, utilizando fuerza centrífuga. La figura 1-23 ilustra un brazo de una centrifuga con un balde en su extremo para contener el líquido. En operación, el balde y el líquido tienen una masa de 0.40 kg. La fuerza centrífuga tiene una magnitud en newtons de:

$$F = 0.01097 \cdot m \cdot R \cdot n^2$$

en donde  $m$  = masa en rotación del balde y el líquido (en kilogramos)



$R$  = radio al centro de masa (metros)  
 $n$  = velocidad de rotación (revoluciones por minuto) = 3000 rpm

Calcule el esfuerzo en la barra redonda. Considere únicamente la fuerza debida al recipiente.

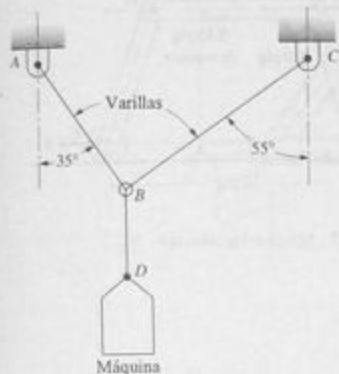


FIGURA 1-22 Varillas de soporte del problema 1-45.

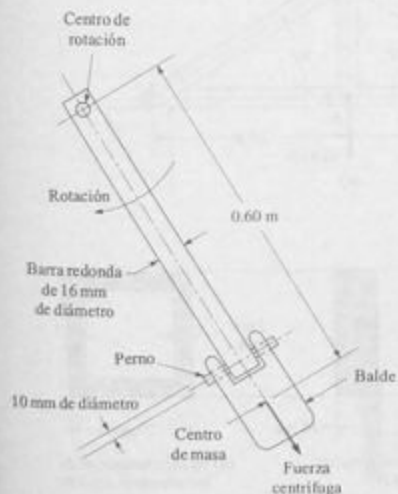


FIGURA 1-23 Centrífuga del problema 1-46.

1-47.M Una barra cuadrada soporta una serie de cargas como se muestra en la figura 1-24. Calcule el esfuerzo en cada segmento de la barra. Todas las cargas actúan a lo largo del eje central de la barra.



FIGURA 1-24 Barra del problema 1-47 que soporta cargas axiales.

1-48.M Repita el problema 1-47 con la barra circular de la figura 1-25.

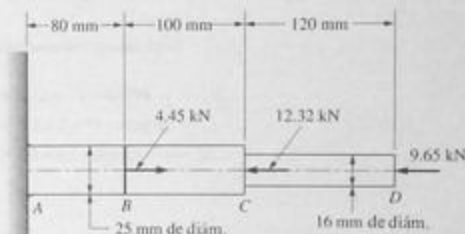


FIGURA 1-25 Barra del problema 1-48 que soporta cargas axiales.

1-49.I Repita el problema 1-47 con el tubo de la figura 1-26. El tubo es de acero cédula 40 de  $1\frac{1}{2}$  plg.

1-50.I Calcule el esfuerzo en el miembro BD que se muestra en la figura 1-27, si se aplica una fuerza  $F$  de 2800 lb.

Para los problemas 51 y 52 que utilizan las armaduras mostradas, calcule las fuerzas en todos los miembros y los esfuerzos en la sección media, lejos de las juntas. Recurra al apéndice para el área de la sección transversal de los miembros indicados en las figuras. Considere que todas las juntas están unidas con pernos.

1-51.M Use la figura 1-28.

1-52.I Use la figura 1-29.

1-53.M Obtenga el esfuerzo de tensión en el miembro AB que se muestra en la figura 1-30.

1-54.I La figura 1-31 muestra la forma de una probeta que se utiliza para medir las propiedades a tensión de los metales (como se describe en el capítulo 2).

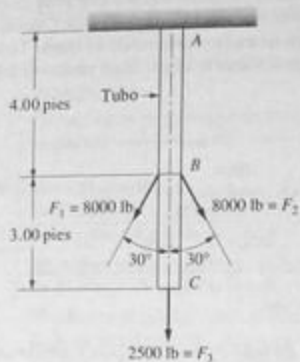


FIGURA 1-26 Tubo del problema 1-49.

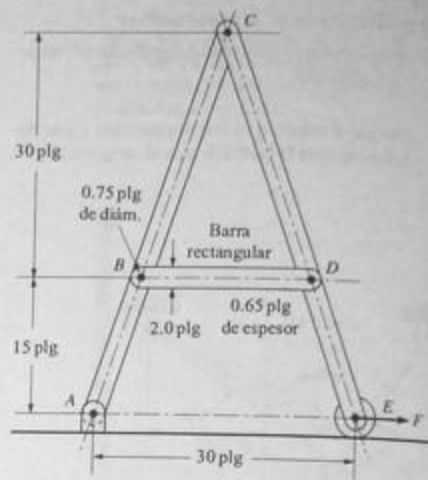


FIGURA 1-27 Marco del problema 1-50.

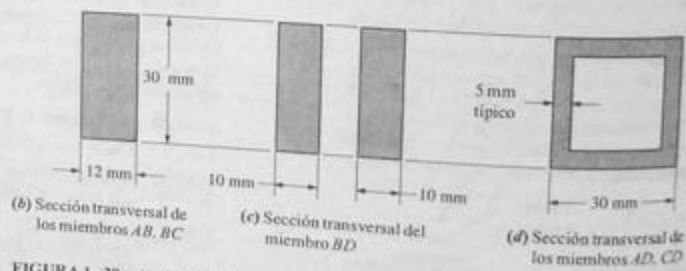
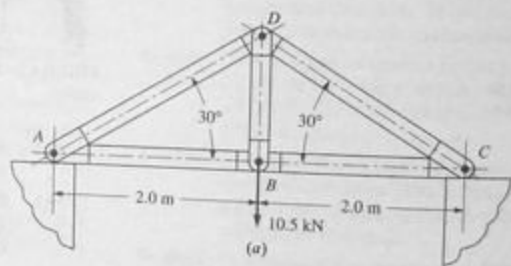
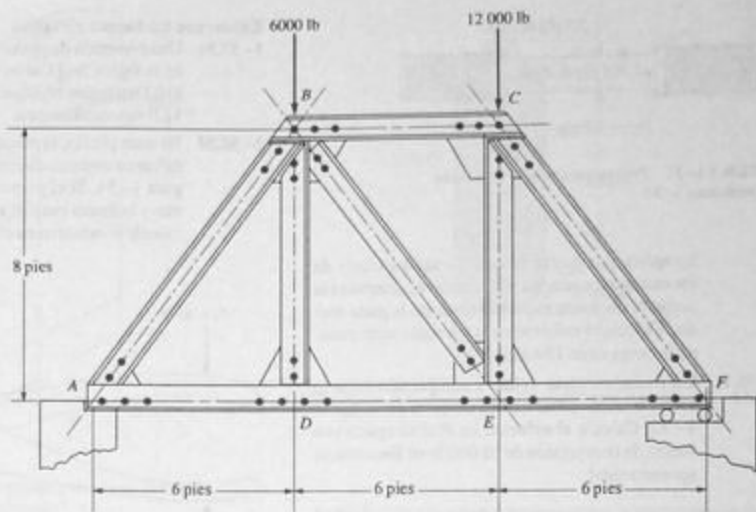


FIGURA 1-28 Armadura del problema 1-51.



Especificaciones de los miembros:

AD, DE, EF L2 x 2 x 1/8 - dobles — J L

BD, CE, BE L2 x 2 x 1/8 - simples — J

AB, BC, CF C3 x 4.1 - dobles — J C

FIGURA 1-29 Armadura del problema 1-52.

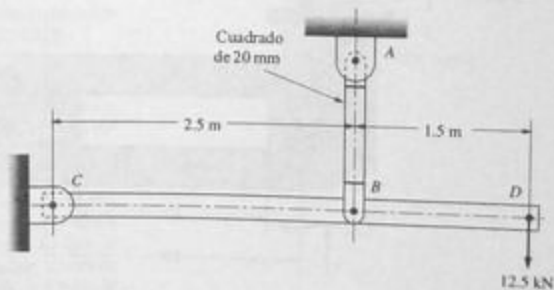


FIGURA 1-30 Soportes del problema 1-53.

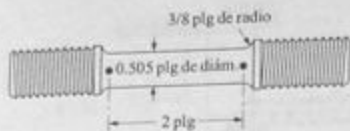


FIGURA 1-31 Probeta para prueba de tensión del problema 1-54.

Se aplica una fuerza de tensión axial a través de los extremos roscados y la sección de prueba es la parte de diámetro reducido cerca de la parte media. Calcule el esfuerzo en la porción media cuando la carga es de 12 600 lb.

- 1-55.I Un miembro corto sujeto a compresión tiene la sección transversal que se muestra en la figura 1-32. Calcule el esfuerzo en él si se aplica una fuerza de compresión de 52 000 lb en línea con su eje centroidal.

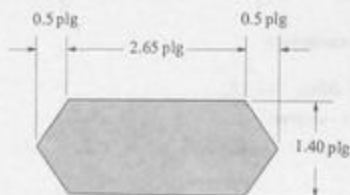


FIGURA 1-32 Miembro corto sujeto a compresión del problema 1-55.

- 1-56.M Un miembro corto sujeto a compresión tiene la sección transversal que se muestra en la figura 1-33. Calcule el esfuerzo en el miembro si se aplica una fuerza de compresión de 640 kN alineada con su eje centroidal.

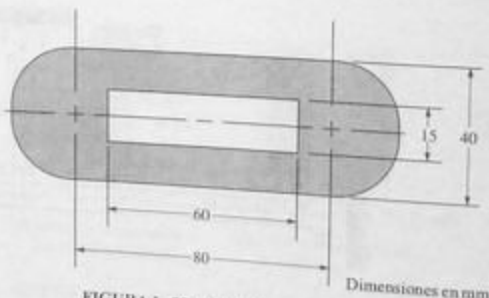


FIGURA 1-33 Miembro corto sujeto a compresión del problema 1-56.

### Esfuerzos cortantes directos

- 1-57.M Una conexión de pasador como la que se muestra en la figura 1-11 se somete a una fuerza de 16.5 kN. Determine el esfuerzo cortante en el perno de 12.0 mm de diámetro.
- 1-58.M En unas pinzas, el pasador de bisagra se somete a esfuerzo cortante directo, como se indica en la figura 1-34. Si el perno tiene un diámetro de 3.0 mm y la fuerza ejercida en la manija,  $F_h$ , es de 55 N, calcule el esfuerzo en el perno.

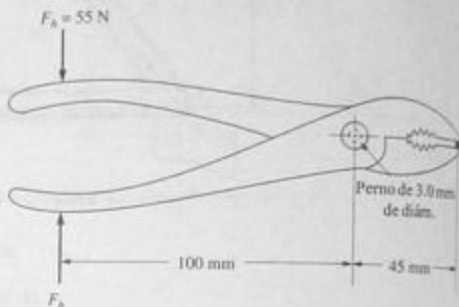


FIGURA 1-34 Pinzas para el problema 1-58.

- 1-59.M Con la centrifuga que se muestra en la figura 1-23 y los datos del problema 1-46, calcule el esfuerzo cortante en el perno entre la barra y el balde.
- 1-60.I En una pieza de madera se hace una muesca, como se muestra en la figura 1-35, para soportar una carga externa  $F$  de 1800 lb. Calcule el esfuerzo cortante en la madera.
- 1-61.M La figura 1-36 muestra la forma de un trozo que debe extraerse de una lámina de aluminio de 5 mm de espesor.

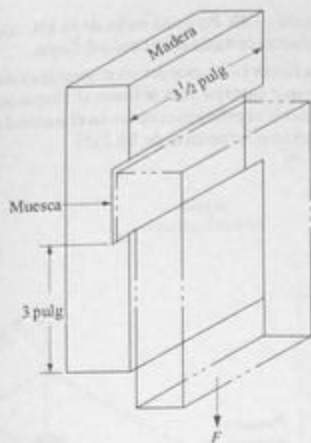


FIGURA 1-35 Bloque de madera con muesca sometido a cortante para el problema 1-60.

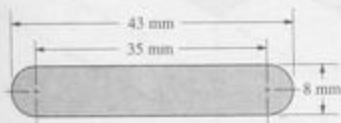


FIGURA 1-36 Forma de un "bocado" para el problema 1-61.

Calcule el esfuerzo cortante en el aluminio si se aplica una fuerza de perforación de 38.6 kN.

- 1-62.I La figura 1-37 muestra la forma de un "bocado" al extraerse de una lámina de acero de 0.194 plg de espesor. Calcule el esfuerzo cortante en el acero si se aplica una fuerza de perforación de 45 000 lb.
- 1-63.M La cuña de la figura 1-14 tiene las dimensiones  $b = 10$  mm,  $h = 8$  mm, y  $L = 22$  mm. Determine el esfuerzo cortante en la cuña cuando se transmite un par de torsión de 95 N·m del eje de 35 mm del diámetro al cubo.
- 1-64.I Se utiliza una cuña para conectar un engrane a un eje, como se muestra en la figura 1-14. Tiene una sección transversal rectangular con  $b = 1/2$  plg y  $h = 3/8$  plg. La longitud es de 2.25 plg. Calcule el esfuerzo cortante en la cuña cuando transmite 8000 lb·plg de par de torsión del eje de 2.0 plg de diámetro al engrane.

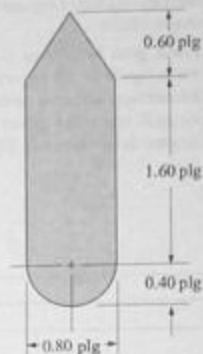


FIGURA 1-37 Forma de un "bocado" para el problema 1-62.

- 1-65.I Se conectan dos tubos como se muestra en la figura 1-38. Bajo una carga de compresión de 20 000 lb, la carga se transfiere del tubo superior a través del perno al conector, y luego a través del collarín

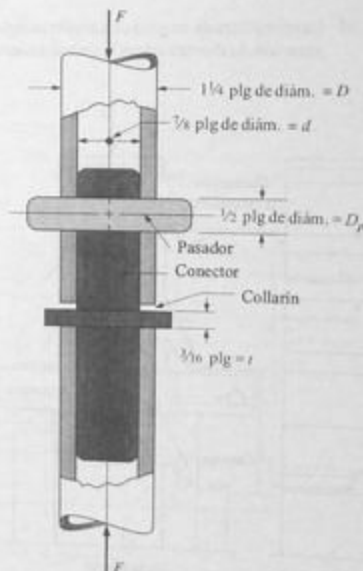


FIGURA 1-38 Conector para el problema 1-65.

al tubo inferior. Calcule el esfuerzo cortante en el perno y en el collarín.

- 1-66.I Una pequeña grúa hidráulica como la que se muestra en la figura 1-39 soporta una carga de 800 lb. Determine el esfuerzo cortante que ocurre en el perno en  $B$ , que está a esfuerzo cortante doble. El diámetro del perno es de  $3/8$  plg.

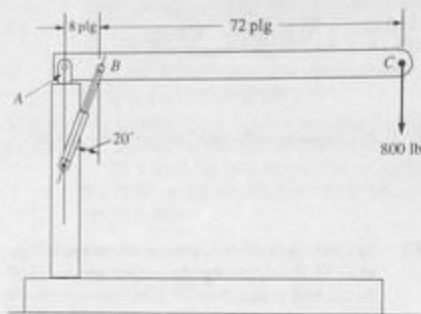


FIGURA 1-39 Grúa hidráulica para el problema 1-66.

- 1-67.M La cremallera de un gato de camión tiene la configuración de dientes como la que se muestra en la

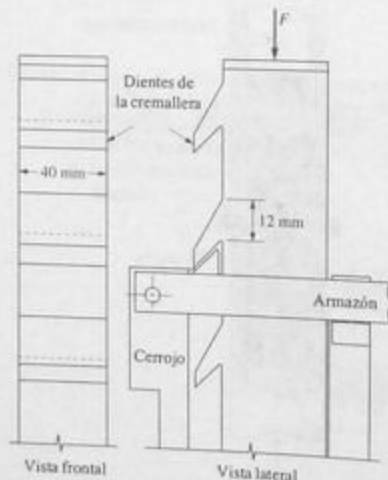


FIGURA 1-40 Cremallera del gato para el problema 1-67.

40

figura 1-40. Para una carga de 88 kN, calcule el esfuerzo cortante en la base del diente.

- 1-68.M La figura 1-41 muestra un ensamble en donde el bloque superior está soldado al bloque inferior. Calcule el esfuerzo cortante en el material de soldadura si la fuerza es de 88.2 kN.

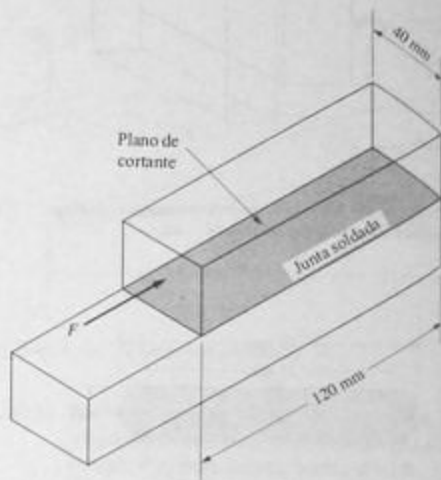


FIGURA 1-41 Piezas soldadas para el problema 1-68.

- 1-69.M La figura 1-42 muestra un tornillo sujeto a una carga de tensión. Un modo de falla sería el desprendimiento del vástago circular de la cabeza del tornillo, lo que sería una acción cortante. Calcule el esfuerzo cortante en la cabeza para este modo de falla si se aplica una fuerza de 22.3 kN.
- 1-70.M La figura 1-43 muestra una junta remachada que une dos placas de acero. Calcule el esfuerzo cortante en los remaches debido a una fuerza de 10.2 kN aplicada a las placas.
- 1-71.M La figura 1-44 muestra una junta a tope remachada con cubreplacas que conectan dos placas de acero. Calcule el esfuerzo cortante en los remaches debido a una fuerza de 10.2 kN aplicada a las placas.

#### Esfuerzo de apoyo

- 1-72.I Calcule los esfuerzos de apoyo en las superficies en contacto  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , en la figura 1-45.

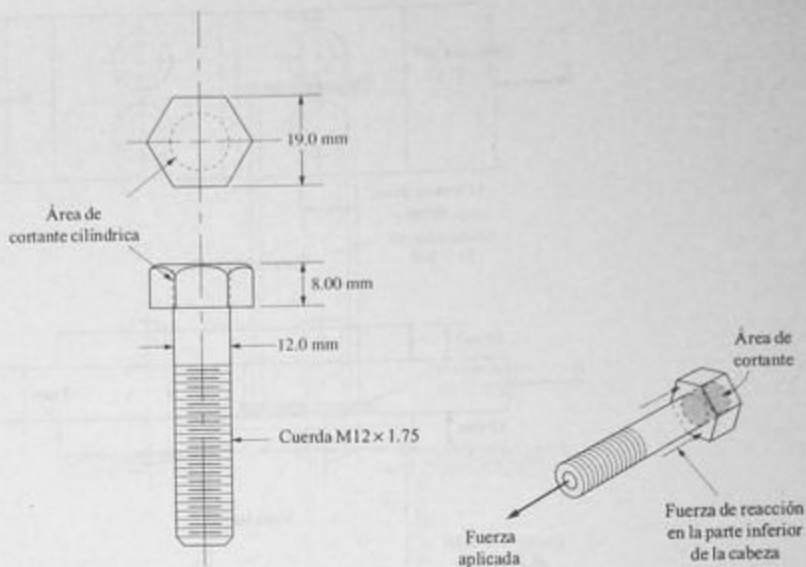


FIGURA 1-42 Tornillo para el problema 1-69.

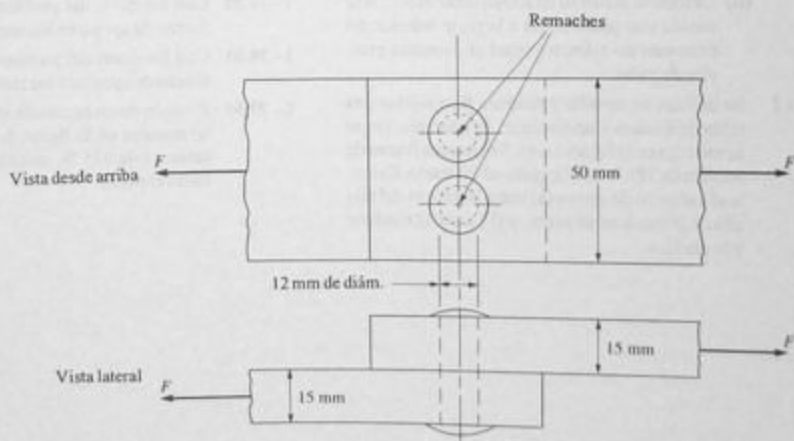


FIGURA 1-43 Junta remachada de ala para el problema 1-70.

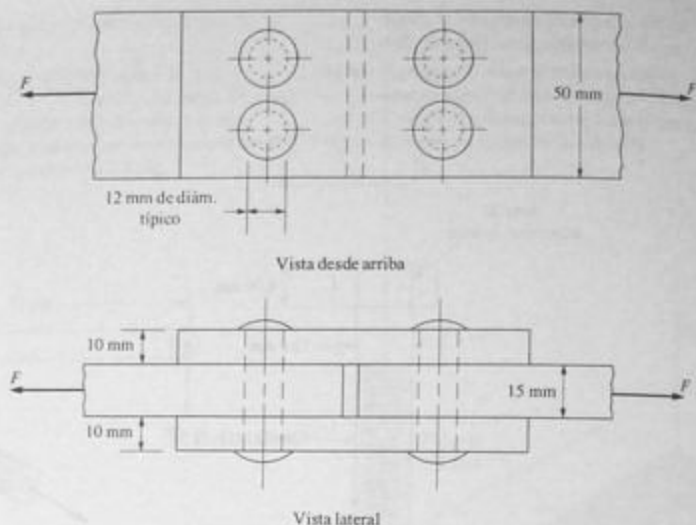


FIGURA 1-44 Junta a tope remachada para el problema 1-71.

- 1-73.I Un tubo de acero cédula 40 de 2 plg se utiliza como pata en una máquina. La carga soportada por la pata es de 2350 lb.
- Calcule el esfuerzo de apoyo sobre el piso si el tubo está abierto en uno de sus extremos.
  - Calcule el esfuerzo de apoyo sobre el piso si se suelda una placa plana a la parte inferior del tubo con un diámetro igual al diámetro exterior del tubo.
- 1-74.I Se utilizan un tornillo y rondana para sujetar una tabla de madera a un cimiento de concreto, como se muestra en la figura 1-46. Se crea una fuerza de tensión de 385 lb en el tornillo al apretarlo. Calcule el esfuerzo de apoyo (a) entre la cabeza del tornillo y la rondana de acero, y (b) entre la rondana y la madera.
- 1-75.I Con los datos del problema 1-64, calcule el esfuerzo de apoyo sobre el costado de la cufia.
- 1-76.I Con los datos del problema 1-65, calcule el esfuerzo de apoyo sobre el tubo en las superficies de contacto con el perno y el collarín.
- 1-77.M Con los datos del problema 1-70, calcule el esfuerzo de apoyo en los remaches.
- 1-78.M Con los datos del problema 1-71, calcule el esfuerzo de apoyo en los remaches.
- 1-79.M El tacón de un zapato de mujer tiene la forma que se muestra en la figura 1-47. Si la fuerza en el tacón es de 535 N, calcule el esfuerzo de apoyo sobre el piso.



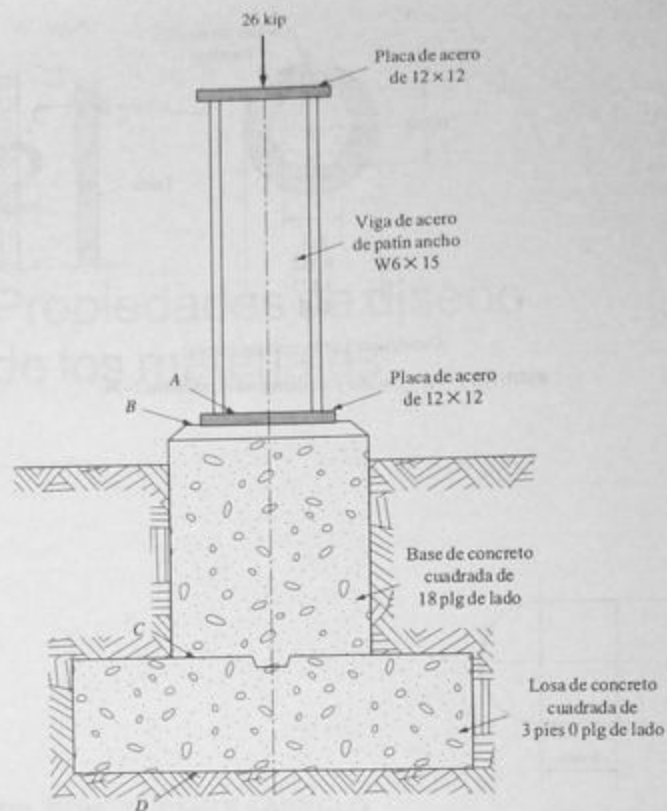
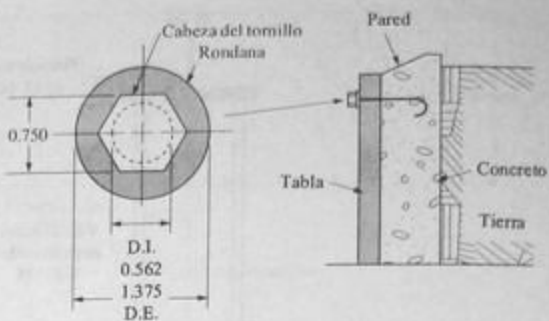


FIGURA 1-45 Cimientos de la columna para el problema 1-72.



Dimensiones de la rondana (en plg)

FIGURA 1-46 Tornillo y rondana para el problema 1-74.

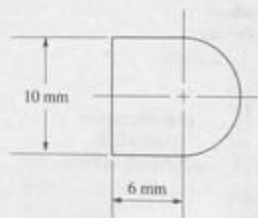


FIGURA 1-47 Tacón de un zapato para el problema 1-79.



# 2

## Propiedades de diseño de los materiales

### 2-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

El estudio de la resistencia de materiales requiere un conocimiento de la forma en que las fuerzas y momentos externos afectan los esfuerzos y deformaciones que se desarrollan en el material de un miembro que soporta carga. Sin embargo, con el fin de dar a estos conocimientos un uso práctico, el diseñador necesita saber cuántas deformaciones y esfuerzos puede resistir el material de manera segura. De este modo, las propiedades de los materiales, en lo que se refiere al diseño, deben comprenderse junto con el análisis requerido para determinar la magnitud de los esfuerzos y deformaciones.

En este capítulo presentaremos información concerniente a los materiales que se utilizan con mayor frecuencia en la fabricación de componentes de estructuras y dispositivos mecánicos, poniendo más énfasis en las propiedades de diseño de los materiales que en su estructura metalúrgica o composición química. Aunque es verdad que un conocimiento profundo de la estructura de los materiales es una buena ayuda para el diseñador, es de la mayor importancia saber la forma en que los materiales se comportan al soportar cargas. Éste es el comportamiento en el que nos concentraremos en el presente capítulo.

Primero, discutiremos los metales, los materiales más ampliamente utilizados en el diseño de la ingeniería. Se describen las importantes propiedades de los metales, junto con las características especiales de varios metales distintos.

Entre los no metales que se presentan se incluye: madera, concreto, plásticos y los materiales compuestos, y se expone la forma en que el comportamiento de estos materiales difiere de los metales, junto con algunas de sus propiedades características.

Después de terminar el estudio de este capítulo, el lector será capaz de:

1. Enumerar los usos típicos de los materiales de ingeniería.
2. Definir la *resistencia última a la tensión*.
3. Definir el *punto de cedencia*.
4. Definir la *resistencia a la cedencia*.
5. Definir el *límite elástico*.
6. Definir el *límite proporcional*.
7. Definir el *módulo de elasticidad* y describir su relación con la rigidez de los materiales.
8. Definir la *ley de Hooke*.
9. Describir el comportamiento dúctil y frágil de los materiales.
10. Definir el *porcentaje de alargamiento* y describir su relación con la ductilidad de los materiales.
11. Definir el Sistema de Numeración Unificado (SNU) para metales y aleaciones.
12. Describir el sistema de designación de cuatro dígitos para aceros.
13. Definir las propiedades más importantes de los aceros al carbono, aleaciones de aceros, los aceros inoxidable y los aceros estructurales.
14. Describir el sistema de designación de cuatro dígitos para aleaciones forjadas y coladas de aluminio.
15. Describir las designaciones para el templado del aluminio.
16. Describir las propiedades de diseño del cobre, latón, bronce, zinc, magnesio y titanio.
17. Describir las propiedades de diseño de hierros colados, incluyendo hierro gris, hierro dúctil, hierro dúctil austemplado, hojalata y hierro maleable.
18. Describir las propiedades de diseño de la madera, el concreto, los plásticos y los materiales compuestos.

## 2-2 METALES EN EL DISEÑO MECÁNICO

Los metales, por lo general, se utilizan para miembros que soportan carga en edificios, puentes, máquinas y una amplia variedad de productos para el consumidor. Las vigas y columnas en los edificios comerciales están hechas de acero estructural o aluminio. En automóviles, se utiliza un gran número de aceros, entre los que se incluye lámina de acero al carbono para paneles de carrocería, aleaciones de corte libre para piezas maquinadas y aleaciones de alta resistencia para engranes y piezas sometidas a cargas excesivas. El hierro colado se utiliza en bloques de motores, tambores de frenos y cabezas de cilindros. Las herramientas, resortes y otras piezas que requieren de una alta dureza y resistencia al desgaste están hechas de aleaciones de acero que contienen una gran cantidad de carbono. Los aceros inoxidable se utilizan en equipo de transporte, productos para plantas químicas y equipos de cocina donde se requiere resistencia a la corrosión.

El aluminio tiene muchas de las aplicaciones del acero; se utiliza en muchos productos arquitectónicos y bastidores para equipo móvil. Su resistencia a la corrosión permite que se utilice en tanques de almacenaje químico, utensilios de cocina, equipo marino y productos como postes indicadores para carretera. Los pistones para automóviles, mol-

duras y cuerpos troquelados de bombas y alternadores son de aluminio. Las estructuras para aviones, las piezas para motores y los revestimientos de lámina metálica utilizan aluminio por su alta razón de resistencia-peso.

El cobre y sus aleaciones, tales como el latón y el bronce, se utilizan en conductores eléctricos, intercambiadores de calor, resortes, bujes, herrajes marinos y piezas para interruptores. Con frecuencia se utiliza el magnesio en piezas para camiones, ruedas y piezas de enseres para el hogar. El zinc tiene usos similares, y también puede forjarse en componentes de maquinaria y herraje industrial. El titanio tiene una alta proporción de resistencia en razón con su peso y una buena resistencia a la corrosión y, por consiguiente, se utiliza en piezas para aviones, recipientes de presión y equipo químico.

La selección de materiales requiere considerar muchos factores. Por lo general, deben evaluarse la resistencia, rigidez, ductilidad, peso, resistencia a la corrosión, capacidad de maquinado, facilidad para trabajarse, soldabilidad, aspecto, costo y disponibilidad. En lo que se refiere al estudio de la resistencia de materiales, los primeros tres factores son los más importantes: resistencia, rigidez y ductilidad.

**Resistencia.** Los datos de referencia que listan las propiedades mecánicas de los metales casi siempre incluirán la *resistencia última a la tensión* y la *resistencia a la cedencia del metal*. La comparación entre los esfuerzos reales en una pieza, con la resistencia última a la tensión o la resistencia a la cedencia del material del que está hecha la pieza, es el método usual para evaluar lo apropiado que puede ser un material para soportar con seguridad las cargas aplicadas. En el capítulo 3 y los siguientes se tratarán con mayor profundidad los detalles del análisis de esfuerzo.

La resistencia última a la tensión y la resistencia a la cedencia se determinan al probar una muestra del material en una máquina de prueba de tensión como la que se ilustra en la figura 2-1. Entre las mordazas superior e inferior se coloca una barra redonda



FIGURA 2-1 Máquina universal de pruebas para obtener datos de esfuerzo-deformación de materiales. (Fuente: Timus Olsen Testing Machine Co., Inc., Willow Grove, Pa., Estados Unidos.)

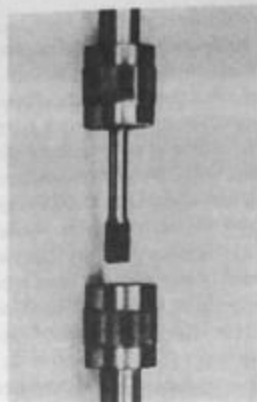


FIGURA 2-2 Probeta para pruebas de tensión montada en un portaprobeta. (Fuente: Timmus Olsen Testing Machine Co., Inc., Willow Grove, Pa., Estados Unidos.)

o tira plana. La figura 2-2 muestra una fotografía de una probeta representativa para prueba de tensión. Se aplica lenta y uniformemente una fuerza de tensión a la muestra, hasta que ésta se rompa. Durante la prueba, se hace una gráfica que muestre la relación entre el esfuerzo en la muestra y la deformación unitaria. En la figura 2-3 podemos ver un diagrama típico de esfuerzo-deformación de un acero de bajo contenido de carbono. Puede observarse que durante la primera fase de la aplicación de la carga, la gráfica del esfuerzo contra la deformación es una línea recta, lo que indica que el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación. Después del punto *A* en el diagrama, la curva deja de ser una recta. Este punto se conoce como *límite proporcional*. Conforme se incremen-

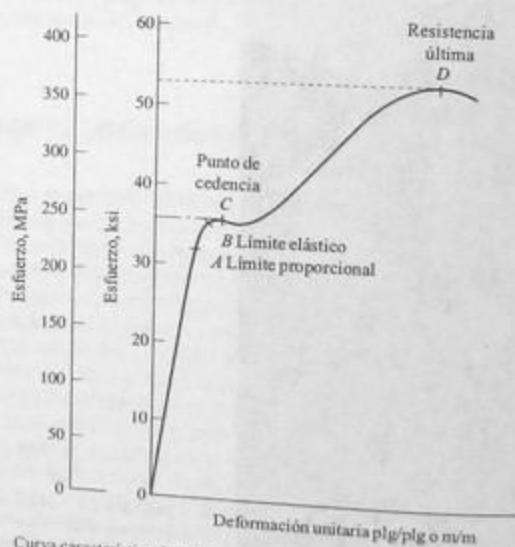


FIGURA 2-3 Curva característica de esfuerzo-deformación del acero.

ta continuamente la carga sobre la muestra, se llega a un punto que se conoce como *límite elástico*, marcado con la letra *B* en la figura 2-3. A esfuerzos menores a este punto, el material recobrará su tamaño y forma originales si se elimina la carga. A mayores esfuerzos, el material queda permanentemente deformado. El *punto de cedencia* es el esfuerzo en el que ocurre un alargamiento notorio sin un incremento aparente en la carga. En la figura 2-3 el punto de cedencia está en *C*, aproximadamente a 36 000 psi (248 MPa). Al aplicar cargas aún mayores, luego de alcanzar el punto de cedencia, hace que la curva vuelva a elevarse. Al llegar a un pico, la curva cae de manera ligera hasta que finalmente se rompe la muestra, terminando así la gráfica. El esfuerzo aparente más elevado y que se toma del diagrama de esfuerzo-deformación, se conoce como *resistencia última*. En la figura 2-3, la resistencia última sería aproximadamente de 53 000 psi (365 MPa).

El hecho de que las curvas de esfuerzo-deformación en las figuras 2-3 y 2-4 caigan luego de llegar a un pico, indica que disminuye el nivel de esfuerzo. En realidad no es así; el *esfuerzo verdadero* continúa elevándose hasta que finalmente el material se fractura. La razón para la aparente disminución en el esfuerzo es que la gráfica que se toma de una típica máquina de prueba de tensión es en realidad de *carga contra alargamiento* y no de *esfuerzo contra deformación*. El eje vertical se convierte en esfuerzo al dividir la carga (fuerza) sobre la probeta entre el área de sección transversal *original* de la probeta. Cuando la probeta se acerca a su carga de ruptura, se reduce su diámetro y, en consecuencia, su área de sección transversal. El área que se redujo requirió una fuerza menor para seguir alargando la probeta, aun cuando el esfuerzo verdadero sobre el material se incrementa. Esto resulta en la caída de la curva que se muestra en las figuras 2-3 y 2-4. En vista de que es muy difícil controlar el diámetro decreciente, y debido a que los experimentos demostraron que hay poca diferencia entre el esfuerzo máximo verdadero y el que se obtuvo para el pico del *esfuerzo aparente* contra la curva de deformación, al pico se le acepta como la resistencia última a la tensión del material.

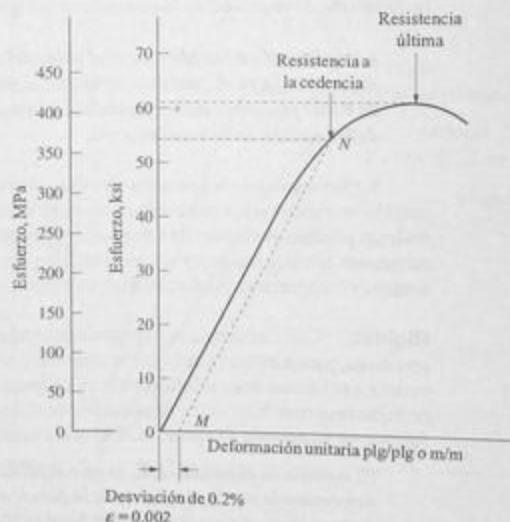


FIGURA 2-4 Curva típica de esfuerzo-deformación del aluminio.

A continuación, se expone un resumen de las definiciones de las más importantes propiedades de resistencia de los metales:

*El límite proporcional es el valor del esfuerzo en la curva de esfuerzo-deformación, al que la curva se desvía por primera vez, desde una línea recta.*

*El límite elástico es el valor del esfuerzo en una curva de esfuerzo-deformación, en el que el material se deforma plásticamente; es decir, ya no volverá a su forma y tamaño originales luego de eliminar la carga.*

*El punto de cedencia es el valor del esfuerzo en la curva de esfuerzo-deformación, en el que existe un incremento significativo de la deformación, con poco o ningún incremento en el esfuerzo.*

*La resistencia última es el máximo valor del esfuerzo en la curva de esfuerzo-deformación.*

Muchos metales no presentan un punto de cedencia tan bien definido como el de la figura 2-3. Algunos ejemplos de esto son las aleaciones de aceros de alta resistencia, el aluminio y el titanio. Sin embargo, estos materiales en realidad sí ceden, puesto que se deforman en una cantidad apreciable antes de que ocurra su fractura. Para estos materiales, un típico diagrama de esfuerzo-deformación sería similar al que se muestra en la figura 2-4. La curva es suave, sin un punto de cedencia pronunciado. Para estos materiales, la resistencia a la cedencia se define por una línea como la *M-N* con un trazo paralelo a la porción recta de la curva de prueba. El punto *M* por lo general se determina al obtener ese punto en el eje de deformación que representa una deformación de 0.002 plg/plg. Este punto también se conoce como punto de desviación del 0.2%. El punto *N*, donde la línea de desviación corta la curva, define la resistencia a la cedencia del material, que en la figura 2-4 es aproximadamente de 55 000 psi. La resistencia última está en el pico de esta curva, como quedó descrito. Para estos materiales, se utiliza el término *resistencia a la cedencia*, en lugar de punto de cedencia.

En resumen, para materiales que no presentan un punto de cedencia pronunciado, la definición de resistencia a la cedencia es la siguiente:

*La resistencia a la cedencia es el valor del esfuerzo en la curva de esfuerzo-deformación en el cual una recta que se dibuja desde un valor de deformación de 0.002 plg/plg (o m/m), y paralela a la porción recta de la curva de esfuerzo-deformación, interseca la curva.*


En la mayoría de los metales forjados, el comportamiento de los materiales a compresión es similar a los materiales que están a tensión, y por esto, generalmente, no se realizan pruebas separadas de compresión. Sin embargo, en materiales colados y no homogéneos como la madera y el concreto, hay grandes diferencias entre las propiedades a tensión y compresión, y deben realizarse pruebas de compresión.

**Rigidez.** Con frecuencia es necesario determinar cuánto se deformará una pieza bajo una carga, para asegurar que la deformación excesiva no destruya su utilidad. Esto puede ocurrir a esfuerzos muy inferiores a la resistencia a la cedencia del material, en especial en miembros muy largos o en dispositivos de alta precisión. La rigidez del material es una función de su *módulo de elasticidad*, al que a veces se le conoce como *módulo de Young*.

*El módulo de elasticidad,  $E$ , es una medida de la rigidez de un material, determinado por la pendiente de la porción recta de la curva de esfuerzo-deformación. Es la razón de cambio de esfuerzo a cambio en la deformación correspondiente.*



Este puede formularse matemáticamente como:

 **Módulo de elasticidad**

$$E = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (2-1)$$

Por consiguiente, un material con una pendiente más pronunciada en su curva de esfuerzo-deformación será más rígido y se deformará menos bajo una carga que un material que tiene una pendiente menos pronunciada. En la figura 2-5, que ilustra este concepto, se muestran las porciones rectas de las curvas de esfuerzo-deformación para el acero, titanio, aluminio y magnesio. Puede verse que si dos piezas, que de otro modo serían idénticas, estuvieran hechas de acero y aluminio, respectivamente, la pieza de aluminio se deformaría tres veces más al verse sometida a la misma carga. El diseño de los miembros característicos de carga de máquinas y estructuras es tal, que el esfuerzo queda debajo del límite proporcional; es decir, en la porción recta de la curva de esfuerzo-deformación. A continuación definiremos la *ley de Hooke*.

*Cuando el nivel de esfuerzo en un material sometido a carga es menor que el límite proporcional y existe una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación, se dice que se cumple la ley de Hooke.*

Muchas de las fórmulas que se utilizan en el análisis de esfuerzo se basan en la suposición de que se aplica la ley de Hooke. Este concepto es también útil para técnicas de análisis experimental de esfuerzos, en donde la deformación se mide en un cierto punto. El esfuerzo correspondiente al punto puede calcularse con una variación de la ecuación (2-1):

$$\sigma = E\epsilon \quad (2-2)$$

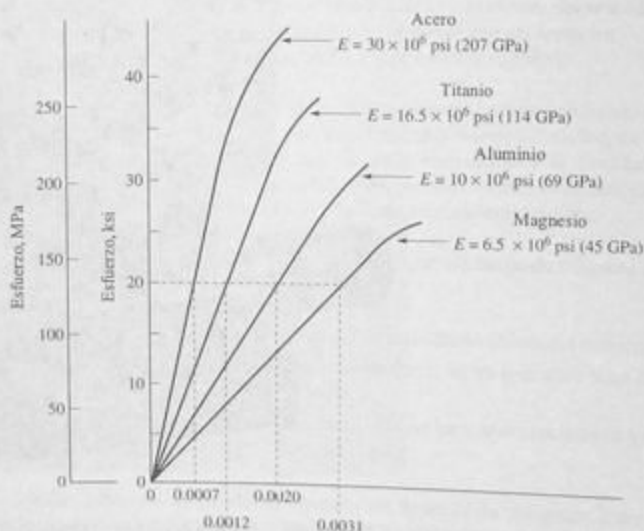
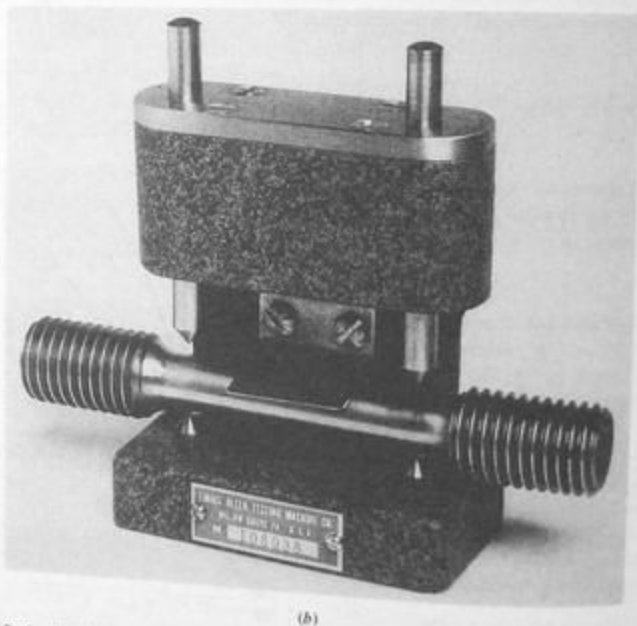
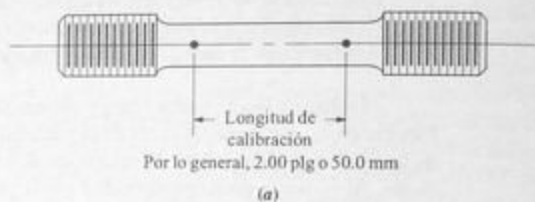


FIGURA 2-5 Módulo de elasticidad de distintos metales.


**Ductilidad.** Cuando los metales se rompen, su fractura puede clasificarse como dúctil o frágil. Un material dúctil se estira y cede antes de fracturarse, por lo que se origina una notoria disminución en el área de la sección transversal, en la sección fracturada. Por otra parte, un material frágil se fracturará de repente con poco o ningún cambio en el área de la sección fracturada. Los materiales dúctiles se prefieren para piezas que soportan cargas repetidas o que se someten a carga de impacto debido a que, por lo general, son más resistentes a la fractura por fatiga, y porque absorben mejor la energía del impacto.

La ductilidad en los metales se mide generalmente durante la prueba de tensión observando cuánto se ha alargado permanentemente el material luego de fracturarse. Al inicio de la prueba, se marca una longitud de calibración en la probeta, como se muestra en la figura 2-6. La mayoría de las pruebas utilizan 2.000 plg o 50.0 mm como longitud de calibración, según se muestra en la figura. Los aceros estructurales muy dúctiles a



**FIGURA 2-6** Longitud de calibración en una probeta para pruebas de tensión: (a) Longitud de calibración con marca en una probeta. (b) Probeta en un dispositivo para marcar longitudes de calibración. (Fuente: Tinus Olsen Testing Machine Co., Inc., Willow Grove, Pa., Estados Unidos.)

veces utilizan 8.000 plg o 200.0 mm como longitud de calibración. Después de que la muestra se somete a tensión hasta fracturarse, las partes fracturadas se juntan, y nuevamente se mide la distancia entre las marcas. Con estos datos, se calcula el *porcentaje de alargamiento*, como sigue:

 **Porcentaje de alargamiento**

$$\text{porcentaje de alargamiento} = \frac{\text{longitud final} - \text{longitud de calibración}}{\text{longitud de calibración}} \times 100\% \quad (2-3)$$

Se considera que un metal es *dúctil* si su porcentaje de alargamiento es mayor del 5%. Un material con un porcentaje de alargamiento menor del 5.0% se considera *frágil* y no presenta el fenómeno de cedencia. La fractura de estos materiales es repentina, sin una deformación notable antes de su fractura definitiva. En la mayoría de las aplicaciones de diseño estructural y mecánico es deseable el comportamiento dúctil y el porcentaje de alargamiento del material debe ser significativamente mayor de un 5.0%. Un alto porcentaje de alargamiento indica un material altamente dúctil.

En resumen, se utilizan las siguientes definiciones para describir la ductilidad en metales:

*El porcentaje de alargamiento es la razón entre el alargamiento plástico de una probeta sometida a tensión, luego de su fractura definitiva dentro de las marcas de calibración, y la longitud original entre las marcas de calibración. Es una medida de la ductilidad.*

*Material dúctil es aquel que puede estirarse, formarse o encogerse a un grado significativo antes de fracturarse. Un metal que presenta un porcentaje de alargamiento mayor del 5.0% se considera dúctil.*

*Material quebradizo es aquel que se fractura de súbito al someterse a carga, con poca o ninguna deformación plástica. Un metal que presenta un porcentaje de alargamiento menor del 5.0% se considera frágil.*

Virtualmente, todas las formas forjadas de aleaciones de acero y aluminio son dúctiles. Pero las formas de alta resistencia tienden a tener una menor ductilidad, y el diseñador con frecuencia se ve obligado a acomodar la resistencia y la ductilidad a la especificación de un material. El hierro colado gris, muchas formas de aluminio colado, y algunas formas de alta resistencia del acero forjado o colado son frágiles.

**Modos de fractura.** En la mayoría de los diseños, un elemento de máquina o miembro estructural se considera que ha fallado cuando:

1. Se rompe; es decir, el esfuerzo supera a la resistencia última del material.
2. El material se deforma plásticamente; es decir, se ve sometido a un esfuerzo mayor que su resistencia a la cedencia.
3. Ocurre una deformación elástica excesiva que hace que el miembro ya no sea adecuado para su uso propuesto.

La deformación del material antes de que ceda depende de su rigidez, indicada por el módulo de elasticidad. En capítulos posteriores se presentarán métodos para calcular la deformación total de los miembros que soportan carga. No hay normas absolutas en relación con el nivel de deformación que podría producir una fractura. Más bien, el dise-

ñador debe juzgar con base en el uso de la estructura o la máquina. La referencia 11 presenta algunos criterios para esto.

**Clasificación de los metales y las aleaciones.** Muchas asociaciones industriales se encargan de establecer normas para la clasificación de metales y aleaciones. Cada una tiene su propio sistema de numeración, conveniente para el metal específico regido por la norma. Pero esto a veces produce confusión, en especial cuando dos o más convenciones se traslapan, y cuando se utilizan esquemas muy distintos para denotar los metales. Se introdujo el orden en la clasificación de metales mediante el uso del Sistema de Numeración Unificado (SNU), como se define en la Norma E 527-74 (Reaprobada en 1981), **Standard Practice for Numbering Metals and Alloys (UNS)** [Prácticas Normativas para la Numeración de Metales y Aleaciones (SNU)] por la American Society for Testing and Materials [Sociedad Estadounidense para Pruebas y Materiales (ASTM)]. Además de listar los materiales controlados por la ASTM, la SNU coordina las designaciones de:

The Aluminum Association (AA) (Asociación del Aluminio)

American Iron and Steel Institute (AISI) (Instituto Estadounidense del Hierro y el Acero)

Copper Development Association (CDA) (Asociación del Desarrollo del Cobre)

Society of Automotive Engineers (SAE) Sociedad de Ingenieros Automotrices)

Las series primarias de números dentro del SNU aparecen listadas en la tabla 2-1, junto con la organización responsable de asignar números dentro de cada serie.

TABLA 2-1 Sistema de numeración unificado (SNU).

Número de serie	Tipo de metales y aleaciones	Organización responsable
<b>Metales no ferrosos y aleaciones</b>		
A00001-A99999	Aluminio y aleaciones de aluminio	AA
C00001-C99999	Cobre y aleaciones de cobre	CDA
E00001-E99999	Tierras raras y aleaciones	ASTM
L00001-L99999	Metales de bajo punto de fusión y aleaciones	ASTM
M00001-M99999	Metales no ferrosos y aleaciones misceláneos	ASTM
N00001-N99999	Níquel y aleaciones de níquel	SAE
P00001-P99999	Metales preciosos y aleaciones	ASTM
R00001-R99999	Metales reactivos y refractarios y aleaciones	SAE
Z00001-Z99999	Zinc y aleaciones de zinc	ASTM
<b>Metales ferrosos y aleaciones</b>		
D00001-D99999	Aceros, con propiedades mecánicas especificadas	SAE
F00001-F99999	Hierros y aceros fundidos	ASTM
G00001-G99999	Aceros al carbono y aleaciones de acero (incluye los antiguos aceros al carbono y aleaciones de acero SAE)	AISI
H00001-H99999	Aceros H; endurecibilidad especificada	AISI
J00001-J99999	Aceros fundidos (excepto aceros para herramientas)	ASTM
K00001-K99999	Aceros y aleaciones ferrosas misceláneos	ASTM
S00001-S99999	Aceros resistentes al calor y la corrosión (inoxidables)	ASTM
T00001-T99999	Aceros para herramientas	AISI

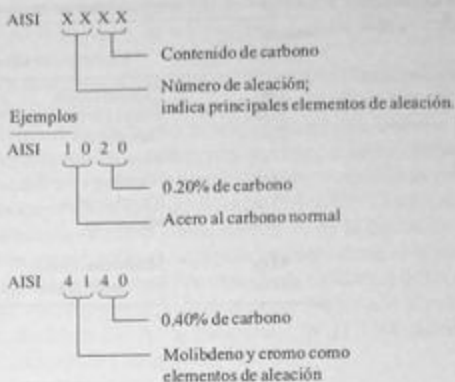


FIGURA 2-7 Sistema de designación del acero.

Muchas aleaciones dentro del SNU retienen los números de los sistemas que durante muchos años la asociación individual ha tenido por costumbre utilizar. Por ejemplo, la siguiente sección describe el sistema de designación de cuatro dígitos de la AISI para aceros al carbono y aleados. La figura 2-7 muestra dos ejemplos: AISI 1020, un acero al carbono, y AISI 4140, una aleación de acero. Estos aceros deben tener las designaciones SNU, G10200 y G41400, respectivamente.

## 2-3 ACERO

El término *acero* se refiere a aleaciones de hierro y carbono y, en muchos casos, otros elementos. Por la gran cantidad de aceros disponibles, en la presente sección se clasificarán como aceros al carbono, aceros aleados, aceros inoxidables y aceros estructurales.

En el caso de los *aceros al carbono* y *aceros aleados*, se utiliza el código de designación de 4 dígitos para definir cada aleación. La figura 2-7 muestra el significado de cada dígito. Los cuatro dígitos deberían ser los mismos para aceros clasificados por el Instituto Americano del Hierro y el Acero [American Iron and Steel Institute (AISI)] y la Sociedad de Ingenieros automotrices [Society of Automotive Engineers (SAE)]. La clasificación de la Sociedad estadounidense para Pruebas y Materiales [American Society for Testing and Materials (ASTM)] se discutirá posteriormente.

Por lo general, los primeros dos dígitos en una designación de cuatro dígitos para el acero denotará los principales elementos de la aleación, además del carbono, presentes en el acero. Los últimos dos dígitos denotan el porcentaje medio (o puntos) de carbono en el acero. Por ejemplo, si los últimos dos dígitos son 40, el acero tendrá aproximadamente 0.4 % de contenido de carbono. El carbono tiene un lugar tan prominente en la designación de la aleación, porque, en general, conforme aumenta el contenido de carbono, también se incrementa la resistencia y dureza del acero. El contenido de carbono, en términos generales, varía de un mínimo de 0.1% a aproximadamente 1.0%. Cabe hacerse notar que si bien la resistencia aumenta al aumentar el contenido de carbono, el acero también se vuelve más frágil.

La tabla 2-2 muestra los principales elementos de aleación que corresponden a los dos primeros dígitos de la designación del acero. La tabla 2-3 da las aleaciones más comunes junto con los principales usos de cada una.

**TABLA 2-2** Principales elementos de aleación en las aleaciones de acero.

Número AISI del acero	Elementos de aleación	Número AISI del acero	Elementos de aleación
10xx	Carbono simple	46xx	Molibdeno-níquel
11xx	Azufre (de corte fácil)	47xx	Molibdeno-níquel-cromo
13xx	Manganeso	48xx	Molibdeno-níquel
14xx	Boro	5xxx	Cromo
2xxx	Níquel	6xxx	Cromo-vanadio
3xxx	Níquel-cromo	8xxx	Níquel-cromo-molibdeno
4xxx	Molibdeno	9xxx	Níquel-cromo-molibdeno (excepto 92xx)
41xx	Molibdeno-cromo	92xx	Silicio-manganeso
43xx	Molibdeno-cromo-níquel		

**TABLA 2-3** Aleaciones de acero más comunes y usos típicos.

Número AISI del acero	Usos típicos
1020	Acero estructural, barras, placas
1040	Piezas de maquinaria, flechas
1050	Piezas de maquinaria
1095	Herramientas, resortes
1137	Flechas, piezas para tornos de roscar (aleaciones fáciles de maquinarse)
1141	Flechas, partes maquinadas
4130	Acero de alta resistencia para usos generales; flechas, engranes, pernos
4140	Igual que 4130
4150	Igual que 4130
5160	Engranes y tornillos de alta resistencia
8760	Herramientas, resortes, cinceles

**Condiciones para aceros.** Las propiedades mecánicas del carbono y los aceros aleados son sumamente sensibles a la manera en que se forman, y a los procesos de tratamiento térmico. En el apéndice A-13 se muestra una lista de la resistencia última, la resistencia a la cedencia y el porcentaje de alargamiento de varios aceros en una amplia variedad de condiciones. Nótese que éstas son propiedades típicas, o ejemplos de éstas, y no pueden servir de base para diseño. Las propiedades de los materiales dependen de muchos factores, entre los que se incluye: tamaño de la sección, temperatura, composición real, variables en su procesamiento y técnicas de fabricación. Es responsabilidad del diseñador investigar el posible rango de propiedades de un material y diseñar miembros de carga seguros sin importar la combinación de factores presentes en una situación dada.

Por lo general, cuanto más severo sea el trabajo sobre un acero, más fuerte será éste. Algunas formas del acero, tales como láminas, barras y perfiles estructurales, se producen por laminado en caliente, mientras aún estén a una temperatura muy elevada. Esto produce un acero relativamente blando y de baja resistencia, de una alta ductilidad y fácil de formar. La laminación del acero en su forma final cuando casi está a temperatura ambiente se conoce como *laminado en frío*, y produce una mayor resistencia y una ductilidad ligeramente menor. Puede lograrse una resistencia aún mayor mediante *estiramiento en frío*, al estirar el material a través de matrices a temperatura ambiente, o casi. De este modo, para estos tres difundidos métodos de producción de formas de acero, la forma de estiramiento en frío (CD: cold-drawn) produce la resistencia más alta, seguido por el laminado en frío y el laminado en caliente (CR y HR, cold-rolled y hot rolled, respectivamente).

mente). Esto puede verse en el apéndice A- 13, al comparar la resistencia del mismo acero, como, por ejemplo AISI 1040, en las condiciones de laminado en caliente y de estirado en frío.

En general, los aceros aleados se tratan al calor para desarrollar propiedades específicas. El tratamiento al calor involucra elevar la temperatura del acero entre 790 y 900 °C (según la aleación) para de inmediato enfriarlo, templándolo en agua o aceite. Luego del templado, el acero tiene alta resistencia y dureza, pero también se torna quebradizo. Por esta razón, se realiza un tratamiento posterior conocido como *templado* (o *estirado*). El acero se recalienta a una temperatura en el rango de entre 205 y 705 °C, y luego se enfría. El efecto de templar una aleación de acero puede apreciarse en la figura 2- 8. De este modo, las propiedades de un acero tratado al calor pueden controlarse al especificar una temperatura de templado. En el apéndice A- 13 se describe la condición de las aleaciones tratadas al calor como OQT 400. Esto significa que el acero fue tratado al calor enfriándolo en aceite y luego templándolo a 205 °C. Similarmente, WQT 1300 significa que se ha enfriado con agua y se ha sometido a templado a 705 °C.

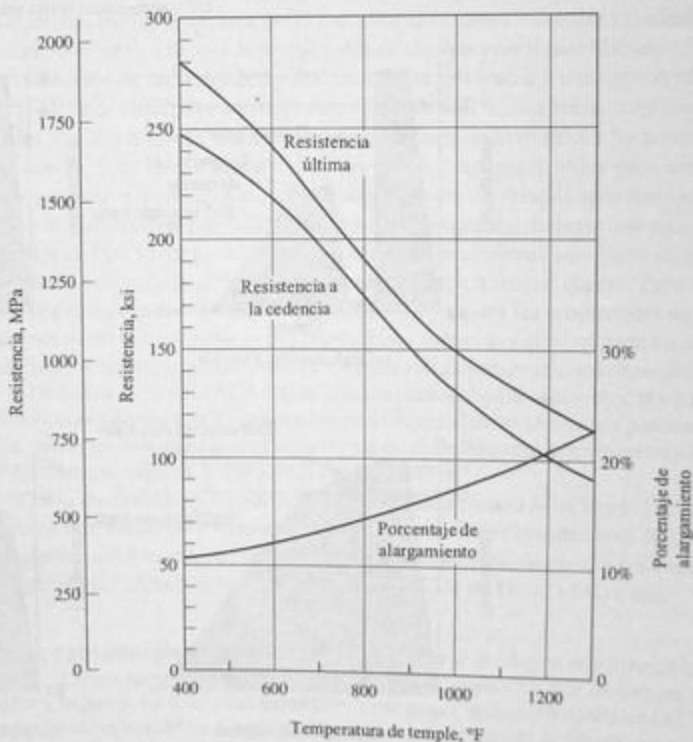


FIGURA 2-8 Efecto de la temperatura de temple en la resistencia y ductibilidad de una aleación de acero.

Las propiedades de los aceros tratados al calor a temperaturas de templado de 200 y 705 °C ponen de manifiesto el rango total de propiedades que pueden tener los aceros tratados al calor. Sin embargo, en la práctica, se especifican temperaturas de templado no menores a los 370 °C, porque los aceros tienden a ser demasiado frágiles a temperaturas menores de templado. Las propiedades de diversas aleaciones aparecen en la lista del apéndice A-13 a temperaturas de templado de 370, 480, 590 y 705 °C para que el lector tenga una idea del rango de resistencias disponible. Estas aleaciones son buenas alternativas para seleccionar materiales en los problemas de capítulos posteriores. La resistencia a temperaturas intermedias puede obtenerse mediante interpolación.

El *recocido* y *normalizado* son tratamientos térmicos diseñados para suavizar el acero, darle propiedades más uniformes, hacerlo más moldeable, o para aliviar los esfuerzos desarrollados en el acero durante procesos como la soldadura, el formado o el maquinado. Dos de los tipos de procesos de recocido son los de recocido completo y recocido para alivio de esfuerzos. La figura 2-9 ilustra estos procesos de tratamiento térmico, junto con el enfriado y templado.

Nota:  
 RT = temperatura ambiente  
 LC = temperatura crítica mínima  
 UC = temperatura crítica máxima

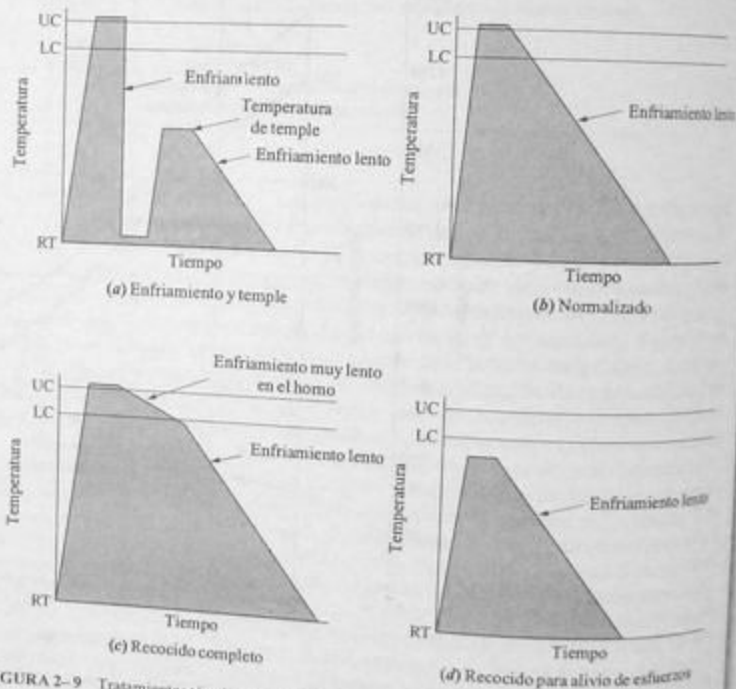


FIGURA 2-9 Tratamientos térmicos para el acero.



El *normalizado* del acero se inicia calentándolo aproximadamente a la misma temperatura (conocida como temperatura *crítica máxima*) que sería necesaria para endurecerlo mediante templado, como ya se ha descrito. Pero en lugar de templarlo, el acero se enfría en aire estático hasta que alcanza la temperatura ambiente. Esto resulta en una estructura uniforme y de grano fino, una mayor ductilidad, mejor resistencia a impactos y una maquinabilidad mejorada.

El *recocido completo* consiste en calentarlo a una temperatura mayor a la crítica máxima, seguido de un enfriamiento muy lento hasta la temperatura crítica mínima y luego en aire estático hasta la temperatura ambiente. Ésta es una de las formas más blandas del acero, siendo así más fácil de cortar, formar y maquinar.

El *recocido de alivio de esfuerzos* consiste en calentar por abajo de la temperatura crítica mínima, mantenerlo para conseguir una temperatura uniforme en toda la pieza, y luego enfriar hasta la temperatura ambiente. Esto alivia los esfuerzos residuales y evita una distorsión posterior.

**Aceros inoxidables.** Los *aceros inoxidables* reciben su nombre por su resistencia a la corrosión. El principal elemento de aleación en los aceros inoxidables es el cromo, que está presente hasta en un 17% en la mayoría de las aleaciones. Se utiliza un mínimo de 10.5% de cromo, y puede variar hasta alcanzar el 27 por ciento.

Aunque existen más de 40 grados de acero inoxidable en el mercado, por lo general se categorizan en tres series que contienen aleaciones con propiedades similares. En el apéndice A-14 se da una lista de propiedades de algunos aceros inoxidables.

Los aceros de las series 200 y 300 tienen alta resistencia y una alta tolerancia a la corrosión. Pueden utilizarse a temperaturas hasta de 650 °C con buena retención de propiedades. Por su estructura, estos aceros son en esencia no magnéticos. Su buena ductilidad y dureza, y su buena soldabilidad, los hacen sumamente útiles para equipos de procesos químicos, productos arquitectónicos y productos relacionados con los alimentos. No son endurecibles por tratamiento térmico, pero pueden hacerse más resistentes al trabajarlos en frío. El rango del trabajo en frío está típicamente dado como *suave*, *semi-suave*, *semiduro* y *duro*, donde la resistencia aumenta a mayor dureza. Pero a mayor dureza disminuye la ductilidad. El apéndice A-14 muestra las propiedades de algunas aleaciones de acero inoxidable en dos condiciones: recocido y duro, que son los extremos disponibles de resistencia. La condición de recocido a veces se conoce como *suave*.

Los aceros de la serie AISI 400 se utilizan para acabados automotrices y para equipo de procesos químicos, tales como tanques de ácido. Ciertas aleaciones pueden tratarse al calor para que puedan utilizarse como hojas de cuchillos, resortes, cojinetes de bolas e instrumentos quirúrgicos. Estos aceros son magnéticos.

Los *aceros endurecidos por precipitación*, tales como 17-4PH y PH13-8Mo, se endurecen al mantenerlos a temperaturas elevadas, entre aproximadamente 480 y 600 °C. Estos aceros generalmente se clasifican como *aceros inoxidables de alta resistencia*, con resistencias a la cedencia aproximadamente de 180 000 psi (1240 MPa) o más.

**Aceros estructurales.** Los *aceros estructurales* se producen en forma de láminas, planchas, barras, tubos y perfiles estructurales como vigas-I, vigas de patines anchos, canales y ángulos. La Sociedad Estadounidense para Pruebas y Materiales (ASTM) da una designación numérica a estos aceros, que es el número de la norma que define las propiedades mínimas requeridas. En el apéndice A-15 se dan los seis grados de los aceros estructurales de uso más frecuente y sus propiedades.

Un acero que es muy popular en las aplicaciones estructurales es el ASTM A36, acero al carbón utilizado para muchos perfiles, placas y barras comercialmente disponibles. Tiene un punto de cedencia mínimo de 36 ksi (248 MPa), es soldable, y se utiliza en puentes, edificios y para propósitos estructurales generales.

Al acero ASTM A242 se le conoce como acero de alta resistencia y baja aleación. Con él se fabrican perfiles, planchas y barras, y puede especificarse en vez del acero A36 para usar miembros más pequeños y ligeros. En tamaños hasta de  $\frac{1}{4}$  de plg de espesor tiene un punto de cedencia mínimo de 50 ksi (345 MPa). En espesores de  $\frac{1}{4}$  a 1  $\frac{1}{2}$  plg, se especifica un punto de cedencia mínimo de 46 ksi (317 MPa). La aleación A242 sirve para usos estructurales generales, y se conoce como *acero de intemperie*, puesto que su resistencia a la corrosión es cuatro veces la del acero al carbono normal. Desde luego, debe considerarse el costo antes de especificar esta aleación.

El de aleación A514 es de alta resistencia, tratado al calor mediante enfriado y templado hasta un punto de cedencia mínimo de 100 ksi (690 MPa). Producido como planchas, se utiliza en puentes soldados y estructuras similares.

La *tubería estructural* es redonda, cuadrada o rectangular y con frecuencia se fabrica de acero ASTM- A501 (formado en caliente) o ASTM a A500 (formado en frío) (véanse los apéndices A-9 y A-15).

Otro acero estructural de uso general es el ASTM A572, disponible en la forma de perfiles, planchas y barras, y en grados de 42 a 65. El número de grado se refiere al punto de cedencia mínimo del grado en ksi, y puede ser de 42, 45, 50, 55, 60 y 65.

En resumen, los aceros vienen en muchas formas con una amplia variedad de resistencias y otras propiedades. La selección del acero más adecuado es ciertamente un arte, apoyado por el conocimiento de las características significativas de cada aleación.

## 2-4 HIERRO FUNDIDO

Entre las atractivas propiedades del hierro fundido se cuentan su bajo costo, buena resistencia al desgaste, buena maquinabilidad, y su capacidad para vaciarse en formas complejas. A continuación se discutirán cinco variedades: hierro gris, hierro dúctil, hierro dúctil austemplado, hojalata y hierro maleable.

El *hierro gris* se utiliza en bloques de motores automotrices, bases para maquinaria, tambores de frenos y engranes grandes. Por lo común se especifica con un número de grado correspondiente a la mínima resistencia a la tensión última. Por ejemplo, el hierro fundido gris grado 20 tiene una resistencia última mínima de 20 000 psi (138 MPa); el grado 60 tiene  $s_u = 60\,000$  psi (414 MPa), y así sucesivamente. Los grados que por lo general están disponibles van del 20 al 60. El hierro gris es ligeramente quebradizo, de modo que su resistencia a la cedencia generalmente no se reporta como propiedad. Una notable característica del hierro gris es que su resistencia a la compresión es muy elevada, entre 3 y 5 veces más que su resistencia a la tensión. Esto debe tomarse en cuenta en el diseño, y en especial cuando una parte se somete a esfuerzos de flexión, como se expone en el capítulo 8.

Por las variaciones en el régimen de enfriamiento luego de que el hierro fundido se vierte en un molde, la resistencia real de una sección en particular de una pieza fundida depende de su espesor. La figura 2-10 ilustra esto para el hierro gris de grado 40. La resistencia en el lugar de la obra puede variar desde 52 000 psi (359 MPa) a 27 000 psi (186 MPa).

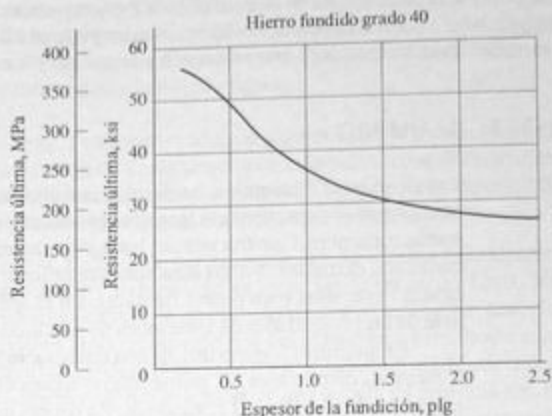


FIGURA 2-10 Resistencia contra espesor en hierro gris fundido grado 40.

El *hierro dúctil* difiere del hierro gris en que no presenta cedencia y en que tiene un mayor porcentaje de alargamiento y una resistencia más elevada a la tensión. Los grados del hierro dúctil se designan mediante un sistema de tres números, como por ejemplo, 80-55-6. El primer número indica la última resistencia mínima a la tensión, expresada en ksi; el segundo, la resistencia elástica expresada en ksi; y el tercero, el porcentaje de alargamiento. De este modo, el grado 80-55-6 tiene una resistencia última de 80 000 psi, una resistencia elástica de 55 000 psi, y un porcentaje de alargamiento de 6%. Entre los usos del hierro dúctil se incluyen cigüeñales y engranes sometidos a grandes cargas.

La resistencia del hierro dúctil puede incrementarse por casi un factor de 2 mediante un proceso que se llama *austemplado*. Las fundiciones primero se calientan a una temperatura entre 815 y 930 °C, y se mantienen a estas temperaturas para conseguir una estructura uniforme. Luego se enfrían rápidamente a una temperatura menor, 230 a 400 °C y de nuevo se mantienen a esa temperatura. Luego de permanecer varias horas a temperatura constante se permite que las fundiciones se enfrien hasta la temperatura ambiente.

El *hierro dúctil austemplado* (ADI: Austempered Ductile Iron) tiene una mayor resistencia y mejor ductilidad que los hierros dúctiles estándar, como puede verse en el apéndice A-16. Esto permite que las piezas sean más chicas y ligeras, y hace que el hierro dúctil austemplado sea muy deseable para engranes automotrices, cigüeñales y miembros estructurales para equipo de construcción y transporte, sustituyendo a los aceros templados o colados.

El *hierro blanco* se produce al enfriar rápidamente una fundición de hierro gris o dúctil durante el proceso de solidificación. Típicamente, el enfriamiento se aplica a áreas seleccionadas, que se endurecen mucho y tienen una alta resistencia al desgaste. El enfriamiento no permite que el carbono en el hierro se precipite durante la solidificación, lo que le da su aspecto blanco. Las regiones más alejadas del medio de enfriamiento se solidifican con más lentitud y adquieren las propiedades normales del hierro base. Una desventaja del proceso de enfriamiento es que el hierro blanco es muy quebradizo.

El *hierro maleable* se utiliza en piezas de automóviles y camiones, maquinaria de construcción y equipo eléctrico. Presenta cedencia, tiene resistencias a la tensión comparables a las del hierro dúctil, y tiene resistencias de compresión últimas, ligeramente mayores que las del hierro dúctil. En general, se utiliza un número de 5 dígitos para

designar los grados del hierro maleable. Por ejemplo, el grado 40 010 tiene una resistencia a la cedencia de 40 000 psi (276 MPa) y un porcentaje de alargamiento del 10%.

En el apéndice A-16 se listan las propiedades mecánicas de varios grados de hierro gris, hierro dúctil, hierro dúctil austempleado y hierro maleable.

## 2-5 ALUMINIO

Las aleaciones de aluminio se diseñan con el objeto de que adquieran propiedades optimas para usos específicos. Algunas se producen primariamente como láminas, planchas, barras o alambre. Con frecuencia, los perfiles estructurales estándar y las secciones especiales son extruidas. Varias aleaciones se utilizan para forja, en tanto que otras son aleaciones especiales para piezas fundidas. En el apéndice A-17 aparece una selección en lista de las propiedades de aleaciones de aluminio.

El aluminio forjado utiliza una designación de 4 dígitos para definir las diversas aleaciones disponibles. El primer dígito indica el grupo de aleación según el principal elemento de aleación. El segundo dígito denota una modificación en la aleación básica. Los últimos dos dígitos identifican una aleación específica dentro del grupo. A continuación se da una breve descripción de las siete series principales de las aleaciones de aluminio.

*Serie 1000*, 99.0% de aluminio o más. Se utiliza en los campos químico y eléctrico. Excelente resistencia a la corrosión, fácil de maquinar, buena conductividad térmica y eléctrica. Bajas propiedades mecánicas.

*Serie 2000*, donde el cobre es el elemento de aleación. Tratable al calor con excelentes propiedades mecánicas. Menor resistencia a la corrosión que el resto de las demás aleaciones. Se utiliza en revestimientos y estructuras aeronáuticas.

*Serie 3000*, donde el manganeso es el elemento de aleación. No es tratable al calor, pero puede obtenerse una resistencia moderada mediante trabajado en frío. Buena resistencia a la corrosión y fácil de maquinar. Se utiliza en equipo químico, utensilios de cocina, revestimientos residenciales y tanques de almacenamiento.

*Serie 4000*, donde el elemento de aleación es el silicio. No es tratable al calor con bajo punto de fusión. Se utiliza como fundente y como aleación de soldadura de latón. La aleación 4032 se utiliza en pistones.

*Serie 5000*, donde el elemento de aleación es el magnesio. No es tratable al calor, pero puede obtenerse una resistencia moderada mediante trabajado en frío. Buena resistencia a la corrosión y soldabilidad. Se utiliza en el servicio marítimo, recipientes a presión, acabados automotrices, herrajes de construcción, estructuras soldadas, torres de televisión y aparejos de perforación.

*Serie 6000*, con silicio y magnesio como elementos de aleación. Tratable al calor hasta resistencia moderada. Buena resistencia a la corrosión, formabilidad y soldabilidad. Se utiliza en estructuras para trabajos pesados, equipo ferroviario y de camiones, tubería, muebles, extrusiones arquitectónicas, piezas maquinadas y forjas. La aleación 6061 es una de las más adaptables de las comercialmente disponibles.

*Serie 7000*, con zinc como elemento de aleación. Tratable al calor hasta una resistencia sumamente elevada. Relativamente poca resistencia a la corrosión y soldabilidad. Se utiliza ante todo para miembros estructurales aeronáuticos. La aleación 7075 tiene una de las resistencias más elevadas. Se produce en la mayoría de las formas laminadas, troqueladas y extruidas, y también se utiliza en forjas.

**Designaciones para templados de aluminio.** Puesto que las propiedades mecánicas de virtualmente todas las aleaciones de aluminio son en sumo grado sensibles al trabajado en frío o al tratamiento al calor, se aplican sufijos a las designaciones de cuatro dígitos de las aleaciones para describir su templado. Las designaciones de templado de uso más frecuente se describen como sigue:

*Templado O.* Totalmente recocido para obtener la menor resistencia. El recocido hace que la mayoría de las aleaciones sean más fáciles de formar mediante doblado o estirado. Las piezas formadas en condiciones de recocido con frecuencia se tratan al calor posteriormente para mejorar sus propiedades.

*Templado H,* endurecido por deformación. Se utiliza para mejorar las propiedades de aleaciones no tratables al calor como las de las series 1000, 3000 y 5000. La H siempre viene seguida de un número de dos o tres dígitos para designar un grado específico de endurecimiento por deformación o procesado especial. El segundo dígito después de la H varía de 0 a 8, e indica un grado sucesivamente mayor de endurecimiento por deformación, lo que resulta en una más alta resistencia. En el apéndice A-17, aparece una lista de las propiedades de diversas aleaciones de aluminio. La tabla indica que la resistencia a la cedencia de la aleación 3003 aumenta de 18 000 psi (124 MPa) a 27 000 psi (186 MPa), cuando el templado cambia de H12 a H18.

*Templado T,* tratado al calor. Se utiliza para mejorar la resistencia y lograr una condición estable. A la T siempre le sigue uno o más dígitos que indican un tratado al calor muy particular. Para productos forjados como láminas, planchas, extrusiones, barras y tubos troquelados, las designaciones que se utilizan con mayor frecuencia son T4 y T6. El tratamiento T6 produce una mayor resistencia pero por lo general reduce la facilidad en el maquinado. En el apéndice A-17 aparece una lista de varias aleaciones tratables al calor en los templados O, T4 y T6 para ilustrar el cambio de propiedades.

Las aleaciones de aluminio fundido se designan mediante un sistema modificado de 4 dígitos de la forma XXX.X, en donde el primer dígito indica el principal grupo de aleaciones según los principales elementos de aleación. La tabla 2-4 muestra los grupos. Los segundos dos dígitos indican la aleación específica dentro del grupo, o indican la pureza del aluminio. El último dígito, después del punto decimal, indica la forma del producto: 0 para piezas fundidas, y 1 o 2 para lingotes.

El aluminio es también sensible a la forma en que se produce, al tamaño de la sección y a la temperatura. En el apéndice A-17 se proporciona una lista de las propiedades típicas, y no puede utilizarse para diseño. Las referencias 1 y 2 dan datos sobre las resistencias mínimas.

**TABLA 2-4** Grupos de aleaciones de aluminio fundido.

Grupo	Principales elementos de aleación
1XX.X	99% o más de aluminio
2XX.X	Cobre
3XX.X	Silicio, cobre, magnesio
4XX.X	Silicio
5XX.X	Magnesio
6XX.X	(Serie no utilizada)
7XX.X	Zinc
8XX.X	Estaño
9XX.X	Otros elementos

## 2-6 COBRE, LATÓN Y BRONCE

El término *cobre* se utiliza de manera adecuada para denotar al metal virtualmente puro con un 99% o más de cobre. Se utiliza principalmente como conductor eléctrico, piezas de interruptores y piezas de motores que conducen corriente eléctrica. El cobre y sus aleaciones tienen buena resistencia a la corrosión, son fáciles de fabricar y tienen un aspecto agradable. Las principales aleaciones del cobre son el cobre al berilio, los latones y los bronce. Cada uno tiene sus propiedades y aplicaciones especiales.

El cobre al berilio tiene una elevada resistencia y buena conductividad eléctrica. Entre sus usos se incluyen las piezas para interruptores, sujetadores de fusibles, conectores eléctricos, fuelles, tubos para manómetros Bourdon y resortes.

Los latones son aleaciones de cobre y zinc. Tienen buena resistencia a la corrosión, son fáciles de trabajar y de bonito aspecto, lo que permite aplicaciones a radiadores automotrices, bases de lámparas, tubos de cambiadores de calor, herrajes marinos, cajas para municiones y muebles para el hogar. Si se añade plomo al latón, se mejora su maquinabilidad, lo que lo hace atractivo para utilizarse en la fabricación de piezas de tornos de roscas.

Entre las principales familias de los bronce, se incluyen el bronce al fósforo, el bronce al aluminio y el bronce al silicio. Su alta resistencia intrínseca y a la corrosión los hace útiles para aplicaciones marítimas, tornillos, engranes, recipientes a presión, resortes, bujes y baleros.

La resistencia del cobre y sus aleaciones depende de la dureza que se consigue mediante el trabajo en frío. Las resistencias sucesivamente mayores resultarían de los temple designados como semisuave, suave, semiduro, duro, extraduro, para resortes, y extra para resortes. Las resistencias de las cuatro aleaciones de cobre en los templados suave y duro aparecen en el apéndice A-14.

## 2-7 ZINC, MAGNESIO Y TITANIO

El *zinc* tiene una resistencia y dureza moderadas y excelente resistencia a la corrosión. Se utiliza en formas forjadas tales como láminas y hojas, y varillas o alambres troquelados. Entre sus principales aplicaciones están las latas de baterías secas, herrajes para construcción y placas para fotograbado.

Muchas piezas de zinc se hacen mediante moldeo a troquel porque su punto de fusión es de menos de 427 °C (800 °F), mucho menor que otros metales para moldeo a troquel. El acabado posterior al fundido es adecuado para muchas aplicaciones, tales como piezas para maquinaria comercial, cuerpos de bombas, corazas de motores y bastidores para máquinas de trabajos ligeros. Cuando se requiere de un aspecto decorativo, puede realizarse fácilmente el electroplateado con níquel y cromo. Piezas tan comunes como carteros de radios, cuerpos de lámparas y molduras automotrices se hacen de esta manera. En el apéndice A-14 aparece una lista de las propiedades de una aleación de zinc fundido.

El *magnesio* es, por lo común, el metal más ligero que se utiliza en piezas para soportar cargas. Su densidad de sólo 0.066 lb/plg<sup>3</sup> (1830 kg/m<sup>3</sup>) es una cuarta parte de la del acero y el zinc, un quinto de la del cobre, y dos terceras partes de la del aluminio. Tiene una resistencia moderada y se presta a aplicaciones en las que el peso fabricado final de la pieza o la estructura debe ser ligero. Las escaleras, carretillas, piezas de cintas sin fin, herramientas mecánicas portátiles y cuerpos de podadoras de césped utilizan magnesia. En la industria automotriz, las piezas de carrocería, las ruedas de ventiladores, los cuerpos de bombas y las abrazaderas están con frecuencia hechas de magnesio. En los aviones, su ligereza hace que este metal sea atractivo para los pisos, estructuras y revestimientos de fuselaje y ruedas. La rigidez (módulo de elasticidad) del magnesio es

baja, lo cual es una ventaja en piezas donde la energía de impacto debe absorberse. Además, su ligereza resulta en diseño de bajo peso en comparación con otros metales sobre una base de rigidez equivalente. Véase el apéndice A-14 para propiedades de una aleación fundida de magnesio.

El *titanio* tiene una alta resistencia, y su densidad es aproximadamente la mitad de la del acero. Aunque el aluminio tiene una menor densidad, el titanio es superior al aluminio y a la mayoría de los aceros con base en su resistencia contra peso. Retiene un alto porcentaje de su resistencia a temperaturas elevadas, y puede utilizarse hasta a 538 °C. La mayoría de las aplicaciones del titanio están en la industria aeroespacial, en piezas para motores, piezas de fuselaje y revestimientos, ductos, estructuras para vehículos espaciales y recipientes a presión. Debido a su resistencia a la corrosión y su resistencia a las altas temperaturas, las industrias químicas utilizan el titanio en intercambiadores de calor, y como revestimiento para equipo de procesamiento. Su alto costo es un factor principal que debe considerarse.

El apéndice A-14 da las propiedades de una aleación de titanio que contiene aluminio y vanadio y que se utiliza en las industrias aeroespacial, marítima y de procesos químicos. Ésta es una popular aleación tratable al calor donde el término *envejecido* se refiere a un ciclo de calentamiento y enfriado seguido de un calentamiento a menor temperatura.

## 2-8 NO METALES EN EL DISEÑO DE INGENIERÍA

La madera y el concreto se usan muy comúnmente en la construcción. Los plásticos y materiales compuestos aparecen en casi todos los campos del diseño, incluyéndose productos de consumo, equipo industrial, automóviles, aviones y productos arquitectónicos. Para el diseñador, las propiedades de resistencia y rigidez de los no metales son de importancia vital, del mismo modo en que lo son para los metales. Debido a las diferencias estructurales en los metales, su comportamiento es sumamente distinto de los metales.

La madera, el concreto, los materiales compuestos y muchos plásticos tienen estructuras que son *anisotrópicas*. Esto significa que las propiedades mecánicas del material son distintas, dependiendo de la dirección de la carga. Además, debido a los cambios químicos naturales, las propiedades varían respecto al tiempo, y con frecuencia respecto a las condiciones climáticas. El diseñador debe estar consciente de estos factores.

## 2-9 MADERA

Puesto que la madera es un material natural, su estructura es dependiente de la forma en que crece, y no de la manipulación de los seres humanos, como en el caso de los metales. La forma larga, esbelta y cilíndrica de los árboles resulta en una estructura interna compuesta de células longitudinales. Conforme el árbol crece, se añaden anillos sucesivos a la madera más vieja. De este modo, el núcleo interno, que se conoce como corazón o duramen, tiene propiedades distintas a la albura, cerca de la superficie exterior.

Las especies de la madera también afectan sus propiedades, puesto que clases distintas de árboles producen madera más dura o más blanda, más fuerte o débil. Incluso en las mismas especies ocurre variabilidad debido a las mismas condiciones de crecimiento, tales como las diferencias del suelo y la cantidad de sol y lluvia.

La estructura celular de la madera produce su grano, que es tan evidente al cortarse en tablas y maderos. La resistencia de la madera depende de si la carga se aplica perpendicular o paralela al grano. Además, a través de su grano, la resistencia es distinta en una

dirección radial que en una dirección tangencial respecto al tronco del árbol cilíndrico original del que se cortó.

Otra importante variable que afecta la resistencia de la madera es el contenido de humedad. Los cambios de humedad relativa pueden variar la cantidad de agua absorbida por las células de la madera.

La mayoría de la madera de construcción se clasifica por esfuerzo permisible conforme a las reglas estándar adoptadas por el U.S. Forest Products Laboratory. El apéndice A-18 expone una lista de los esfuerzos permisibles para diversas especies y grados de madera. Estos esfuerzos permisibles son los causantes de la variabilidad debida a las imperfecciones naturales.

## 2-10 CONCRETO

Los componentes del concreto son el cemento y un agregado. Al añadirse agua y mezclar los componentes, se produce una estructura uniforme donde el cemento recubre todas las partículas agregadas. Luego de curarse, la masa queda aglutinada de forma segura. Algunas de las variables que intervienen en la determinación de la resistencia final del concreto son el tipo de cemento utilizado, el tipo y tamaño del agregado, y la cantidad de agua que se añadió.

Una mayor cantidad de cemento en el concreto produce una mayor resistencia. Si se disminuye la cantidad de agua en relación con la cantidad de cemento se aumenta la resistencia del concreto. Desde luego, debe añadirse agua suficiente para hacer que el cemento recubra a los agregados y permita que el concreto pueda colarse y trabajarse antes de que ocurra un curado excesivo. La densidad del concreto que se afecta por el agregado también es un factor. Es común que se agregue una mezcla de arena, grava y piedra quebrada para el concreto que se utiliza en la construcción.

El concreto se clasifica según su resistencia a la compresión, que varía de 2000 psi (14 MPa) a 7000 psi (48 MPa). La resistencia a la tensión del concreto es en extremo baja, y una práctica común es suponer que es cero. Desde luego, el reforzado del concreto con varillas de acero permite utilizarlo en vigas y losas amplias, puesto que el acero resiste las cargas de tensión.

El concreto debe curarse para desarrollar su resistencia nominal. Debe mantenerse húmedo durante por lo menos 7 días, y en este lapso tiene aproximadamente el 75% de su resistencia a la compresión nominal. Aunque su resistencia se incrementa con los años, con frecuencia se utiliza la resistencia a los 28 días para determinar su resistencia nominal.

Los esfuerzos de trabajo permisibles en el concreto son típicamente del 25% de la resistencia nominal a los 28 días. Por ejemplo, un concreto clasificado como de 2000 psi (14 MPa) tendrá un esfuerzo permisible de 500 psi (3.4 MPa).

El peso específico del concreto con base de grava es aproximadamente de 150 lb/pie<sup>3</sup>. El módulo de elasticidad depende de algún modo del peso específico y de la resistencia nominal. Según el American Concrete Institute (Instituto Estadounidense del Concreto), puede calcularse una estimación del módulo de la forma siguiente:

$$E_c = 33 \gamma^{1.2} \sqrt{s_c} \quad (2-4)$$

donde  $E_c$  = Módulo de la elasticidad a compresión, psi

$\gamma$  = Peso específico, lb/pie<sup>3</sup>

$s_c$  = Resistencia a la compresión nominal del concreto, psi



Utilizando  $\gamma = 150 \text{ lb/pie}^3$ , los valores esperados de la elasticidad, calculados a partir de la ecuación (2-4), aparecen a continuación.

Resistencia nominal, $s_c$		Módulo de elasticidad, $E_c$	
psi	MPa	psi	GPa
2000	13.8	$2.7 \times 10^6$	18.6
3000	20.7	$3.3 \times 10^6$	22.7
4000	27.6	$3.8 \times 10^6$	26.2
5000	34.5	$4.3 \times 10^6$	29.6
6000	41.4	$4.7 \times 10^6$	32.4
7000	48.3	$5.1 \times 10^6$	35.2

## 2-11 PLÁSTICOS

Los plásticos se componen de moléculas de cadena larga llamadas polímeros, y son materiales orgánicos sintéticos que pueden formularse y procesarse literalmente en miles de formas.

Puede hacerse una clasificación entre materiales *termoplásticos* y materiales *termoendurecibles*. Los termoplásticos pueden suavizarse repetidamente mediante calentamiento, sin que haya cambio en sus propiedades ni en su composición química. En cambio, luego del curado inicial de los plásticos termoendurecibles, ya no pueden suavizarse nuevamente. Durante el curado ocurre un cambio químico con la presión y el calor.

Algunos ejemplos de los termoplásticos incluyen ABS, acetales, acrílicos, acetatos de celulosa, fluorocarbonos TFE, nylon, polietileno, polipropileno, poliestireno y vinilos. Entre los plásticos termoendurecibles se incluyen los fenólicos, epóxicos, poliésteres, silicones, uretanos, alquídicos, alílicos y aminicos.

Con frecuencia se selecciona un plástico en particular, para obtener una combinación de propiedades como ligereza, flexibilidad, color, resistencia intrínseca y resistencia química, baja fricción o transparencia. Puesto que los productos disponibles son tan numerosos, en el apéndice A-19 sólo se incluye una breve tabla de propiedades de los plásticos. La tabla 2-5 lista los materiales plásticos primarios que se utilizan para seis distintos tipos de aplicación. En las referencias 4, 7 y 9 puede hallarse un extenso estudio comparativo de las propiedades de diseño de los plásticos.

## 2-12 MATERIALES COMPUESTOS

Los materiales compuestos tienen dos o más constituyentes combinados de una forma que resulta en una unión mecánica o adhesiva entre los materiales. Para formar un material compuesto, se distribuye un material de relleno en una matriz, de forma que el relleno refuerce la matriz. Típicamente, el relleno es un material fuerte y rígido, en tanto que la matriz tiene una densidad relativamente baja. Cuando los dos materiales se unen entre sí, gran parte de la capacidad de soporte de carga del compuesto es producida por el material de relleno. La matriz sirve para sostener el relleno en una orientación favorable en relación con la forma de carga y para distribuir las cargas al relleno. El resultado es un material compuesto ligeramente optimizado que tiene una alta resistencia y rigidez en relación con su bajo peso.

TABLA 2-5 Aplicaciones de los materiales plásticos.

Aplicaciones	Propiedades deseadas	Plásticos adecuados
Cuerpos, recipientes, ductos	Alta resistencia a impactos, rigidez, bajo costo, formabilidad, resistencia al ambiente, estabilidad dimensional	ABS, poliestireno, polipropileno, polietileno, acetato de celulosa, acrílicos
Baja fricción, baleros, resbalones	Bajo coeficiente de fricción; resistencia a la abrasión, calor, corrosión	Fluorocarbonos TFE, nylon, acetales
Componentes de alta resistencia, engranes, levas	Alta resistencia a la tensión y al impacto, estabilidad a altas temperaturas, maquinable	Nylon, fenólicos, acetales rellenos de TFE
Equipo químico y térmico	Resistencia química y térmica, buena resistencia, baja absorción de humedad	Fluorocarbonos, polipropileno, polietileno, epoxios, poliésteres, silicones
Partes electroestructurales	Resistencia eléctrica, resistencia al calor, alta resistencia a impactos, estabilidad dimensional, rigidez	A hilos, alquidos, aminos, epoxios, fenólicos, poliésteres, silicones
Componentes transmisores de luz	Buena transmisión de la luz en colores transparentes y translúcidos, formabilidad, resistencia a roturas	Acrílicos, poliestireno, acetato de celulosa, vinilos

Puede producirse una variedad casi ilimitada de materiales compuestos al combinarse distintos materiales de matrices con rellenos en formas diferentes y en orientaciones distintas. Algunos materiales típicos aparecen a continuación.

**Materiales de matrices.** Algunos de los materiales de matrices de uso más frecuente son:

- Polímeros termoplásticos: Polietileno, nylon, polipropileno, poliestireno, poliamidas
- Polímeros termoendurecibles: Poliéster, epoxio, polimida fenólica
- Cerámicas y vidrio
- Carbono y grafito
- Metales: Aluminio, magnesio, titanio

**Formas de los materiales de relleno.** A continuación se listan muchas formas de materiales de relleno.

- Cordones de fibras continuas compuestos de muchos filamentos individuales unidos entre sí
- Cordones cortos (de 0.75 a 50 mm o 0.03 a 2.00 plg)
- Cordones esparcidos al azar en forma de tapete
- Haces de cordones paralelos
- Material entretejido de cordones
- Filamentos o alambres metálicos
- Microesferas macizas o huecas

- Metal, vidrio u hojuelas de mica
- Granos de cristales de materiales como grafito, carburo de silicio y cobre

**Tipos de materiales de relleno.** Los rellenos, que también se conocen como fibras, vienen en muchos tipos, con base en sus materiales orgánicos e inorgánicos. Algunos de los rellenos más populares aparecen a continuación.

- Fibras de vidrio en cinco tipos distintos:
  - Fibra de vidrio A: Buena resistencia química que contiene álcalis como el óxido de sodio
  - Fibra de vidrio C: Fórmulas especiales para resistencia aún más alta que la fibra A
  - Fibra de vidrio E: Fibra de vidrio de amplio uso con buena capacidad de aislamiento eléctrico y buena resistencia
  - Fibra de vidrio S: De alta resistencia, se utiliza para altas temperaturas
  - Fibra de vidrio D: Mejores propiedades eléctricas que la fibra de vidrio E
- Fibras de cuarzo y fibras de vidrio con alto contenido de sílice: Buenas propiedades a altas temperaturas, hasta 1095 °C
- Fibras de carbón, hechas de carbono de base PAN (PAN significa poliacrilonitrilo): Con aproximación a un 95% de carbono con un elevado módulo de elasticidad
- Fibras de grafito: Con más de 99% de carbono y un módulo de elasticidad aún más elevado que el carbono. Son las fibras más rígidas que se utilizan típicamente en los materiales compuestos
- Boro recubierto en fibras de tungsteno: Buena resistencia y un mayor módulo de elasticidad en las fibras de vidrio
- El carburo de silicio recubierto en fibras de tungsteno: Resistencia y rigidez similares al boro/tungsteno, pero con capacidad para temperaturas más elevadas
- Fibras aramídicas: Un miembro de la familia poliamídica de los polímeros; mayor resistencia y rigidez, con mayor densidad en comparación con el vidrio muy flexible (las fibras aramídicas producidas por DuPont tienen la marca *Kevlar*)

**Ventajas de los materiales compuestos.** Es característico que los diseñadores busquen producir productos que sean seguros, fuertes, rígidos, ligeros y sumamente tolerantes al entorno en que opera el producto. Los materiales compuestos son excelentes para satisfacer estos objetivos cuando se comparan con materiales alternativos como metales, maderas y plásticos sin relleno. Dos parámetros que se utilizan para comparar materiales son: la *resistencia específica* y el *módulo específico*, definidos en la forma siguiente:

*La resistencia específica es la razón entre la resistencia a la tensión de un material y su peso específico.*

*El módulo específico es la razón entre el módulo de elasticidad de un material y su peso específico.*

Puesto que el módulo de elasticidad es una medida de la rigidez de un material, el módulo específico a veces se conoce como *rigidez específica*.

Aunque obviamente no se trata de una longitud, ambas magnitudes se miden en unidades de longitud, derivadas de la razón entre las unidades de resistencia o módulo de elasticidad y las unidades de peso específico. En el sistema estadounidense, las unidades

de resistencia a la tensión y de módulo de elasticidad son lb/plg<sup>2</sup>, mientras que el peso específico (peso por unidad de volumen) se da en lb/plg<sup>3</sup>. Por consiguiente, las unidades de la resistencia específica o módulo específico son pulgadas. En el sistema internacional de unidades o sistema métrico decimal, la resistencia y el módulo están expresados en N/m<sup>2</sup> (pascales) puesto que el peso específico está dado en N/m<sup>3</sup>. Por consiguiente, la unidad para resistencia específica o módulo específico es el metro.

En la tabla 2-6 aparecen comparaciones de la resistencia específica y la rigidez específica de materiales compuestos con ciertas aleaciones de acero, aluminio y titanio. La figura 2-11 muestra una comparación de estos materiales, utilizando gráficas de barras. La figura 2-12 es una gráfica de estos datos donde la resistencia específica está en el eje vertical y el módulo específico en el eje horizontal. Cuando el peso es crítico, el material ideal debe encontrarse en la parte derecha superior de esta gráfica. Nótese que los datos en estas gráficas y cifras son para materiales compuestos que tienen los materiales de relleno alineados en la dirección más favorable para soportar las cargas aplicadas.

Las ventajas de los materiales compuestos pueden resumirse de la forma siguiente:

1. Las resistencias específicas de los materiales compuestos pueden variar hasta en cinco veces respecto a las aleaciones de acero de alta resistencia.
2. Los valores de módulos específicos de los materiales compuestos pueden ser hasta de ocho veces los valores de las aleaciones de acero, de aluminio o de titanio.
3. Los materiales compuestos típicamente funcionan mejor que el acero o el aluminio en aplicaciones donde existen cargas cíclicas que producen el potencial de fractura por fatiga.
4. Donde se esperan cargas de impacto y vibraciones, los materiales compuestos pueden formularse de manera especial con materiales que proporcionen alta resistencia y un alto nivel de amortiguación.
5. Algunos materiales compuestos tienen mayor resistencia al desgaste que los metales.

TABLA 2-6 Comparación de resistencia específica y módulo específico de materiales seleccionados

Material	Resistencia a la tensión, $s_u$ (ksi)	Peso específico, $\gamma$ (lb/plg <sup>3</sup> )	Resistencia específica (plg)	Módulo específico (plg)
Acero ( $E = 30 \times 10^6$ psi)				
AISI 1020 HR	55	0.283	$0.194 \times 10^6$	$1.06 \times 10^6$
AISI 5160 OQT 700	263	0.283	$0.929 \times 10^6$	$1.06 \times 10^6$
Aluminio ( $E = 10 \times 10^6$ psi)				
6061-T6	45	0.98	$0.459 \times 10^6$	$1.02 \times 10^6$
7075-T6	83	0.101	$0.822 \times 10^6$	$0.99 \times 10^6$
Titanio ( $E = 16.5 \times 10^6$ psi)				
Ti-6Al-4V templado y envejecido a 538 °C	160	0.160	$1.00 \times 10^6$	$1.03 \times 10^6$
Material compuesto de vidrio/epoxio ( $E = 4.0 \times 10^6$ psi)				
contenido de fibra, 34%	114	0.061	$1.87 \times 10^6$	$0.66 \times 10^6$
Material compuesto de aramida/epoxio ( $E = 11.0 \times 10^6$ psi)				
contenido de fibra, 60%	200	0.050	$4.0 \times 10^6$	$2.20 \times 10^6$
Material compuesto de boro/epoxio ( $E = 30.0 \times 10^6$ psi)				
contenido de fibra, 60%	270	0.075	$3.60 \times 10^6$	$4.00 \times 10^6$
Material compuesto de grafito/epoxio ( $E = 19.7 \times 10^6$ psi)				
contenido de fibra, 62%	278	0.057	$4.86 \times 10^6$	$3.45 \times 10^6$
Material compuesto de grafito/epoxio ( $E = 48 \times 10^6$ psi)				
Módulo ultra alto	160	0.058	$2.76 \times 10^6$	$8.28 \times 10^6$

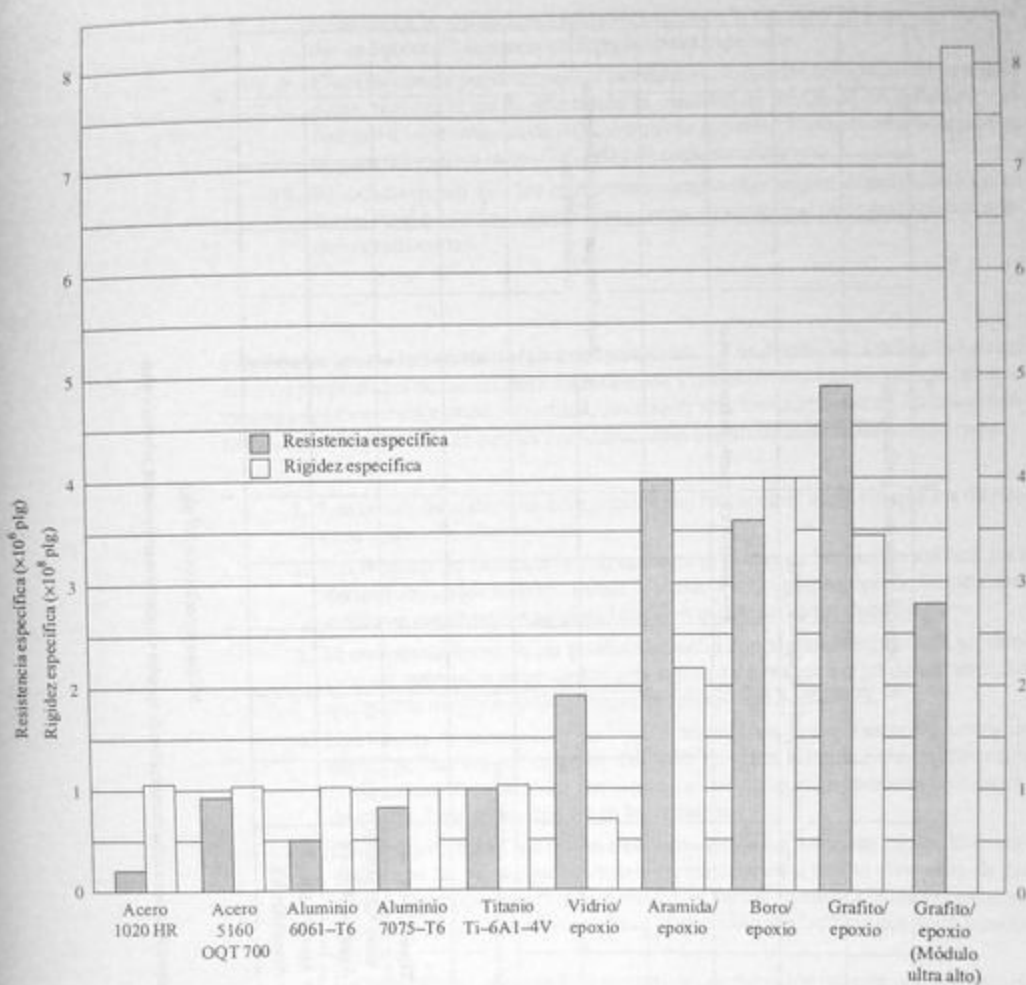


FIGURA 2-11 Comparación de resistencia específica y rigidez específica de materiales seleccionados.

6. Una cuidadosa selección de la matriz y el material de relleno pueden proporcionar una resistencia superior a la corrosión.
7. Los cambios dimensionales causados por cambios de temperaturas en general son menores en los materiales compuestos que en los metales. En el capítulo 4 se amplía más este tema, en donde la propiedad, *coeficiente de expansión térmica*, se define.
8. Debido a que los materiales compuestos tienen materiales que son altamente direccionales, los diseñadores pueden planificar la colocación de fibras de

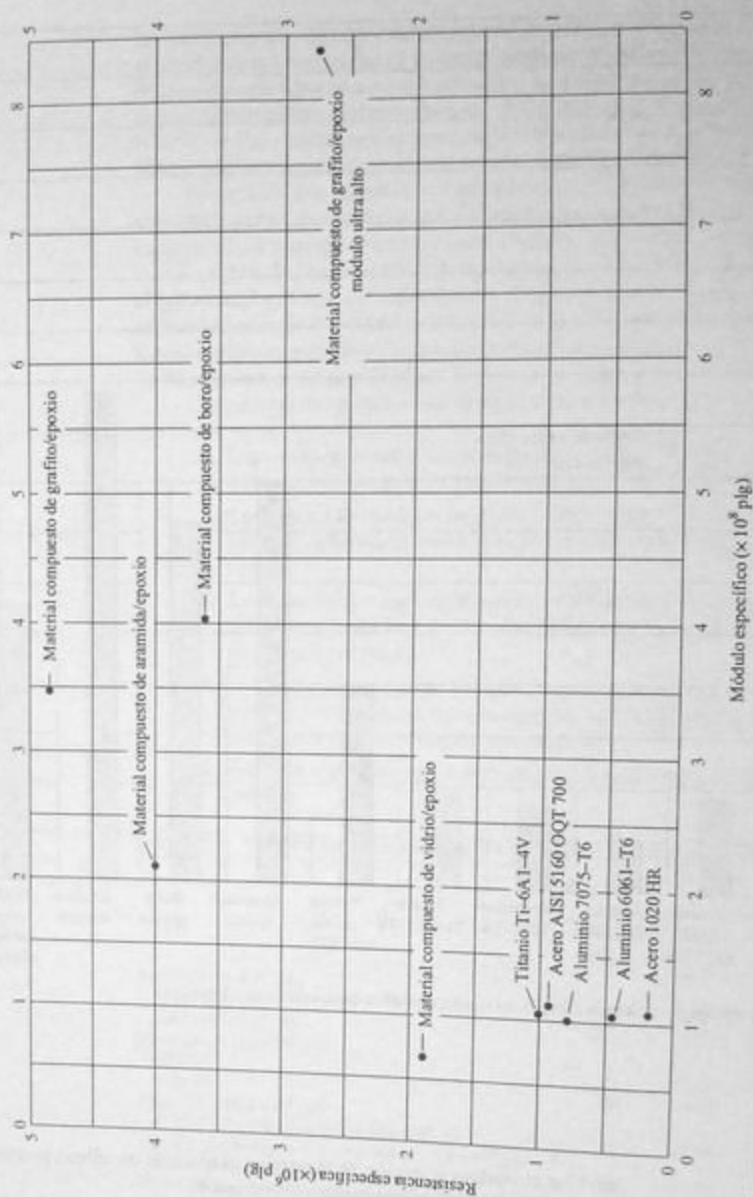


FIGURA 2-12 Resistencia específica contra módulo específico de metales y materiales compuestos seleccionados.

refuerzo en las direcciones que proporcionen la rigidez y resistencia requeridas en las condiciones específicas de carga esperadas.

9. Con frecuencia pueden hacerse estructuras de formas complejas de una sola pieza, reduciéndose de este modo la cantidad de piezas de un producto y el número de operaciones de sujeción que se requiere. La eliminación de juntas, en general, mejora la confiabilidad de estas estructuras.
10. Es característico que las estructuras compuestas salgan directamente en su forma final o casi final, por lo que se reduce la cantidad de operaciones secundarias requeridas.

**Limitaciones de los materiales compuestos.** Los diseñadores deben balancear muchas propiedades de materiales en sus diseños y considerar al mismo tiempo las operaciones de fabricación, costos, seguridad, duración y servicio del producto. En la siguiente lista se consignan las principales preocupaciones al utilizar materiales compuestos.

1. Los costos de materiales compuestos son en especial mayores que los de muchos materiales alternativos.
2. Las técnicas de fabricación son bastante distintas de las que se utilizan para darles forma a los metales. Puede requerirse un nuevo equipo de fabricación, junto con capacitación adicional para los operarios de producción.
3. El comportamiento de los productos hecho con algunas técnicas de producción de materiales compuestos está sujeto a un mayor rango de variabilidad que para la mayoría de las técnicas de fabricación de metales.
4. Los límites de temperatura de operación para los materiales compuestos de matriz polimérica son en general de 260 °C. [Pero los materiales compuestos con matrices de cerámica o metal pueden utilizarse a temperaturas más elevadas, como las que se alcanzan en los motores.]
5. Las propiedades de los materiales compuestos no son isotrópicas. Esto significa que las propiedades varían dramáticamente con la dirección de las cargas aplicadas. Los diseñadores deben tomar en cuenta estas variaciones para garantizar la seguridad y una operación satisfactoria con todo tipo de cargas.
6. En la actualidad, hay una falta general de comprensión del comportamiento de los materiales compuestos y los detalles de la predicción de modos de fractura. Aunque se han hecho grandes progresos en ciertas industrias, como la aeroespacial y de equipo recreativo, hay una necesidad de comprensión más general acerca del diseño con materiales compuestos.
7. El análisis de estructuras compuestas requiere un detallado conocimiento de más propiedades de materiales de lo que se requeriría para metales.
8. La inspección y las pruebas de las estructuras compuestas son, en general, más complicadas y menos precisas que las de estructuras metálicas. Es posible que se requieran técnicas especiales no destructivas para asegurar que no hay vacíos importantes en el producto final que pudieran debilitar seriamente la estructura. Puede requerirse una prueba de la estructura completa en lugar de probar una muestra del material, debido a la interacción de las distintas piezas entre sí y debido a la direccionalidad de las propiedades de los materiales.

9. La reparación y mantenimiento de las estructuras compuestas son una grave preocupación. Algunas de las técnicas iniciales de producción requieren condiciones especiales de temperatura y presión que difícilmente pueden reproducirse en el campo cuando se requiere la reparación de daños. La unión de una sección reparada a la estructura madre también puede ser difícil.

**Construcción de materiales compuestos laminados.** Muchas estructuras hechas de materiales compuestos están hechas de varias capas del material básico que contiene tanto la matriz como fibras de refuerzo. La forma en que las capas están orientadas, una en relación con la otra, afecta las propiedades finales de la estructura terminada.

Como ilustración, considérese que cada capa está hecha de un conjunto de fibras paralelas del material de relleno de refuerzo, tales como fibras de vidrio E, incrustadas en la matriz de resina, como es el poliéster. En esta forma, el material a veces se conoce como *preg* indicando que el relleno fue impregnado en la matriz antes de formar la estructura y curar el material ensamblado. Para producir rigidez y resistencia máximas en una dirección en particular, pueden aplicarse varias capas del *preg*, una sobre la otra, donde todas las fibras están alineadas en la dirección de la carga de tensión esperada. Esto se conoce como *laminado unidireccional*. Después de curado, el laminado podría tener una alta rigidez y resistencia al cargarse en la dirección de las fibras, llamada *dirección longitudinal*. Sin embargo, el producto resultante podría tener una baja resistencia y rigidez en la dirección perpendicular a la dirección de las fibras, y que se conoce como *dirección transversal*. Si aparece una carga fuera de eje, la parte puede fracturarse o deformarse de manera significativa. La tabla 2-7 proporciona datos de muestra para el material compuesto unidireccional laminado de carbono/epoxio.

Para superar la falta de resistencia y rigidez descentrada, las estructuras laminadas deben hacerse con una variedad de orientaciones en sus capas. Una disposición muy popular aparece en la figura 2-13. Si se nombra la dirección longitudinal de la capa de la superficie como capa de  $0^\circ$  de inclinación, esta estructura se refiere como:

$$0^\circ, 90^\circ, +45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, +45^\circ, 90^\circ, 0^\circ$$

La simetría y balance de este tipo de técnica de capas resulta en propiedades casi uniformes en dos direcciones. A veces se utiliza el término *cuasi-isotrópico* para describir una estructura de esta naturaleza. Nótese que las propiedades perpendiculares a las caras de la estructura en capas (a través del grosor) siguen siendo muy bajas, debido a que las fibras no se extienden en esa dirección. Además, la rigidez y resistencia en las direcciones primarias son ligeramente menores que si las capas estuvieran alineadas en la misma dirección. En la tabla 2-7 aparecen datos de un laminado cuasi-

TABLA 2-7 Ejemplos del efecto de la construcción laminada en la resistencia y rigidez

Tipo de laminado	Resistencia a la tensión				Módulo de elasticidad			
	Longitudinal		Transversal		Longitudinal		Transversal	
	ksi	MPa	ksi	MPa	$10^6$ psi	GPa	$10^6$ psi	GPa
Unidireccional	200	1380	5	34	21	145	1.6	11
Cuasi-isotrópico	80	552	80	552	8	55	8	55



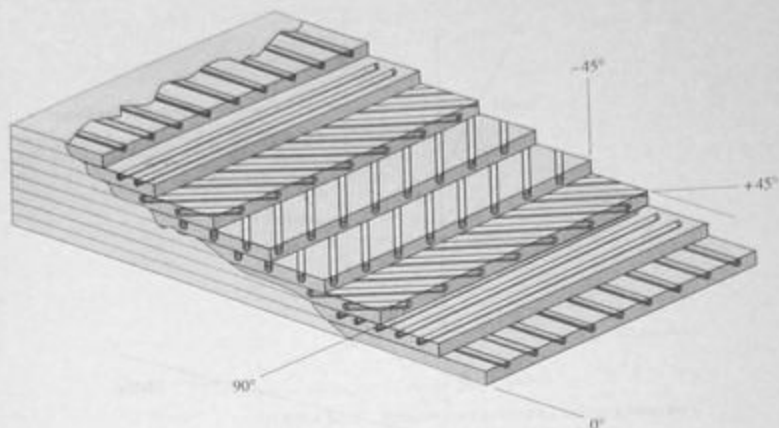


FIGURA 2-13 · Construcción de un material compuesto laminado en capas múltiples, diseñado para producir propiedades cuasi-isotrópicas.

si-isotrópico, comparados con uno que dispone de fibras unidireccionales en la misma matriz.

**Predicción de propiedades de materiales compuestos.** La siguiente discusión resume algunas de las variables más necesarias para definir las propiedades de un material compuesto. El subíndice  $c$  se refiere al material compuesto,  $m$  se refiere a la matriz y  $f$  a las fibras. La resistencia y rigidez de un material compuesto depende de las propiedades elásticas de la fibra y la matriz. Pero otro parámetro es el volumen relativo del material compuesto hecho de fibras,  $V_f$ , y aquel del compuesto del material de matriz  $V_m$ . Es decir:

$V_f$  = Fracción de volumen de la fibra en el compuesto

$V_m$  = Fracción de volumen de la matriz en el material compuesto

Nótese que para un volumen unitario,  $V_f + V_m = 1$ . Entonces,  $V_m = 1 - V_f$ .

Utilizaremos un caso ideal para ilustrar la forma en que puede predecirse la rigidez y resistencia de un material compuesto. Considérese un material compuesto con fibras continuas unidireccionales, alineadas en la dirección de la carga aplicada. Las fibras son típicamente más fuertes y rígidas que el material de la matriz. Además, la matriz puede sufrir una mayor deformación antes de la fractura que las fibras. La figura 2-14 muestra estos fenómenos en una gráfica de esfuerzo contra deformación para las fibras y la matriz. Utilizaremos la siguiente notación para los parámetros más importantes de la figura 2-14:

$s_{sf}$  = Resistencia última de la fibra

$\epsilon_{sf}$  = Deformación en la fibra correspondiente a su resistencia última

$\sigma'_m$  = Esfuerzo en la matriz a la misma deformación que  $\epsilon_{sf}$

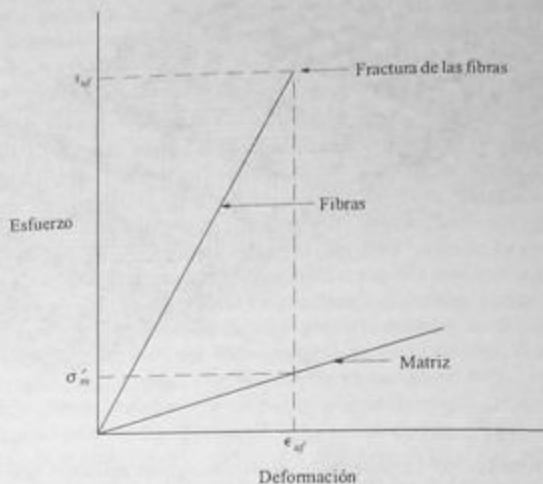


FIGURA 2-14 Esfuerzo contra deformación de materiales de fibra y matriz.

La resistencia última del compuesto,  $s_{uc}$ , está en un valor intermedio entre  $s_{sf}$  y  $\sigma'_m$ , dependiendo de la fracción de volumen de la fibra y la matriz en el compuesto, es decir:

$$s_{uc} = s_{sf} V_f + \sigma'_m V_m \quad (2-5)$$

A cualquier nivel inferior de esfuerzo, la relación entre el esfuerzo general en el material compuesto, el esfuerzo en las fibras, y el esfuerzo en la matriz, sigue un patrón similar:

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \quad (2-6)$$

La figura 2-15 ilustra esta relación en un diagrama esfuerzo-deformación.

Ambos miembros de la ecuación (2-6) pueden dividirse entre la deformación a la que ocurren estos esfuerzos. Y, puesto que para cada material,  $\sigma/\epsilon = E$ , puede demostrarse que el módulo de elasticidad para los materiales compuesto es:

$$E_c = E_f V_f + E_m V_m \quad (2-7)$$

La densidad de un material compuesto puede calcularse de forma similar.

$$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m \quad (2-8)$$

La densidad se define como *masa por unidad de volumen*. Una propiedad relacionada, el peso específico, se define como *peso por unidad de volumen* y se denota por el símbolo  $\gamma$  (letra griega gamma). La relación entre densidad y peso específico es simplemente  $\gamma = \rho g$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. Al multiplicar cada miembro

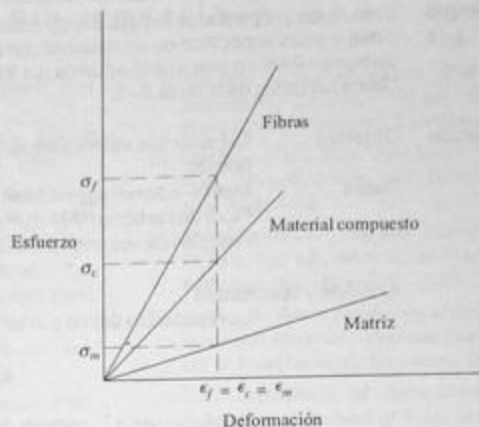


FIGURA 2-15 Relación entre esfuerzos y deformaciones para un material compuesto y sus materiales de fibra y matriz.

en la ecuación 2-8 por  $g$ , se obtiene la fórmula para el peso específico de un material compuesto:

$$\gamma_c = \gamma_f V_f + \gamma_m V_m \quad (2-9)$$

La forma de las ecuaciones (2-6), (2-7), (2-8) y (2-9), con frecuencia se conoce como *regla de mezclas*.

La tabla 2-8 es una lista de ejemplos de valores de las propiedades de algunos materiales de matriz y de relleno. Recuérdese que pueden ocurrir amplias variaciones en estas propiedades, según la formulación exacta y la condición de los materiales.

TABLA 2-8 Ejemplos de propiedades de materiales de matriz y de relleno

	Resistencia a la tensión		Módulo de tensión		Peso específico	
	ksi	MPa	$10^6$ psi	GPa	lb/plg <sup>3</sup>	kN/m <sup>3</sup>
<b>Materiales para matrices:</b>						
Poliéster	10	69	0.40	2.76	0.047	12.7
Epoxio	18	124	0.56	3.86	0.047	12.7
Aluminio	45	310	10.0	69	0.100	27.1
Titanio	170	1170	16.5	114	0.160	43.4
<b>Materiales de relleno:</b>						
Vidrios	600	4140	12.5	86.2	0.09	24.4
Carbono-PAN	470	3240	33.5	231	0.064	17.4
Carbono-PAN (alta resistencia)	820	5650	40	276	0.065	17.7
Carbono (módulo alto)	325	2200	100	690	0.078	21.2
Aramida	500	3450	19.0	131	0.052	14.1

**Ejemplo 2-1** Calcule las propiedades esperadas de resistencia a la tensión última, módulo de elasticidad y peso específico de un material compuesto hecho de fibras unidireccionales de carbono-PAN en una matriz epóxica. La fracción de volumen de las fibras es de 30%. Utilice los datos de la tabla 2-8.

**Solución** **Objetivo** Calcular los valores esperados de  $s_{uc}$ ,  $E_c$  y  $\gamma_c$  para el material compuesto.  
**Datos** Matriz-epoxio:  $s_{um} = 18$  ksi;  $E_m = 0.56 \times 10^6$  psi;  $\gamma_m = 0.047$  lb/plg<sup>3</sup>  
 Fibra de carbono PAN:  $s_{uf} = 470$  ksi;  $E_f = 33.5 \times 10^6$  psi;  $\gamma_f = 0.064$  lb/plg<sup>3</sup>  
 Fracción de volumen de la fibra,  $V_f = 0.30$ . Y,  $V_m = 1.0 - 0.30 = 0.70$ .

#### Análisis y resultados

La resistencia última a la tensión,  $s_{uc}$ , calculada con la ecuación (2-5):

$$s_{uc} = s_{uf} V_f + \sigma'_m V_m$$

Para obtener  $\sigma'_m$  primero debemos obtener la deformación a la que se fracturarían las fibras a  $s_{uf}$ . Supongamos que las fibras son linealmente elásticas a la fractura. Entonces:

$$\epsilon_f = s_{uf} / E_f = (470 \times 10^3 \text{ psi}) / (33.5 \times 10^6 \text{ psi}) = 0.014$$

A esta misma deformación, el esfuerzo en la matriz es:

$$\sigma'_m = E_m \epsilon = (0.56 \times 10^6 \text{ psi})(0.014) = 7840 \text{ psi}$$

Luego, en la ecuación (2-5):

$$s_{uc} = (470\,000 \text{ psi})(0.30) + (7840 \text{ psi})(0.70) = 146\,500 \text{ psi}$$

El módulo de elasticidad calculado con la ecuación (2-7):

$$E_c = E_f V_f + E_m V_m = (33.5 \times 10^6)(0.30) + (0.56 \times 10^6)(0.70)$$

$$E_c = 10.4 \times 10^6 \text{ psi}$$

El peso específico calculado con la ecuación (2-9):

$$\gamma_c = \gamma_f V_f + \gamma_m V_m = (0.064)(0.30) + (0.047)(0.70) = 0.052 \text{ lb/plg}^3$$

#### Resumen de los resultados

$$s_{uc} = 146\,500 \text{ psi}$$

$$E_c = 10.4 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\gamma_c = 0.052 \text{ lb/plg}^3$$

**Comentario.** Nótese que los valores de las propiedades resultantes para el material compuesto son valores intermedios entre los de las fibras y los de la matriz.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Aluminum Association, *Aluminum Standards and Data*, 11th ed., Washington, DC, 1993.
2. American Society for Testing and Materials, *Annual Book of Standards*, 1994, Philadelphia, PA, 1994.
3. ASM INTERNATIONAL, *Composites, Engineered Materials Handbook, Volume 1*, Metals Park, OH, 1987.
4. ASM INTERNATIONAL, *Engineering Plastics, Engineered Materials Handbook, Volume 2*, Metals Park, OH, 1988.
5. ASM INTERNATIONAL, *Metals Handbook, Volumes 1-17*, 9th ed., Metals Park, OH, 1990.
6. Avallone, Eugene A., and Theodore Baumeister III, eds., *Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers*, 9th ed., McGraw-Hill, New York, 1987.
7. Berins, Michael L., ed., *Plastics Engineering Handbook of the Society of the Plastics Industry, Inc.*, 5th ed., Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.
8. *Design Guide for Advanced Composites Applications*, Advanstar Communications, Inc., Duluth, MN, 1993.
9. *Machine Design Magazine, 1994 Basics of Design Engineering Reference Volume, Materials Selection*, Penton Publishing, Inc., Cleveland, OH, 1994.
10. Mallick, P. K., *Fiber-Reinforced Composites: Materials, Manufacturing, and Design*, Marcel Dekker, New York, 1988.
11. Mott, Robert L., *Machine Elements in Mechanical Design*, 2nd ed., Merrill, an imprint of Macmillan Publishing Co., New York, 1992.
12. Strong, A. Brent, *Fundamentals of Composites Manufacturing: Materials, Methods, and Applications*, Society of Manufacturing Engineers, Dearborn, MI, 1989.
13. U.S. Department of Agriculture Forest Products Laboratory, *Handbook of Wood and Wood-Based Materials for Engineers, Architects, and Builders*, Hemisphere Publishing Corp., New York, 1989.
14. Weeton, John W., Dean M. Peters, and Karyn L. Thomas, eds., *Engineers' Guide to Composite Materials*, ASM INTERNATIONAL, Metals Park, OH, 1987.

## PROBLEMAS

- 2-1. Nombre cuatro tipos de metales que comúnmente se usan para miembros de carga.
- 2-2. Nombre 11 factores que deben considerarse al seleccionar un material para un producto.
- 2-3. Defina *resistencia última a la tensión*.
- 2-4. Defina *punto de cedencia*.
- 2-5. Defina *resistencia a la cedencia*.
- 2-6. ¿Cuándo se utiliza la resistencia a la cedencia en vez de punto de cedencia?
- 2-7. Defina *rigidez*.
- 2-8. ¿Qué propiedad de un material mide su rigidez?
- 2-9. Enuncie la ley de Hooke.
- 2-10. ¿Qué propiedad de un material mide su ductilidad?
- 2-11. ¿Cuándo se clasifica un material como dúctil o frágil?
- 2-12. Nombre cuatro tipos de acero.
- 2-13. ¿Qué significa la designación AISI 4130 para un acero?
- 2-14. ¿Cuáles son la resistencia última, la resistencia a la cedencia y el porcentaje de alargamiento de un acero AISI 1040 laminado en caliente? ¿Se trata de un material dúctil o quebradizo?
- 2-15. ¿Cuál tiene una mayor ductilidad, el acero AISI 1040 laminado en caliente o el AISI 1020 laminado en caliente?
- 2-16. ¿Qué significa la designación AISI 1141 OQT 700?
- 2-17.I Si la resistencia a la cedencia requerida de un acero es de 150 ksi, ¿podría utilizarse el AISI 1141? ¿Por qué?
- 2-18.M ¿Cuál es el módulo de elasticidad del acero AISI 1141? ¿Del AISI 5160?
- 2-19.I Una barra rectangular de acero mide 1.0 plg por 4.0 plg por 14.5 plg. ¿Cuál es su peso en libras?
- 2-20.M Una barra circular mide 50 mm de diámetro y 250 mm de longitud. ¿Cuánto pesa en newtons?
- 2-21.M Si se aplica una fuerza de 400 N a una barra de titanio y a una barra idéntica de magnesio ¿cuál se alargaría más?

- 2-22. Mencione cuatro tipos de aceros estructurales y dé el punto de cedencia de cada uno.
- 2-23. ¿Qué significa la designación 6061-T6 para una aleación de aluminio?
- 2-24.I Haga una lista de la resistencia última, resistencia elástica, módulo de elasticidad de los aluminios, 6061-O, 6061-T4 y 6061-T6.
- 2-25. Haga una lista de cinco usos para el bronce.
- 2-26. Haga una lista de tres características deseables del titanio en comparación con el aluminio y el acero.
- 2-27. Nombre cinco variedades de hierro fundido.
- 2-28. ¿Qué tipo de hierro fundido se considera generalmente como quebradizo?
- 2-29.I ¿Cuáles son las resistencias últimas a tensión y a compresión del hierro fundido ASTM A48 grado 40?
- 2-30. ¿Cuáles son las diferencias entre el hierro dúctil y el hierro gris?
- 2-31.I Haga una lista de los esfuerzos permisibles a flexión, tensión, compresión y a cortante de la madera de abeto Douglas grado 2.
- 2-32.I ¿Cuál es el rango normal de resistencias a la compresión del concreto?
- 2-33. Describa la diferencia entre materiales termoplásticos y termoendurecibles.
- 2-34. Nombre tres plásticos adecuados para utilizarse en la fabricación de engranes o levas en dispositivos mecánicos.
- 2-35. Describa el término *compuesto*.
- 2-36. Nombre cinco tipos básicos de materiales que se utilizan como matriz de materiales compuestos.
- 2-37. Nombre cinco termoplásticos distintos que se utilizan como matrices de materiales compuestos.
- 2-38. Nombre tres plásticos termoendurecibles distintos que se utilizan como matrices de materiales compuestos.
- 2-39. Nombre tres metales utilizados como matriz de materiales compuestos.
- 2-40. Describa nueve formas que pueden adoptar los materiales de relleno al utilizarse en materiales compuestos.
- 2-41. Discuta las diferencias entre *hebras, fibras y tejidos* como formas distintas de rellenos para materiales compuestos.
- 2-42. Nombre siete tipos de materiales de relleno utilizados para materiales compuestos.
- 2-43. Nombre cinco tipos distintos de rellenos de fibra de vidrio utilizados para materiales compuestos y describa las principales características de cada uno.
- 2-44. ¿Cuál de los materiales de relleno más comunes tiene la mayor rigidez?
- 2-45. ¿Qué materiales de relleno deben considerarse para aplicaciones a alta temperatura?
- 2-46. ¿Cuál es una marca comercial común de las fibras aramídicas?
- 2-47. Defina la *resistencia específica* de un material compuesto.
- 2-48. Defina el *módulo específico* de un material compuesto.
- 2-49. Haga una lista de diez ventajas de los materiales compuestos al compararlos con los metales.
- 2-50. Haga una lista de nueve limitaciones de los materiales compuestos.
- 2-51. Con los datos de materiales seleccionados en la tabla 2-6, haga una lista de diez materiales, en orden decreciente de resistencia específica. Para cada uno calcule la razón de su resistencia específica y la del acero AISI 1020 HR.
- 2-52. Con los datos de materiales seleccionados en la tabla 2-6, haga una lista de los diez materiales en orden decreciente de módulos específicos. Para cada uno, calcule la razón de su módulo específico y el acero AISI 1020 HR.
- 2-53. Describa un laminado unidireccional y sus características generales de resistencia y rigidez.
- 2-54. Describa un laminado cuasi-isotrópico, y sus características generales de resistencia y rigidez.
- 2-55. Compare la resistencia específica y características de rigidez que por lo general se esperan de un laminado cuasi-isotrópico con un laminado unidireccional.
- 2-56. Describa un compuesto laminado cuya designación sea  $0^\circ, +45^\circ, -45^\circ, +45^\circ, 0^\circ$ .
- 2-57. Describa un compuesto laminado cuya designación sea  $0^\circ, +30^\circ, +45^\circ, +45^\circ, +30^\circ, 0^\circ$ .
- 2-58. Defina el término *fracción de volumen de fibras* para un compuesto.
- 2-59. Defina el término *fracción de volumen de matriz* para un material compuesto.
- 2-60. Si un compuesto tiene una fracción de volumen de fibras de 0.60, ¿cuál es la fracción de volumen de la matriz?
- 2-61. Escriba la ecuación para la resistencia última esperada de un material compuesto en función de las propiedades de sus materiales de matriz y de relleno.
- 2-62. Escriba las ecuaciones para la *regla de mezclas* tal como se aplica a un material compuesto unidireccional para el esfuerzo en el compuesto, su módulo de elasticidad, su densidad y su peso específico.

2-63.M Calcule las propiedades de resistencia última, módulo de elasticidad y peso específico que se esperan de un material compuesto hecho de hebras unidireccionales de fibras de carbono-PAN de alta resistencia en una matriz epóxica. La fracción de volumen de las fibras es del 50%. Calcule la resis-

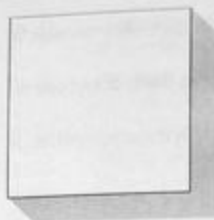
tencia y la rigidez específicas. Utilice datos de la tabla 2-8.

- 2-64.M** Repita el problema 2-63 con fibras de carbono de módulo elevado.
- 2-65.M** Repita el problema 2-63 con fibras aramídicas.



- 2-43.M Calcule las propiedades de resistencia última, módulo de elasticidad y peso específico que se esperan de un material compuesto hecho de fibras tensioresistentes de fibra de carbono PAN de alta resistencia en una matriz epoxídica. La fracción de volumen de las fibras es del 50%. Calcule la masa
- masa y la rigidez específicas. Utilice datos de la tabla 2-8.
- 2-44.M Repita el problema 2-43 con fibra de carbono de módulo elevado.
- 2-45.M Repita el problema 2-43 con fibra aramídica.

## Cálculo de las propiedades de resistencia y peso específico de un material compuesto



# 3

## Diseño de elementos estructurales sometidos a esfuerzo directo

### 3-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En el capítulo 1 se presentó el concepto de esfuerzo directo junto con ejemplos de cálculos de esfuerzo de tensión directo, esfuerzo de compresión directo, esfuerzo cortante directo y esfuerzo de apoyo. Se enfatizó la comprensión de los fenómenos, unidades y terminologías básicas, y la magnitud de los esfuerzos que aparecen en aplicaciones estructurales y mecánicas típicas. Nada se mencionó acerca de la aceptabilidad de los niveles de esfuerzo que se calcularon ni acerca del diseño de miembros que deben soportar una carga dada.

En este capítulo pondremos énfasis en el *diseño*, pues usted, lector, como diseñador, deberá tomar decisiones en cuanto a si determinado diseño propuesto es satisfactorio, cuál es la forma y tamaño de la sección transversal de un miembro que soporta carga y de qué material debe estar hecho este miembro.

Después de terminar el estudio de este capítulo, el lector será capaz de:

1. Describir las condiciones que deben satisfacerse para aplicar de manera adecuada las fórmulas de esfuerzo directo.
2. Definir el *esfuerzo de diseño* y saber cómo determinar un valor aceptable para éste.
3. Definir el *factor de diseño* y seleccionar valores convenientes para éste según las condiciones presentes en un diseño en particular.
4. Discutir la relación entre los términos *esfuerzo de diseño*, *esfuerzo permisible* y *esfuerzo de trabajo*.

5. Discutir la relación entre los términos *factor de diseño*, *factor de seguridad* y *margen de seguridad*.
6. Describir los 11 factores que afectan la especificación del factor de diseño.
7. Describir diversos tipos de cargas experimentadas por estructuras o miembros de máquinas, en las que se incluya carga estática, carga repetida, impacto y golpe.
8. Diseñar miembros sujetos a esfuerzos de tensión directos, esfuerzos de compresión directos, esfuerzo cortante directo y esfuerzo de apoyo.
9. Determinar cuándo existen concentraciones de esfuerzo y especificar valores convenientes para factores de concentración de esfuerzo.
10. Utilizar factores de concentración de esfuerzo en el diseño.

### 3-2 DISEÑO DE MIEMBROS BAJO TENSIÓN O COMPRESIÓN DIRECTA

En el capítulo 1 se desarrolló la fórmula para el esfuerzo directo y se formuló de la manera siguiente:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (3-1)$$

en donde  $\sigma$  = esfuerzo normal directo: tensión o compresión

$F$  = directa

$A$  = área de la sección transversal de un miembro sometido a  $F$

Para que la ecuación 3-1 sea válida deben satisfacerse las siguientes condiciones:

1. El miembro con carga debe ser recto.
2. El miembro con carga debe tener una sección transversal uniforme a lo largo en toda la longitud que se considera.
3. El material del que está hecho el miembro debe ser homogéneo.
4. La carga debe aplicarse a lo largo del eje centroidal del miembro de modo que no haya tendencia a que éste se flexione.
5. Los miembros a compresión deben ser cortos para que no se pandeen (véase el capítulo 14 para el análisis especial que se requiere para miembros largos y esbeltos sometidos a esfuerzos de compresión, y para el método que se utiliza para decidir cuándo debe un miembro considerarse largo o corto).

Es importante observar que el concepto de esfuerzo se refiere a la resistencia interna opuesta por un *área unitaria*, es decir, un área infinitamente pequeña. Consideramos al esfuerzo como si actuara sobre un punto y, en general, puede variar de punto a punto en un cuerpo en particular. La ecuación 3-1 indica que para un miembro sometido a tensión o compresión axial directa, el esfuerzo es uniforme a través de toda el área si se satisfacen las cinco condiciones. En muchas aplicaciones prácticas, las variaciones menores que pueden ocurrir en los niveles locales de esfuerzo se toman en cuenta al seleccionar con cuidado el esfuerzo permisible, como se discutirá más adelante.

### 3-3 ESFUERZOS NORMALES DE DISEÑO

Un miembro de carga falla cuando se rompe o deforma en exceso, lo que hace que éste sea inaceptable para el uso que se pretende. Por consiguiente, es esencial que el nivel de esfuerzo que se aplica nunca exceda a la resistencia a la tensión última o a la resistencia a la cedencia del material. En capítulos posteriores se discutirá la de formación excesiva a la cedencia.

*El esfuerzo de diseño es aquel nivel de esfuerzo que puede desarrollarse en un material, al tiempo que se asegura que el miembro que soporta la carga sea seguro.*

Para calcular el esfuerzo de diseño, deben especificarse dos factores: el *factor de diseño*  $N$  y la *propiedad del material en la que se basará el diseño*. Por lo general, en el caso de metales, el esfuerzo de diseño se basa en la resistencia a la cedencia  $s_y$  o en la resistencia última  $s_u$  del material.

*El factor de diseño  $N$  es el número entre el que se divide la resistencia registrada del material para obtener el esfuerzo de diseño  $\sigma_d$ .*

Pueden utilizarse las siguientes ecuaciones para calcular el esfuerzo de diseño para un cierto valor de  $N$ :



**Esfuerzo de diseño**

$$\sigma_d = \frac{s_y}{N} \quad \text{basado en la resistencia a la cedencia} \quad (3-2)$$

o:

$$\sigma_d = \frac{s_u}{N} \quad \text{basado en la resistencia última} \quad (3-3)$$

Normalmente el diseñador es quien determina, por medio de su criterio y experiencia, el valor del factor de diseño. En algunos casos, son los códigos, normas o políticas de la compañía los que especifican los factores de diseño o los esfuerzos de diseño que se utilizarán. Cuando es el diseñador quien debe determinar el factor de diseño, su juicio debe basarse en una comprensión de cómo pueden fracturarse las partes, y los factores que afectan el factor de diseño. Las secciones 3-4, 3-5 y 3-6 dan información adicional acerca del factor de diseño y acerca de la elección de métodos para calcular los esfuerzos de diseño.

Otras referencias utilizan el término *factor de seguridad* en lugar de *factor de diseño*. Además, puede utilizarse *esfuerzo permisible* o *esfuerzo de trabajo* en lugar de *esfuerzo de diseño*. La elección de los términos que se utilizan en este texto se hizo para enfatizar el papel del diseñador al especificar el esfuerzo de diseño.

En teoría, un material puede someterse a un esfuerzo de hasta  $s_y$ , antes de que ceda. Esta condición corresponde a un valor del factor de diseño de  $N = 1$  en la ecuación 3-2. Asimismo, con un factor de diseño de  $N = 1$  en la ecuación 3-3, el material estaría a punto de una fractura definitiva. Por consiguiente,  $N = 1$  es el valor mínimo que podemos considerar.

Un enfoque distinto para evaluar la aceptabilidad de un diseño dado, y que se utiliza de manera especial en la industria aeroespacial, es el *margen de seguridad*, y se define de la forma siguiente:



**Margen de seguridad**

$$\text{margen de seguridad} = \frac{\text{resistencia a la cedencia}}{\text{esfuerzo máximo}} - 1.0 \quad (3-4)$$

cuando el diseño se basa en la cedencia del material. Cuando se basa en la resistencia última, el margen de seguridad es:

$$\text{margen de seguridad} = \frac{\text{resistencia última}}{\text{esfuerzo máximo}} - 1.0 \quad (3-5)$$

Entonces, el mínimo margen de seguridad factible es 0.0.

En este libro se utilizarán los conceptos de esfuerzo de diseño y factores de diseño en contraposición con margen de seguridad.

### 3-4 FACTOR DE DISEÑO

En la especificación del factor de diseño intervienen muchos aspectos distintos del problema de diseño. En algunos casos se desconocen las condiciones precisas de servicio. El diseñador debe entonces hacer estimaciones conservadoras de las condiciones, es decir, estimaciones que hagan que el diseño resultante quede del lado seguro cuando se consideren todas las variaciones posibles. La elección final de un factor de diseño depende de las 11 condiciones siguientes:

**Códigos y normas.** Si el miembro que se diseña cae bajo la jurisdicción de un código o norma existente, es obvio que debe elegirse un factor de diseño o esfuerzo de diseño que satisfaga este código o norma. Algunos ejemplos de instituciones que imponen normas son:

American Institute of Steel Construction (AISC) (Instituto Estadounidense de la Construcción con Acero): edificios, puentes y estructuras similares que utilizan acero.

Aluminum Association (AA) (Asociación del Aluminio): edificios, puentes y estructuras similares que utilizan aluminio.

American Society of Mechanical Engineers (ASME) (Sociedad Estadounidense de Ingenieros Mecánicos): calentadores, recipientes a presión y flechas.

Reglamentos estatales de construcción: edificios, puentes y estructuras similares que afectan la seguridad pública.

Departamento de Defensa de Estados Unidos; Normas Militares: estructuras de vehículos aeroespaciales y otros productos de uso militar.

American National Standards Institute (ANSI) (Instituto Nacional Estadounidense de Normas): una gran variedad de productos.

American Gear Manufacturers Association (AGMA) (Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranajes): engranes y sistemas de engranes.

Es responsabilidad del diseñador determinar qué normas o reglamentos, de haberlos, se aplican al miembro que se diseña, y asegurar que el diseño satisfaga estas normas.

**Criterio de la resistencia del material.** La mayoría de los diseños que utilizan metales se basan en la resistencia a la cedencia, la resistencia última, o ambas, como ya se explicó. Esto se debe a que la mayoría de las teorías de la fractura de los metales muestran una estrecha relación entre el esfuerzo durante la falla y las propiedades de estos materiales. Además, estas propiedades casi siempre se reportan para materiales que se utilizan en diseño de ingeniería. El valor del factor de diseño será distinto, según la resistencia del material que se utilice como criterio para el diseño, como se demostrará más adelante.

**Tipo de material.** Una consideración importante respecto al tipo de material es su ductilidad. Los modos de fractura de materiales quebradizos son muy distintos a los de materiales dúctiles. Puesto que los materiales quebradizos como el hierro colado no presentan cedencia, los diseños se basan siempre en la resistencia última. Por lo general se considera que un metal es quebradizo si su porcentaje de alargamiento en una longitud de calibración de 2 plg es menor al 5%. Excepto para aleaciones altamente endurecidas, de hecho todos los aceros son dúctiles. El aluminio es dúctil, excepto en el caso de fundiciones. Otros factores en relación con el material que pueden afectar la resistencia de una pieza son su uniformidad y la confianza en las propiedades establecidas.

**Forma de carga.** Pueden identificarse tres tipos principales de carga. Una *carga estática* es aquella que se aplica lenta y gradualmente a una pieza y que permanece aplicada o, por lo menos, se aplica y elimina con poca frecuencia durante la vida diseñada de la pieza. Las *cargas repetidas* son aquellas que se aplican y retiran varios miles de veces durante la vida diseñada de la pieza. Bajo cargas repetidas, una pieza se fractura por el mecanismo de fatiga a un nivel de esfuerzo mucho menor que el que podría causar fractura bajo una carga estática. Esto requiere el uso de un factor de diseño más elevado para cargas repetidas que para cargas estáticas. Las piezas sujetas a *impacto* o *golpe* requieren el uso de un factor de diseño muy elevado por dos razones. Primero, una carga que se aplica de repente causa esfuerzos en la pieza que son varias veces mayores que aquellos que podrían calcularse mediante fórmulas convencionales. Segundo, bajo carga de impacto, se requiere que el material de la pieza absorba energía del cuerpo de impacto. También debe considerarse la certidumbre con la que el diseñador conoce la magnitud de las cargas esperadas al especificar el factor de diseño.

**Posible mal uso de la pieza.** En la mayoría de los casos, el diseñador no tiene control sobre las condiciones reales de uso del producto que diseña. Legalmente, es responsabilidad del diseñador considerar cualquier uso o *mal uso* del producto razonablemente predecible, y garantizar la seguridad del producto. Debe considerarse la posibilidad de una sobrecarga accidental sobre cualquier pieza de un producto.

**Complejidad del análisis de esfuerzo.** Conforme se hace más compleja la forma de carga o la geometría de una estructura o una pieza, el diseñador tiene menos posibilidades de realizar un análisis preciso de las condiciones de esfuerzo. Por consiguiente, la confianza en los resultados de los cálculos del análisis de esfuerzo afectan la elección de un factor de diseño.

**Medio ambiente.** Los materiales se comportan de forma diferente en distintas condiciones del medio ambiente. Deben considerarse los efectos de la temperatura, humedad, radiación, clima, luz solar y atmósferas corrosivas sobre el material durante la vida de diseño de la pieza.

**Efecto del tamaño, al que a veces se le llama efecto de masa.** Los metales presentan distintas resistencias conforme varía el área de la sección transversal de una pieza. La mayoría de los datos de propiedades de los materiales se obtienen utilizando muestras estándar aproximadamente de 12.5 mm de diámetro. Las piezas con secciones más grandes por lo general tienen resistencias menores. Piezas de tamaños más reducidos, como por ejemplo alambre estirado, tienen resistencias mucho más elevadas. En la tabla 3-1 se muestra un ejemplo del efecto de tamaño.

**Control de calidad.** Cuanto más cuidadoso y completo sea un programa de control de calidad, mejor sabe el diseñador la forma en que funcionará un producto al estar en servicio. Con un deficiente control de calidad, debe utilizarse un factor de diseño más elevado.

**TABLA 3-1** Efecto del tamaño en el acero AISI 4140 OQT 1100

Tamaño de la probeta		Resistencia a la tensión		Resistencia a la cedencia		Porcentaje de alargamiento en 2 plg
plg	mm	ksi	MPa	ksi	MPa	
0.50	12.5	158	1089	149	1027	18
1.00	25.4	140	965	135	931	20
2.00	50.8	128	883	103	710	22
4.00	101.6	117	807	87	600	22

**Riesgos que se presentan por una falla.** El diseñador debe considerar las consecuencias de una falla en una pieza en particular. ¿Podría ocurrir un colapso catastrófico? ¿Quedarían las personas expuestas al peligro? ¿Qué otro equipo quedaría dañado? Consideraciones de este tipo podrían justificar el uso de un factor de diseño más elevado de lo normal.

**Costo.** Con frecuencia deben hacerse compromisos en el diseño con el interés de limitar el costo a un valor razonable en condiciones normales de mercado. Desde luego, si existe peligro de daños a vidas o propiedades, no deben hacerse compromisos que podrían afectar seriamente la seguridad del producto o la estructura.

### 3-5 CRITERIOS EN LA DETERMINACIÓN DEL FACTOR DE DISEÑO

Para determinar un factor de diseño, deben aplicarse la experiencia en el diseño y el conocimiento de las condiciones anteriores. La tabla 3-2 incluye criterios que se utilizarán en este texto para seleccionar factores de diseño. Éstos deben considerarse como valores promedio. Las condiciones especiales o la incertidumbre acerca de estas condiciones pueden justificar el uso de otros valores.

El factor de diseño se utiliza para determinar el esfuerzo de diseño como se muestra en las ecuaciones 3-2 y 3-3.

Si el esfuerzo sobre una parte ya se conoce y se desea elegir un material propio para una aplicación particular, se considera que el esfuerzo que se calculó es el esfuerzo de diseño. La cedencia requerida o resistencia última se obtiene a partir de:

$$s_y = N \cdot \sigma_d \quad (N \text{ con base en la resistencia a la cedencia})$$

o:

$$s_u = N \cdot \sigma_d \quad (N \text{ con base en la resistencia última})$$

**TABLA 3-2** Criterios para esfuerzo de diseño; esfuerzos normales directos

Forma de carga	Material dúctil	Material quebradizo
Estática	$\sigma_d = s_y/2$	$\sigma_d = s_u/6$
Repetida	$\sigma_d = s_y/8$	$\sigma_d = s_u/10$
De impacto o de choque	$\sigma_d = s_y/12$	$\sigma_d = s_u/15$

### 3-6 MÉTODOS PARA CALCULAR EL ESFUERZO DE DISEÑO

Como se mencionó en la sección 3-3, un importante factor que debe considerarse al calcular el esfuerzo de diseño es la forma en que una pieza puede fallar al verse sometida a cargas. En esta sección, se consideran los modos de falla correspondientes a piezas sometidas a cargas de tensión y compresión. Más adelante se discutirán otras clases de carga.

Los modos de falla y los consiguientes métodos para calcular esfuerzos de diseño pueden clasificarse según el tipo de material y la forma de carga. Los materiales dúctiles que tienen más del 5% de alargamiento, presentan modos de falla ligeramente distintos a los de los materiales quebradizos. Las cargas estáticas, cargas repetidas y cargas de choque producen modos distintos de falla.

**Materiales dúctiles bajo cargas estáticas.** Los materiales dúctiles sufren grandes deformaciones plásticas cuando el esfuerzo llegue a la resistencia a la cedencia del material. En la mayoría de las condiciones de uso, esto haría que la pieza quedara inservible para su uso. Por consiguiente, para materiales dúctiles sometidos a cargas estáticas, el esfuerzo de diseño generalmente se basa en la resistencia a la cedencia. Es decir:

$$\sigma_d = \frac{s_y}{N}$$

Como se indica en la tabla 3-2, un factor de diseño de  $N = 2$  sería una elección razonable en condiciones promedio.

**Materiales dúctiles bajo cargas repetidas.** Bajo cargas repetidas, los materiales dúctiles fallan por un mecanismo al que se le llama *fatiga*. El nivel de esfuerzo al que ocurre la fatiga es menor que la resistencia a la cedencia. Al probar a los materiales bajo cargas repetidas, puede medirse el esfuerzo al que ocurre la falla. Se utilizan los términos *resistencia de fatiga* o *límite de fatiga* para denotar el nivel de esfuerzo. Sin embargo, con frecuencia los valores de resistencia de la fatiga no están disponibles. Además, factores como el acabado de una superficie, el patrón preciso de carga y el tamaño de una pieza también ejercen un marcado efecto en la resistencia a la fatiga real. Para superar estas dificultades, con frecuencia es conveniente utilizar un alto valor para el factor de diseño al calcular el esfuerzo de diseño para una pieza sujeta a cargas repetidas. También se recomienda que se utilice la resistencia última como base para el esfuerzo de diseño, porque las pruebas demuestran que hay una buena correlación entre la resistencia a la fatiga y la resistencia última. Por consiguiente, para materiales dúctiles sometidos a cargas repetidas, el esfuerzo de diseño puede calcularse a partir de:

$$\sigma_d = \frac{s_u}{N}$$

En condiciones promedio, sería razonable un factor de diseño de  $N = 8$ . Además, las concentraciones de esfuerzo, que se exponen en la sección 3-9, deben tomarse en cuenta puesto que las fallas por fatiga con frecuencia se originan en puntos de concentración de esfuerzo.



Cuando se cuenta con datos para el límite de fatiga de un material, el esfuerzo de diseño puede calcularse de:

$$\sigma_d = \frac{s_w}{N}$$

en donde  $s_w$  es el símbolo para resistencia a la fatiga. Véase referencia 6.

**Materiales dúctiles bajo cargas de impacto o choque.** Los modos de falla de piezas sujetas a cargas de impacto o choque son en extremo complejos. Dependen de la capacidad del material de absorber energía y de la flexibilidad de la pieza. Debido a la incapacidad general de los diseñadores para realizar análisis precisos de esfuerzos bajo cargas de choque, se recomiendan factores de diseño grandes. En este libro utilizaremos:

$$\sigma_d = \frac{s_w}{N}$$

con  $N = 12$  para materiales dúctiles sujetos a cargas de impacto o choque.

**Materiales quebradizos.** Puesto que los materiales quebradizos no presentan cedencia, el esfuerzo de diseño debe basarse en la resistencia última. Es decir:

$$\sigma_d = \frac{s_u}{N}$$

con  $N = 6$  para cargas estáticas,  $N = 10$  para cargas repetidas, y  $N = 15$  para cargas de impacto o choque.

**Esfuerzos de diseño de códigos selectos.** La tabla 3-3 resume las especificaciones para esfuerzos de diseño definidos por el American Institute of Steel Construction (AISC) para acero estructural, y por la Aluminum Association para aleaciones de aluminio. Estos datos se refieren a miembros cargados a tensión bajo cargas estáticas como las que aparecen en estructuras de edificios. Véanse las referencias 1 y 2 para una discusión más detallada de estas especificaciones.

**TABLA 3-3** Diseño por esfuerzo de reglamentos seleccionados; esfuerzos normales directos; cargas estáticas en estructuras de construcción.

Acero estructural (AISC):

$$\sigma_d = s_y / 1.67 = 0.60 s_y \quad \text{o} \quad s_d = s_u / 2.00 = 0.50 s_u$$

el que sea menor

Aluminio (Aluminum Association):

$$\sigma_d = s_y / 1.65 = 0.61 s_y \quad \text{o} \quad \sigma_d = s_u / 1.95 = 0.51 s_u$$

el que sea menor

**Ejemplo 3-1** Un soporte estructural de una máquina se verá sometido a una carga de tensión estática de 16.0 kN. Se planea fabricar una varilla cuadrada de acero AISI 1020 laminado en caliente. Especifique las dimensiones propias para la sección transversal de la varilla.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Especificar las dimensiones de la sección transversal de la varilla.
	<b>Datos</b>	$F = 16.0 \text{ kN} = 16000 \text{ N}$ de carga estática. Material: AISI 1020 HR; $s_y = 207 \text{ MPa}$ ; 25% de alargamiento (dúctil). (Datos tomados del apéndice A-13.)
	<b>Análisis</b>	Sea $\sigma = \sigma_d = s_y/2$ (tabla 3-2; material dúctil, carga estática). Análisis del esfuerzo: $\sigma = F/A$ ; entonces, el área requerida = $A = F/\sigma_d$ . Pero $A = a^2$ ( $a$ = longitud de un lado del cuadrado). Mínima dimensión permisible $a = \sqrt{A}$ .
	<b>Resultados</b>	$\sigma_d = s_y/2 = 207 \text{ MPa}/2 = 103.5 \text{ MPa} = 103.5 \text{ N/mm}^2$ . Área requerida: $A = F/\sigma_d = (16000 \text{ N})/(103.5 \text{ N/mm}^2) = 154.6 \text{ mm}^2$ . Dimensión $a$ mínima: $a = \sqrt{A} = \sqrt{154.6 \text{ mm}^2} = 12.4 \text{ mm}$ . Especificación: $a = 14 \text{ mm}$ (apéndice A-2; tamaño preferido).

**Ejemplo 3-2** Un miembro de una armadura de techo para un edificio debe soportar una carga de tensión axial estática de 19 800 lb. Se propone el uso de un ángulo de acero estructural estándar de aletas iguales para esta aplicación utilizando acero estructural ASTM A36. Utilice el código AISC. Consúltese el apéndice A-5 para especificar un ángulo adecuado.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Especificar un ángulo de acero estándar de aletas iguales.
	<b>Datos</b>	$F = 19800 \text{ lb}$ de carga estática. Material: ASTM A36; $s_y = 36000 \text{ psi}$ ; $s_u = 58000 \text{ psi}$ . (Datos del apéndice A-15.)
	<b>Análisis</b>	Sea $\sigma = \sigma_d = 0.60 s_y$ o $\sigma_d = 0.50 s_u$ (tabla 3-3). Análisis del esfuerzo: $\sigma = F/A$ ; entonces el área requerida = $A = F/\sigma_d$ .
	<b>Resultados</b>	$\sigma_d = 0.60 s_y = 0.60 (36000 \text{ psi}) = 21600 \text{ psi}$ o $\sigma_d = 0.50 s_u = 0.50 (58000 \text{ psi}) = 29000 \text{ psi}$ Úsese el valor mínimo; $\sigma_d = 21600 \text{ psi}$ . Área requerida: $A = F/\sigma_d = (19800 \text{ lb})/(21600 \text{ lb/plg}^2) = 0.917 \text{ plg}^2$ . Esta es el área mínima permisible. Especificación: ángulo de acero L2 x 2 x 1/4 (apéndice A-5; perfil más ligero). $A = 0.938 \text{ plg}^2$ ; peso = 3.19 lb/pie.

**Ejemplo 3-3** Un elemento de una máquina empacadora se somete a una carga de tensión de 36.6 kN que se repetirá varios miles de veces durante la vida de la máquina. La sección transversal del elemento es de 12 mm de espesor y 20 mm de ancho. Especifique un material adecuado para hacer el elemento.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Especificar un material para un elemento de una máquina.
	<b>Datos</b>	$F = 36.6 \text{ kN} = 36\,600 \text{ N}$ , carga repetida. Sección transversal del elemento: rectangular, $12 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ .
	<b>Análisis</b>	Es deseable un material dúctil para la carga repetida. Sea $\sigma = \sigma_u = s_u/8$ (tabla 3-2). Entonces se requiere $s_u = 8\sigma$ . Análisis del esfuerzo: $\sigma = F/A$ .
	<b>Resultados</b>	Área = $A = (12 \text{ mm})(20 \text{ mm}) = 240 \text{ mm}^2$ . $\sigma = F/A = (36\,600 \text{ N})/(240 \text{ mm}^2) = 152.5 \text{ N/mm}^2 = 152.5 \text{ MPa}$ . Resistencia última requerida: $s_u = 8\sigma = 8(152.5 \text{ MPa}) = 1220 \text{ MPa}$ . Especificación: acero AISI 4140 OQT 900 (apéndice A-13). $s_u = 1289 \text{ MPa}$ ; 15% de alargamiento; resistencia adecuada, buena ductilidad.
	<b>Comentarios</b>	Podrían seleccionarse otros materiales. La resistencia que se requiere indica que se necesita una aleación de acero tratada al calor. La que seleccionó tiene el máximo porcentaje de alargamiento de cualquiera de las que aparecen en el apéndice A-13. Si el tamaño del elemento pudiera ser mayor, la resistencia requerida podría ser menor, y podría hallarse un acero menos costoso.

**Ejemplo 3-4** La figura 3-1 muestra un diseño del soporte de una máquina pesada que se verá sometida a una carga de compresión axial. Se seleccionó hierro colado gris, grado 20 para el soporte. Especifique la carga permisible sobre el soporte.

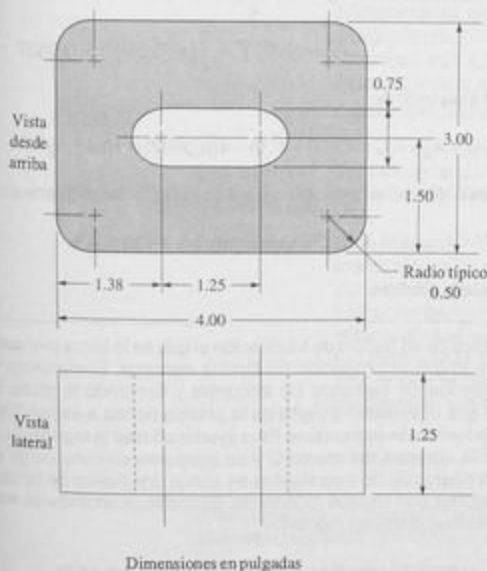


FIGURA 3-1 Soporte de la máquina del ejemplo 3-4.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Especificar la carga de compresión axial permisible sobre el soporte.
<b>Datos</b>		Material: Hierro colado gris, grado 20; $s_u = 80$ ksi a compresión (tabla A-16); el material es quebradizo. Supongamos que la carga es estática. La forma del soporte es la que aparece en la figura 3-1. El miembro es corto, así que no hay pandeo.
<b>Análisis</b>		Análisis del esfuerzo: $\sigma = F/A$ ; área calculada con la figura 3-1. Sea $\sigma = \sigma_d = s_u/N$ ; utilice $N = 6$ (tabla 3-2). Entonces, la fuerza permisible es $F = \sigma_d A$ .
<b>Resultados</b>		$\sigma_d = s_u/6 = 80\,000 \text{ psi}/6 = 13\,300 \text{ psi}$ . La sección transversal del soporte es igual a la vista desde arriba. El área neta puede calcularse tomando el área de un rectángulo de 3.00 plg por 4.00 plg, y restando el área de la muesca y los cuatro vértices redondeados.

$$\text{Rectángulo: } A_R = (3.00 \text{ plg})(4.00 \text{ plg}) = 12.00 \text{ plg}^2$$

$$\text{Muesca: } A_S = (0.75)(1.25) + \frac{\pi(0.75)^2}{4} = 1.38 \text{ plg}^2$$

El área de cada redondeo puede calcularse mediante la diferencia entre el área de un cuadrado con lados iguales al radio del vértice (0.50 plg) y un cuarto de círculo del mismo radio. Entonces:

$$\text{Vértice redondeado: } A_F = r^2 - \frac{1}{4}(\pi r^2)$$

$$A_F = (0.50)^2 - \frac{1}{4}[\pi(0.50)^2] = 0.0537 \text{ plg}^2$$

Entonces el área total es:

$$A = A_R - A_S - 4A_F = 12.00 - 1.38 - 4(0.0537) = 10.41 \text{ plg}^2$$

Ahora tenemos los datos necesarios para calcular la carga permisible

$$P = A\sigma_d = (10.41 \text{ plg}^2)(13\,300 \text{ lb/plg}^2) = 138\,500 \text{ lb}$$

Esto completa el ejemplo.

**Ejemplo 3-5** La figura 3-2 muestra una pieza de un equipo de fabricación al que se le llama prensa de marco-C que se utiliza para troquelar productos de lámina metálica. El martinete se impulsa hacia abajo con gran fuerza, cerrando los troqueles y formando la pieza. La acción de troquelado hace que el extremo abierto de la prensa tienda a expandirse, una acción indeseable, si la deformación es excesiva. Para ayudar a limitar la expansión, se instalan varillas a través de la abertura del marco-C y se aseguran con una carga de tensión muy alta. Durante la operación de troquelados se aplica una fuerza de tensión máxima de 40 000 lb a los rodillos con choque moderado. Especifique un material adecuado para las varillas, y calcule el diámetro requerido.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Especificar un material para las varillas y el diámetro requerido.
	<b>Datos</b>	$F = 40\,000$ lb de tensión; choque moderado y repetido en cada ciclo de la prensa.

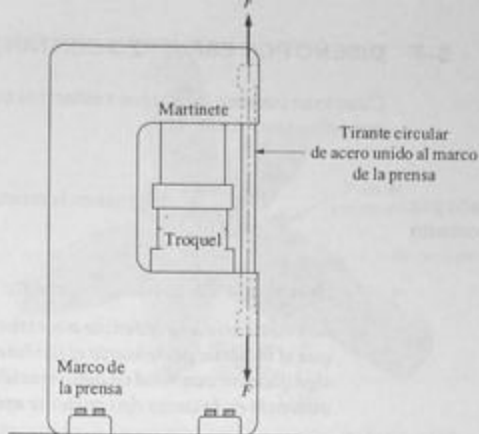


FIGURA 3-2 Prensa de marco—C del ejemplo 3-5.

- Análisis** Análisis del esfuerzo:  $\sigma = F/A$ .  
 El material debe tener una alta resistencia y buena ductilidad.  
 Sea  $\sigma = \sigma_d = s_u/N$ ; utilice  $N = 12$  (tabla 3-2).  
 Área requerida:  $A = F/\sigma_d$  y  $A = \pi D^2/4$ .  
 Diámetro requerido:  $D = \sqrt{4A/\pi}$ .
- Resultados** Varias aleaciones de acero podrían satisfacer estas condiciones. Como primer intento, especifique AISI 5160 OQT 1100;  $s_u = 149$  ksi; 17% de alargamiento.  
 Entonces,  $\sigma_d = s_u/N = 149\,000$  psi/12 = 12 400 psi.  
 Área requerida:  $A = F/\sigma_d = (40\,000$  lb)/(12 400 lb/plg<sup>2</sup>) = 3.23 plg<sup>2</sup>.  
 Diámetro requerido:  $D = \sqrt{4A/\pi} = \sqrt{4(3.23$  plg<sup>2</sup>)/ $\pi = 2.03$  plg.
- Especifique** Tamaño estándar conveniente:  $D = 2.25$  plg.  
 Material: AISI 5160 OQT 1100.
- Comentario** Si se utilizara un material con una resistencia última a la tensión ligeramente mayor, se podría utilizar una barra de menor diámetro, por ejemplo de 2.00 plg. Considérese el mismo material (AISI 5160) con una menor temperatura de temple, por ejemplo OQT 1000. Con los datos de la tabla del apéndice A-13, la interpolación entre los valores de  $s_u$  para OQT 900 y OQT 1100 nos daría  $s_u = 172.5$  ksi y 14.5% de alargamiento. Esto podría seguir dando una buena ductilidad. Si se repite el análisis del diámetro que se requiere, obtenemos:
- $$\sigma_d = s_u/N = 172\,500$$
- psi/12 = 14 400 psi
- Área requerida:  $A = F/\sigma_d = (40\,000$  lb)/(14 400 lb/plg<sup>2</sup>) = 2.78 plg<sup>2</sup>.  
 Diámetro requerido:  $D = \sqrt{4A/\pi} = \sqrt{4(2.78$  plg<sup>2</sup>)/ $\pi = 1.88$  plg.
- Especificación** Tamaño estándar conveniente:  $D = 2.00$  plg.  
 Material: AISI 5160 OQT 1000.

### 3-7 DISEÑO POR ESFUERZO CORTANTE

Cuando se someten miembros a esfuerzos cortantes, el diseño debe basarse en el diseño por esfuerzo cortante,  $\tau_d$ .



Diseño por esfuerzo cortante

$$\tau_d = \frac{s_{xy}}{N} \text{ con base en la resistencia a la cedencia a cortante}$$

(3-6)

#### Resistencia a la cedencia a cortante.

La resistencia a la cedencia a cortante,  $s_{xy}$ , es el nivel de esfuerzo cortante al que el material presentaría el fenómeno de cedencia. Es decir, sufriría una significativa cantidad de deformación por cortante, con poco o ningún aumento en la carga tipo cortante aplicada.

De hecho todos los diseños de miembros sometidos a cortante requieren que el esfuerzo cortante real esté muy por debajo del valor de  $s_{xy}$ , como lo indica la ecuación 3-6. La selección de factores de diseño se hace en la tabla 3-4. Consúltese también la sección 3-4 para otras consideraciones en la selección de un factor de diseño. Las condiciones que son más severas que las que aparecen normalmente o donde hay una significativa cantidad de incertidumbre acerca de la cantidad de la magnitud de cargas o propiedades materiales, justificarían factores de diseño más elevados.

Desde luego, si los valores de la resistencia a la cedencia a cortantes están disponibles, pueden utilizarse en las ecuaciones de esfuerzo de diseño. Pero, por desgracia, con frecuencia no se reportan estos valores y es necesario basarse en estimaciones. Para la resistencia a la cedencia a cortante, una estimación que con frecuencia se utiliza es:



Estimación de la resistencia a la cedencia a cortante

$$s_{xy} = \frac{s_y}{2} = 0.5s_y$$

(3-7)

Este valor proviene de la observación de una prueba de tensión típica en donde el esfuerzo cortante es la mitad del esfuerzo de tensión directo. Este fenómeno, relacionado con la teoría de falla del esfuerzo cortante máximo, es algo conservador y se discutirá posteriormente en el capítulo 10.

#### Resistencia última a cortante.

La resistencia última a cortante,  $s_w$ , es el nivel de esfuerzo cortante al que el material se fractura.

Hay algunas aplicaciones prácticas del esfuerzo cortante cuando se requiere la fractura del miembro sometido a cortante y, por consiguiente, se necesita una estimación de  $s_w$ . Entre los ejemplos se incluye el perno cortante utilizado como elemento en el tren de

TABLA 3-4 Criterios de esfuerzo de diseño para la determinación de la fuerza cortante.

Forma de carga	Diseño por esfuerzo; materiales dúctiles	
	$\tau_d = s_{xy}/N = 0.5$	$s_y/N = s_y/2N$
Estática	Use $N = 2$	$\tau_d = s_y/4$
Repetida	Use $N = 4$	$\tau_d = s_y/4$
Impacto	Use $N = 6$	$\tau_d = s_y/4$

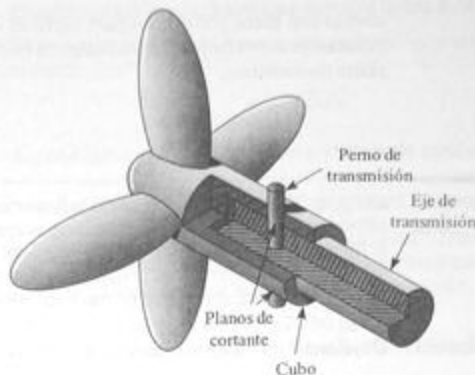


FIGURA 3-3 Perno de transmisión de hélice del ejemplo 3-6.

transmisión de máquinas con componentes costosos. La figura 3-3 muestra un eje de transmisión de una hélice de un bote, en donde el par de torsión desde el eje de transmisión se transmite a través del perno al cubo de la hélice. El perno debe estar diseñado para transmitir un nivel de par de torsión que se encuentra típicamente al moverse el bote en el agua. Sin embargo, si la hélice se topa con una obstrucción como un tronco sumergido, sería deseable que el perno (que es poco costoso) fallara en lugar de la hélice (que es más costosa). Véase el ejemplo 3-6.

Otro ejemplo donde se requiere una estimación de la resistencia última a cortante es el caso de la operación de perforación descrita en el capítulo 1 y que se muestra en la figura 1-5. En este caso, se espera que el punzón entresaque completamente la parte deseada de la hoja de material. Por consiguiente, los lados cortados de la pieza deben someterse a esfuerzo hasta alcanzar la resistencia última a cortante.

Cuando se conocen los datos de la resistencia última a cortante, éstos deben utilizarse. Por ejemplo, el apéndice A-16 da algunos valores para hierros colados y en el apéndice A-17 aparecen datos para aleaciones de aluminio. Pero, para las ocasiones en que no se cuenta con datos publicados, las estimaciones pueden calcularse con las relaciones dadas en la tabla 3-5, tomadas de la referencia 4.

**Materiales quebradizos.** El diseño por esfuerzos cortantes para materiales quebradizos debe basarse en la resistencia última a cortante puesto que no presentan cedencia. Debe utilizarse un factor de diseño más elevado que el usado para materiales dúctiles, porque los materiales con frecuencia son de estructura menos consistente. Sin embargo, no se

TABLA 3-5 Estimaciones para la resistencia última a cortante.

Fórmula	Material
$s_{ut} = 0.65 s_u$	Aleaciones de aluminio
$s_{ut} = 0.82 s_u$	Acero
$s_{ut} = 0.90 s_u$	Hierro maleable y aleaciones de cobre
$s_{ut} = 1.30 s_u$	Hierro colado gris

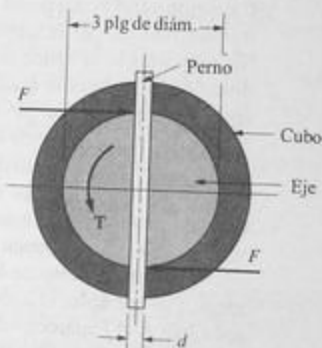
cuenta con datos publicados para factores de diseño aceptables. Se recomienda que se realicen pruebas en prototipos reales de miembros con cargas cortantes hechos de materiales quebradizos.

**Ejemplo 3-6** La figura 3-3 muestra una hélice de bote montada en un eje con un perno de transmisión cilíndrico insertado a través del cubo y el eje. El par de torsión requerido para impulsar a la hélice es de 1575 lb·plg, y el diámetro del eje dentro del cubo es de 3.00 plg. Generalmente, el par de torsión es constante y es deseable diseñar un perno que sea seguro en esta condición. Especifique un material adecuado y el diámetro del perno.

**Solución Objetivo** Especificar un material y el diámetro del perno.

**Datos** Par de torsión =  $T = 1575 \text{ lb} \cdot \text{plg}$  (constante).  
Diámetro del eje =  $D = 3.00 \text{ plg}$ .

**Análisis** 1. El perno se sometería a fuerza cortante directa en la superficie de



**FIGURA 3-4** Sección transversal a través del cubo de la hélice y el eje.

contacto entre el eje y el interior del cubo, como se muestra en la figura 3-4. El par de torsión generado por el eje produce dos fuerzas iguales que actúan perpendicularmente al eje del perno en los lados opuestos del eje, formando un par. Es decir:

$$T = FD$$

Por consiguiente,  $F = T/D$ .

- Es deseable un material con una resistencia de moderada a elevada para que el perno no sea muy grande. También debe tener buena ductilidad debido a que es muy probable una leve carga de choque de vez en cuando. Puede elegirse de entre varios materiales.
- Análisis de esfuerzo:  $\tau = F/A$ , donde  $A = \pi d^2/4$ . Ésta es un área de sección transversal para el perno.



4. Diseño por esfuerzo cortante de:  $\tau_d = s_u/4$  (tabla 3-4).

5. Sea  $\tau = \tau_d$ . Entonces, el  $A$  requerida sería  $=F/\tau_d$ , y el  $d$  que se requiere sería:

$$d = \sqrt{4A/\pi}$$

6. Especifique un tamaño estándar conveniente para el perno.

- Resultados**
- $F = T/D = (1575 \text{ lb} \cdot \text{plg})/(3.00 \text{ plg}) = 525 \text{ lb}$ .
  - Especifíquese acero estirado en frío AISI 1020 como prueba ( $s_u = 51\,000 \text{ psi}$ ; 15% de alargamiento). Nótese que en ese caso el perno debe estar protegido contra la corrosión.
  - $4, 5.$   $\tau_d = s_u/4 = 51\,000 \text{ psi}/4 = 12\,750 \text{ psi}$   
 $A = F/\tau_d = (525 \text{ lb})/(12\,750 \text{ lb/plg}^2) = 0.0412 \text{ plg}^2$   
 $d = \sqrt{4A/\pi} = \sqrt{4(0.0412 \text{ plg}^2)/\pi} = 0.229 \text{ plg}$ .
  - Del apéndice A-2, especifíquese  $d = 0.250 \text{ plg}$  (1/4 plg).  
Material: acero estirado en frío AISI 1020.

**Comentario.** El tamaño parece razonable en comparación con el diámetro del eje.

Cuando el perno de transmisión que se diseñó en el ejemplo 3-6 se somete a una sobrecarga como la que ocurre al chocar contra un tronco, es deseable que sea el perno el que se rompa en lugar de que se dañe la hélice. El siguiente ejemplo considera esta situación.

<b>Ejemplo 3-7</b>	Calcule el par de torsión que se requiere para romper el perno diseñado en el ejemplo 3-6, el cual se muestra en las figuras 3-3 y 3-4.
<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b> Calcule el par de torsión que se requiere para romper el perno.
	<b>Datos</b> El diseño es el que se muestra en las figuras 3-3 y 3-4. $D = 3.00 \text{ plg}$ ; $d = 0.250 \text{ plg}$ . Material: acero estirado en frío AISI 1020.
	<b>Análisis</b> El análisis sería similar a lo inverso del ejemplo 3-6, como se resume a continuación. <ol style="list-style-type: none"><li>El material del perno se fractura cuando <math>\tau = s_{us} = 0.82 s_u</math> (tabla 3-5).</li><li><math>\tau = F/A</math>. Entonces <math>F = \tau A = (0.82 s_u)A</math>. También, <math>A = \pi d^2/4</math>.</li><li><math>T = FD</math>.</li></ol>
	<b>Resultados</b> <ol style="list-style-type: none"><li><math>s_{us} = 0.82 s_u = 0.82 (61\,000 \text{ psi}) = 50\,000 \text{ psi}</math>.</li><li><math>A = \pi d^2/4 = A = \pi (0.250 \text{ plg})^2/4 = 0.0491 \text{ plg}^2</math>, <math>F = \tau A = (50\,000 \text{ lb/plg}^2)(0.0491 \text{ plg}^2) = 2450 \text{ lb}</math></li><li><math>T = FD = (2450 \text{ lb})(3.00 \text{ plg}) = 7350 \text{ lb} \cdot \text{plg}</math>.</li></ol>

**Comentario** En comparación con el par de torsión que normalmente se aplica, este valor es muy alto. La razón del par de torsión normal al requerido para romper el perno, es:

$$\text{Razón} = 7350/1575 = 4.67$$

Esto indica que el perno no se rompería en las condiciones anticipadas. Sin embargo, posiblemente sea demasiado elevado para proteger la hélice. La hélice debe someterse a pruebas.

### 3-8 DISEÑO POR ESFUERZOS DE APOYO

El esfuerzo de apoyo es un fenómeno localizado que se crea cuando dos piezas de carga se ponen en contacto. La condición de esfuerzo en realidad es un esfuerzo de compresión, pero debido a la naturaleza localizada del esfuerzo, se utilizan esfuerzos permisibles distintos.

**Acero.** Según el AISC, el esfuerzo de apoyo permisible en el acero en el caso de superficies planas, o en el caso del área proyectada de pernos en agujeros perforados, taladrados o escariados es:

↪ Diseño por esfuerzo de apoyo para el acero

$$\sigma_{bd} = 0.90s_y \quad (3-8)$$

Cuando se utilizan rodillos o balancines para soportar una viga u otro miembro de carga para permitir que se expanda, el esfuerzo de apoyo depende del diámetro del rodillo o balancín,  $d$  y de su longitud,  $L$ . El esfuerzo es inherentemente muy elevado porque la carga la soporta una superficie rectangular reducida. En teoría, el contacto entre la superficie plana y el rodillo es en sí una línea; pero debido a la elasticidad de los materiales, la superficie real es rectangular. En lugar de especificar un esfuerzo de apoyo permisible, la norma AISC permite el cálculo de la carga de apoyo permisible,  $W_b$ , a partir de:

↪ Carga de apoyo permisible para rodillos de acero

$$W_b = \frac{s_y - 13}{20} (0.66 dL) \quad (3-9)$$

en donde  $s_y$  se expresa en ksi,  $d$  y  $L$  en pulgadas, y  $W_b$  en kips.

**Ejemplo 3-8** Una viga corta, como la que se muestra en la figura 3-5, está hecha de una barra de acero rectangular, de 1.25 plg de espesor y 4.50 plg de alto. En cada extremo, la longitud



FIGURA 3-5 Viga del ejemplo 3-8.

apoyada sobre una placa de acero es de 2.00 plg. Si tanto la barra como la placa son de acero estructural ASTM A36, calcule la máxima carga permisible,  $W$ , que podría soportar la viga, sólo basándose en el esfuerzo de apoyo en los extremos. La carga está centrada entre los apoyos.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular la carga permisible, $W$ , sólo con base en el esfuerzo de apoyo.
	<b>Datos</b>	La carga es la que se muestra en la figura 3-5. Área de apoyo en cada extremo: 2.00 plg por 1.25 plg (es decir, $A_b = ta$ ). Material: acero estructural ASTM A36 ( $s_y = 36\ 000$ psi).
	<b>Análisis</b>	Esfuerzo de apoyo: $\sigma_b = R/A_b$ . Donde $R$ es la reacción en los apoyos y $R = W/2$ . Ecuación 3-8 para el esfuerzo de diseño: $\sigma_{bd} = 0.90 s_y = 0.90 (36\ 000 \text{ psi}) = 32\ 400 \text{ psi}$ Por consiguiente, $R = A_b \sigma_b$ y $W = 2R$ .
	<b>Resultados</b>	Área de apoyo: $A_b = ta = (1.25 \text{ plg})(2.00 \text{ plg}) = 2.50 \text{ plg}^2$ . $R = A_b \sigma_b = (2.50 \text{ plg}^2)(32\ 400 \text{ lb/plg}^2) = 81\ 000 \text{ lb}$ . $W = 2R = 2(81\ 000 \text{ lb}) = 162\ 000 \text{ lb} = 162 \text{ kip}$ .
	<b>Comentario</b>	Ésta es una carga muy elevada, así que es poco probable que el aplastamiento sea el modo de fractura para esta viga.

### Ejemplo 3-9

Una proposición alternativa para soportar la barra descrita en el ejemplo 3-8 aparece en la figura 3-6. Para permitir la expansión de la barra, el extremo izquierdo está apoyado sobre un rodillo de 2.00 plg de diámetro hecho de acero AISI 1040 CD. Calcule la carga permisible,  $W$ , para esta disposición.

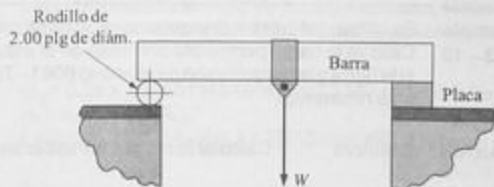


FIGURA 3-6 Viga del ejemplo 3-9.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular la carga permisible sobre la viga.
	<b>Datos</b>	La carga es como la que aparece en la figura 3-6. Ancho de la viga ( $t = 1.25$ plg) descansa en el rodillo ( $d = 2.00$ plg). Material de la viga: acero estructural ASTM A36 ( $s_y = 36$ ksi). Material del rodillo: AISI 1040 CD ( $s_y = 71$ ksi).
	<b>Análisis</b>	En el apoyo de rodillo, se aplica la ecuación 3-9 para determinar la carga permisible. Nótese que $R = W_b$ y $W = 2W_b$ . Utilice $s_y = 36$ ksi, es decir, el más débil de los dos materiales en contacto.

**Resultados** La carga de apoyo permisible es:

$$W_b = \frac{36 - 13}{20} (0.66)(2.00)(1.25) = 1.90 \text{ kip}$$

Ésta sería la reacción permisible en cada apoyo. La carga total es:

$$W = 2W_b = 2(1.90 \text{ kip}) = 3.80 \text{ kip}$$


**Comentarios** Nótese que ésta es significativamente menor que la carga permisible para las superficies del ejemplo 3-8. Ciertamente, el esfuerzo de apoyo en el rodillo puede limitar la carga que podría soportarse con seguridad.

**Aluminio.** La Aluminum Association (1) basa los esfuerzos de apoyo permisibles en aleaciones de aluminio para superficies planas y pernos en la *resistencia a la cedencia de apoyo*.

$$\sigma_{ad} = \frac{\sigma_{by}}{2.48} \quad (3-10)$$

Los valores mínimos para la resistencia a la cedencia de apoyo aparecen en la referencia 1. Pero muchas referencias, incluidas las tablas de los apéndices del presente texto, no van acompañadas de estos datos. Un análisis de los datos muestra que para la mayoría de las aleaciones de aluminio, la resistencia a la cedencia de apoyo es aproximadamente 1.60 veces más grande que la resistencia a la cedencia a tensión. Entonces, la ecuación 3-10 puede reformularse como

$$\sigma_{ad} = \frac{1.60s_y}{2.48} = 0.65s_y \quad (3-11)$$

 **Diseño por esfuerzo de apoyo para el aluminio**

Utilizaremos esta forma para el diseño por esfuerzo de apoyo para el aluminio, a lo largo de todo el libro.

**Ejemplo 3-10** Se utiliza una barra rectangular como soporte colgante, como se muestra en la figura 3-7. Calcule la carga permisible con base en el esfuerzo de apoyo en la conexión con perno si la barra y la horquilla son de aluminio 6061-T6. El perno debe fabricarse de un material más resistente.

**Solución** **Objetivo** Calcular la carga permisible en el soporte colgante.

**Datos** La carga es como se indica en la figura 3-7. Diámetro del perno =  $d = 16$  mm.  
Espesor del soporte colgante =  $t_1 = 25$  mm; ancho =  $w = 50$  mm.  
Espesor de cada parte de la horquilla =  $t_2 = 12$  mm.  
Material del soporte y la horquilla: aluminio 6061-T6 ( $s_y = 145$  MPa).  
El perno es más resistente que el soporte y la horquilla.

**Análisis** Para pernos cilíndricos en agujeros de ajuste apretado, el esfuerzo de apoyo se basa en el área *proyectada* sometida a esfuerzo de apoyo que se obtiene con el diámetro del perno multiplicado por la longitud sobre la que se distribuye la carga.

$$\sigma_b = \frac{F}{A_b} = \frac{F}{dL}$$

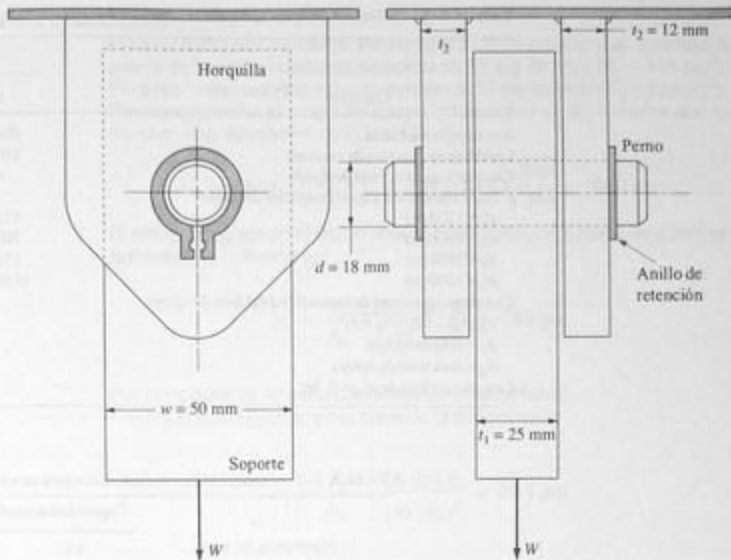


FIGURA 3-7 Soporte colgante del ejemplo 3-10.

Sea  $\sigma_b = \sigma_{bd} = 0.65 s_y$  para el aluminio 6061-T6.

Área de apoyo del soporte colgante:  $A_{b1} = t_1 d = (25 \text{ mm})(18 \text{ mm}) = 450 \text{ mm}^2$ .

Esta área soporta la totalidad de la carga aplicada,  $W$ .

Para cada lado de la horquilla:  $A_{b2} = t_2 d = (12 \text{ mm})(18 \text{ mm}) = 216 \text{ mm}^2$ .

Esta área soporta la mitad de la carga aplicada,  $W/2$ .

Como  $A_{b2}$  es menor que  $1/2$  de  $A_{b1}$ , prevalece el apoyo en la horquilla.

**Resultados**

$$\sigma_{bd} = 0.65 s_y = 0.65 (145 \text{ MPa}) = 94.3 \text{ MPa} = 94.3 \text{ N/mm}^2.$$

$$\sigma_b = \sigma_{bd} = (W/2)/A_{b2}$$

$$\text{Entonces, } W = 2(A_{b2})(\sigma_{bd}) = 2(216 \text{ mm}^2)(94.3 \text{ N/mm}^2) = 40\,740 \text{ N}.$$

**Comentarios**

Ésta es una fuerza muy grande y deben analizarse otros modos de falla del soporte colgante. La falla puede ocurrir por cortante del perno o por fractura provocada por tensión de la horquilla o la barra del soporte.

**Mampostería.** Con frecuencia, la parte inferior de un sistema de apoyo está hecho de concreto, ladrillo o piedra. Las cargas que se transfieren a estos sistemas de apoyo por lo general requieren que se consideren los esfuerzos de apoyo porque las resistencias de estos materiales son relativamente bajas en comparación con las de los metales. Cabe observar que deben utilizarse las resistencias reales de los materiales, siempre que sea posible, debido a la gran variación de propiedades. Además, algunos reglamentos de construcción incluyen esfuerzos de apoyo permisibles para ciertas clases de mampostería.

TABLA 3-6 Esfuerzos de apoyo permisibles en mampostería.

Material	Esfuerzo de apoyo permisible	
	psi	MPa
Arena y piedra caliza	400	
Ladrillo con mortero de cemento	250	2.76
Concreto: en área total de apoyo	$0.35\sigma_c$	1.72
( $\sigma_c$ = resistencia especificada del concreto)		
$\sigma_c = 1500$ psi	525	3.62
$\sigma_c = 2000$ psi	700	4.81
$\sigma_c = 2500$ psi	875	6.01
$\sigma_c = 3000$ psi	1050	7.24
Concreto: en menos de la totalidad del área de apoyo		
$\sigma_{bd} = 0.35 \sigma_c \sqrt{A_2 / A_1}$		
$A_1$ = área de apoyo		
$A_2$ = área total de apoyo		
Con un máximo de $\sigma_{bd} = 0.7\sigma_c$		

TABLA 3-7 Capacidad de sustentación segura de suelos.

Naturaleza del suelo	Capacidad de sustentación segura	
	psi	kPa
Roca dura sólida	350	2400
Pizarra o roca mediana	140	960
Roca blanda	70	480
Arcilla dura o grava compacta	55	380
Arcilla suave o arena suelta	15	100

Sin datos específicos, el AISC (2) recomienda los esfuerzos de apoyo permisibles que aparecen en la tabla 3-6.

**Suelos.** Los apoyos de mampostería o de concreto con frecuencia se colocan sobre el suelo para transferir las cargas directamente a tierra. En el *Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers* (3) [Manual Marks de Normas para Ingenieros Mecánicos (3)] se dan valores de la capacidad de sustentación segura de suelos, según se muestra en la tabla 3-7. Son de esperarse variaciones y deben obtenerse datos de prueba siempre que sea posible.

**Ejemplo 3-11** La figura 1-45 muestra una columna apoyada sobre un cimiento y que soporta una carga de 26 000 lb. Determine si los esfuerzos de apoyo son aceptables para el concreto compacta. El concreto tiene una resistencia específica de 2000 psi y el suelo es grava compacta.

**Solución** **Objetivo** ¿Son seguros los esfuerzos de apoyo sobre el concreto y el suelo?

**Datos** La cimentación se muestra en la figura 1-45 del capítulo 1. Carga =  $F = 26\ 000$  lb.  
 Para el concreto:  $\sigma_c = 2000$  psi.  
 Para el suelo (grava compacta):  $\sigma_{bd} = 55$  psi (tabla 3-7).

### Análisis y Resultados

Para el concreto: La carga se transfiere de la columna al concreto a través de la placa cuadrada de acero de 12 plg de lado ( $A_1 = 144 \text{ plg}^2$ ). Pero la pila de concreto es un cuadrado de 18 plg de lado ( $A_2 = 324 \text{ plg}^2$ ). Por consiguiente, la carga de apoyo actúa sobre un área menor que la del concreto. Entonces, de la tabla 3-6:

$$\sigma_{bs} = 0.35\sigma_c \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = 0.35 (2000 \text{ psi}) \sqrt{\frac{324}{144}} = 1050 \text{ psi}$$

El esfuerzo de apoyo ejercido sobre el concreto por la placa de acero en la base de la columna es:

$$\sigma_b = \frac{F}{A_b} = \frac{26\,000 \text{ lb}}{(12 \text{ plg})^2} = 180 \text{ psi}$$

Por consiguiente, el esfuerzo de apoyo es aceptable.

Para el suelo (grava) en la base de la cimentación:

$$\sigma_b = \frac{F}{A_b} = \frac{26\,000 \text{ lb}}{(36 \text{ plg})^2} = 20.1 \text{ psi}$$

Este valor es aceptable porque el esfuerzo de apoyo permisible para la grava compacta es de 55 psi.

## 3-9 FACTORES DE CONCENTRACIÓN DE ESFUERZO

Al definir el método para calcular el esfuerzo que causa la carga de tensión o compresión directa sobre un miembro, se puso énfasis en que el miembro debe tener una sección transversal uniforme para que la ecuación  $\sigma = F/A$  sea válida. La razón de esta restricción es que donde cambia la geometría de un miembro sometido a carga, el esfuerzo real desarrollado es mayor que el que podría predecirse mediante la ecuación estándar. Este fenómeno se conoce como concentración de esfuerzo, porque estudios que se han hecho con detalle revelan que los esfuerzos elevados y localizados parecen concentrarse alrededor de secciones donde ocurren cambios de geometría.

La figura 3-8 ilustra el caso de concentración de esfuerzos en el ejemplo de una barra redonda cargada axialmente a tensión que tiene dos diámetros con un escalón entre ellos. Nótese que hay un pequeño redondeo en la base del escalón. Su importancia se analizará más adelante. Bajo el dibujo de la barra escalonada hay una gráfica de esfuerzo contra posición en la barra. En la sección 1, donde el diámetro de la barra es  $D$  y se halla en un punto muy alejado del escalón, el esfuerzo puede calcularse con:

$$\sigma_1 = F/A_1 = F/(\pi D^2/4)$$

En la sección 2, donde el diámetro de la barra tiene el valor menor de  $d$ , el esfuerzo es:

$$\sigma_2 = F/A_2 = F/(\pi d^2/4)$$

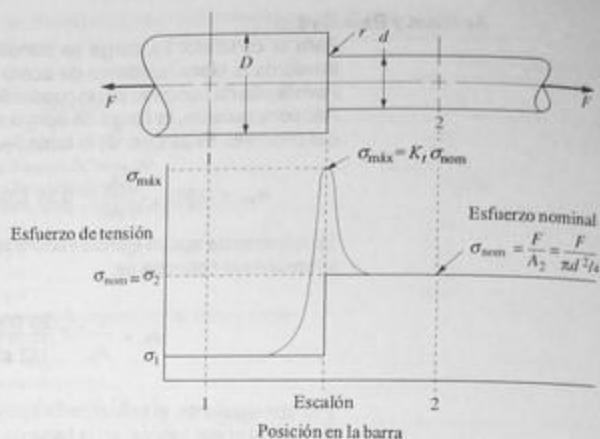


FIGURA 3-8 Distribución de esfuerzos cerca de un cambio de geometría.

Entonces, es de esperarse que la gráfica de esfuerzo contra posición aparezca como líneas rectas con un salto abrupto en el lugar donde cambia el diámetro. Pero las pruebas demostrarían que la distribución de esfuerzo real se asemejaría más a la línea curva: unida a las dos líneas rectas en puntos alejados del escalón, pero con una fuerte elevación cerca del mismo escalón.

Para tomar en cuenta el esfuerzo mayor al predicho en el escalón, modificaremos la fórmula de esfuerzo directo para incluir un *factor de concentración de esfuerzo*,  $K_t$ , con el fin de producir la forma que se muestra a continuación:

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}} \quad (3-12)$$

en donde, en este caso, el esfuerzo nominal se basa en la sección menor 2. Es decir:

$$\sigma_{\text{nom}} = \sigma_2 = F/A_2 = F/(\pi d^2/4)$$

Entonces el valor de  $K_t$  representa el factor por el cual el esfuerzo real es mayor que el esfuerzo nominal calculado con la fórmula estándar.

Las concentraciones de esfuerzo provocan más daños en el caso de cargas dinámicas tales como cargas repetidas, de impacto o choque. De hecho, las fallas por fatiga ocurren con mayor frecuencia cerca de los lugares donde se concentran los esfuerzos con pequeñas grietas locales que crecen con el tiempo hasta que la sección restante ya no puede soportar la carga. Bajo carga estática, el elevado esfuerzo cerca de la discontinuidad puede causar cedencia local que redistribuiría el esfuerzo a un valor promedio menor que la resistencia a la cedencia y, por consiguiente, la pieza seguiría siendo segura.

**Valores de los factores de concentración de esfuerzo.** La magnitud del factor de concentración de esfuerzo,  $K_t$ , depende de la geometría del miembro cerca de la discontinuidad. La mayoría de los datos se obtuvieron por experimentos mediante cuidadosas mediciones del esfuerzo máximo,  $\sigma_{\max}$ , en las que se utilizaron técnicas experimentales.



tales de análisis de esfuerzo tales como medición de deformaciones o fotoelasticidad. Los enfoques computarizados que utilizan análisis de elementos finitos también podrían utilizarse. Entonces, el valor de  $K_t$  se calcula a partir de:

$$K_t = \sigma_{\max} / \sigma_{\text{nom}} \quad (3-13)$$

donde  $\sigma_{\text{nom}}$  es el esfuerzo que se calcularía en la sección de interés sin considerar la concentración de esfuerzo. En el caso que ahora se discute, el esfuerzo de tensión directo,  $\sigma_{\text{nom}} = F/A$ .

El apéndice A-21 contiene varias gráficas que pueden utilizarse para determinar el valor de  $K_t$  para una variedad de geometrías.

- A-21-1: Barra redonda con carga axial de tensión con rebaje circular.
- A-21-2: Barra redonda con carga axial de tensión con un escalón y un borde redondeado.
- A-21-3: Placa plana con carga axial de tensión con un escalón y un borde redondeado.
- A-21-4: Placa plana con una perforación central.
- A-21-5: Barra redonda con una perforación transversal.

La gráfica en el apéndice A-21-1 muestra el patrón típico para presentar valores de factores de concentración de esfuerzos. El eje vertical da el valor del mismo  $K_t$ . Los factores pertinentes de geometría son el diámetro de la totalidad de la sección redonda,  $D$ , el diámetro en la base del rebaje,  $d_g$ , y el radio del rebaje circular,  $r$ . Con estos datos pueden calcularse dos parámetros. El eje horizontal es la razón de  $r/d_g$ . La familia de curvas en la gráfica es para valores distintos de la relación de  $D/d_g$ . El uso normal de esta gráfica, cuando se conoce la geometría completa, es localizar el valor de  $r/d_g$  en la gráfica, trazar una línea vertical hasta la curva de  $D/d_g$ , y luego una horizontal hasta el eje vertical para leer  $K_t$ . Con frecuencia es necesaria la interpolación entre las curvas de la gráfica. Nótese que el esfuerzo nominal para la barra redonda rebajada se basa en el esfuerzo en el fondo del rebaje, la menor superficie en la vecindad. Aunque esto es típico, es importante que el lector sepa en qué se basa el esfuerzo nominal en cualquier gráfica de concentración de esfuerzos. Con frecuencia se utilizan rebajes de fondo circular para distribuir aceite u otros lubricantes en un eje.

La gráfica del apéndice A-21-2 para la barra redonda escalonada tiene tres factores geométricos: el diámetro mayor,  $D$ , el diámetro menor,  $d$ , y el redondeo en el escalón donde cambia el diámetro. Nótese que el valor de  $K_t$  aumenta rápidamente con valores pequeños del radio del redondeo. Como diseñador, el lector debe considerar el mayor radio práctico para este redondeo y así mantener un esfuerzo máximo relativamente reducido en el escalón.

Un importante uso de la gráfica del apéndice A-21-2 es el análisis de factores de concentración de esfuerzos para barras redondas con rebajes para anillos de retención, como se muestra en la figura 3-9. La geometría típica del rebaje, que especifica el fabricante de anillos, aparece en la figura 3-10. El fondo del rebaje es plano, y el redondeo en cada extremo es muy reducido para que haya una gran superficie vertical para colocar el anillo. El resultado es que el rebaje actúa como dos escalones muy cercanos entre sí. Entonces puede utilizarse el apéndice A-21-2 para determinar el valor de  $K_t$ . A veces, la geometría del rebaje resultará en valores  $K_t$  que están muy por encima de los valores máximos de la gráfica. En estos casos, es razonable un valor estimado de  $K_t = 3.0$ , pero deben buscarse datos adicionales.

La gráfica del apéndice A-21-4 contiene tres curvas, todas en relación con una placa plana que tiene una perforación central. La curva A es para el caso en que la placa

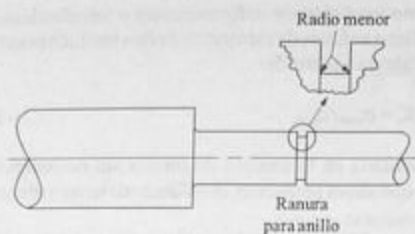


FIGURA 3-9 Eje escalonado con ranura para anillo

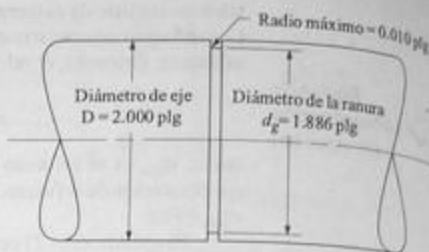


FIGURA 3-10 Geometría muestra de una ranura para anillo de retención en una barra redonda.

se someta a esfuerzo de tensión directo a través de la totalidad de su sección transversal cerca de la perforación. La curva B es para el caso en que se inserta un perno de ajuste, apretado en la perforación, y la carga de tensión se aplica a través del perno. Los factores de concentración de esfuerzo resultantes son ligeramente mayores por la mayor concentración de carga. La curva C es para el caso de la placa a flexión, y esto se analizará en el capítulo 8. Sin embargo, en cada caso, nótese que el esfuerzo nominal se basa en la *sección neta* a través de la placa en el lugar de la perforación. Para carga de tensión, se utiliza el *área neta* para  $\sigma_{nom}$ . Esto es:

$$\sigma_{nom} = F/A_{net} = F/(w-d)t$$

en donde  $w$  = ancho de la placa

$t$  = espesor

$d$  = diámetro de la perforación.

La gráfica en el apéndice A-21-5 para la barra redonda con un agujero transversal contiene varios datos para distintos tipos de carga: tensión, flexión y torsión. Por lo pronto, sólo nos interesamos en la curva A para el caso de tensión axial. La torsión se discute en el capítulo 5, y la flexión en el capítulo 8. Nótese también que el factor de concentración de esfuerzo se basa en la *sección bruta*, no en la *sección neta* en la perforación. Esto significa que  $K$ , incluye los efectos de la remoción de material y la discontinuidad, lo que produce valores muy elevados. Sin embargo, facilita el uso de la carta para usted, que es el diseñador, porque no tiene que calcular el área de la sección neta.

**Ejemplo 3-12** La barra escalonada que aparece en la figura 3-8 se somete a una fuerza de tensión axial de 12 500 lb. Calcule el esfuerzo de tensión máximo en la barra para las siguientes dimensiones:

$$D = 1.50 \text{ plg}; \quad d = 0.75 \text{ plg}; \quad r = 0.060 \text{ plg}$$

**Solución** **Objetivo** Calcular el esfuerzo de tensión máximo.

**Datos**  $F = 12\,500 \text{ lb}; D = 1.50 \text{ plg}; d = 0.75 \text{ plg}; r = 0.060 \text{ plg}$

<b>Análisis</b>	Por el cambio de diámetro, utilice la ecuación (3-12). Utilice la gráfica del apéndice A-21-2 para obtener el valor de $K_t$ utilizando $r/d$ y $D/d$ como parámetros.
<b>Resultados</b>	$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}}$ $\sigma_{\text{nom}} = \sigma_2 = F/A_2 = F/(\pi d^2/4) = (12\,500 \text{ lb})/[\pi(0.75 \text{ plg})^2/4]$ $\sigma_{\text{nom}} = 28\,294 \text{ lb/plg}^2$ $r/d = 0.06/0.75 = 0.080 \text{ y } D/d = 1.50/0.75 = 2.00$ Lea $K_t = 2.12$ en el apéndice A-21-2. Entonces $\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}} = 2.12 (28\,294 \text{ psi}) = 59\,983 \text{ psi}$ .
<b>Comentario</b>	El esfuerzo máximo real, de aproximadamente 60 000 psi, es más del doble del valor que podría predecirse con la fórmula convencional.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Aluminum Association, *Specifications for Aluminum Structures*, Washington, DC, 1986.
2. American Institute of Steel Construction, *Manual of Steel Construction*, 9th ed., Chicago, IL, 1989.
3. Avallone, E. A., and T. Baumeister III, eds., *Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers*, 9th ed., 1987.
4. Deutschman, A. D., W. J. Michels, and C. E. Wilson, *Machine Design Theory and Practice*, Macmillan, New York, 1975.
5. Juvinal, R. C., and K. M. Marshek, *Fundamentals of Machine Component Design*, 2nd ed., Wiley, New York, 1983.
6. Mott, R. L., *Machine Elements in Mechanical Design*, 2nd ed., Merrill, An Imprint of Macmillan, New York, 1992.
7. Peterson, R. E., *Stress Concentration Factors*, Wiley, New York, 1974.
8. Shigley, J. E., and C. R. Mischke, *Mechanical Engineering Design*, 5th ed., McGraw-Hill, New York, 1988.
9. Spotts, M. F., *Design of Machine Elements*, 6th ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
10. Young, W. C., *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1989.

## PROBLEMAS

- 3-1.M Especificíse una aleación de aluminio conveniente para una barra redonda con un diámetro de 10 mm sometida a una fuerza de tensión directa estática de 8.50 kN.
- 3-2.M Una barra rectangular con sección transversal de 10 mm por 30 mm está sometida a una fuerza de tensión directa de 20.0 kN. Si la fuerza debe aplicarse varias veces, especifique un acero satisfactorio.
- 3-3.1 Un eslabón de una máquina empacadora automática está sometido a una fuerza de tensión directa de 1720 lb, que se repite varias veces. El eslabón es cuadrado, de 0.40 plg de lado. Especificíse un acero propio para el eslabón.
- 3-4.1 Una varilla circular de acero de 3/8 plg de diámetro soporta un calentador y somete a una carga de tensión estática de 1850 lb. Especificíse un acero estructural que convenga a la varilla.
- 3-5.1 Un miembro de tensión en una armadura de madera de un techo debe soportar una fuerza de tensión estática de 5200 lb. Se propone utilizar un tablón estándar de 2 x 4 de pino del sur, No. 2. ¿Sería éste aceptable?

- 3-6.I Con los datos del problema 3-5, sugiera un diseño alternativo que sea seguro para la carga dada. Puede especificarse un miembro de tamaño distinto o un material diferente.
- 3-7.I Un tirante de alambre para una torre de antena debe ser de aluminio, con un esfuerzo permisible de 12 000 psi. Si la carga máxima que se espera en el cable es de 6400 lb, determine el diámetro del alambre que se requiere.
- 3-8.M Una tolva con una masa de 1150 kg tiene un diseño para soportar una carga de sal a granel con una masa de 6350 kg. La tolva debe suspenderse mediante cuatro flejes rectangulares, donde cada uno soporta una cuarta parte de la carga. Para hacer los flejes se utiliza una plancha de acero con un espesor de 8.0 mm. ¿Cuál debe ser el ancho para limitar el esfuerzo a 70 MPa?
- 3-9.M Se diseña una repisa para sostener cajones con una masa total de 1840 kg. Dos varillas, como las que se muestran en la figura 3-11, sostendrán la repisa. Suponga que el centro de gravedad de los cajones está en la parte media de la repisa. Especifique el diámetro de las varillas circulares que se requiere para limitar el esfuerzo a 110 MPa.

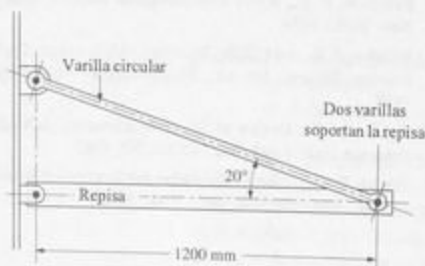
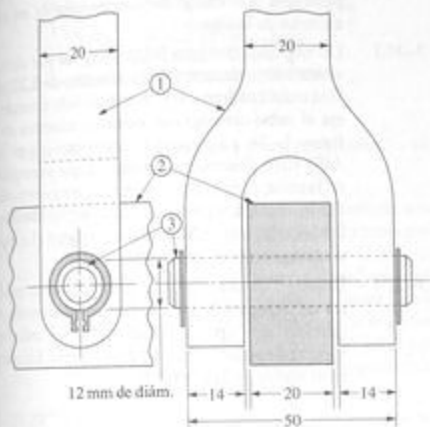


FIGURA 3-11 Varillas de soporte de la repisa del problema 3-9.

- 3-10.I La base de una columna de concreto es circular, con un diámetro de 8.0 plg, y soporta una carga de compresión directa y estática de 70 000 lb. Especifique la resistencia que se pide del concreto según las recomendaciones de la sección 2-10.
- 3-11.I Tres bloques cortos de madera hechos de postes estándar de 4 x 4 soportan una máquina que pesa 29 500 lb y comparten la carga por igual. Especifique un tipo de madera que convenga para los bloques.

- 3-12.M Para soportar una columna, se construye una pila circular de concreto con una resistencia de 3000 psi (20.7 MPa). Especifique un diámetro aceptable para la pila si debe soportar una carga de compresión directa de 1.50 MN.
- 3-13.I Un anillo de aluminio tiene un diámetro externo de 12.0 mm y un diámetro interno de 10 mm. Si el anillo es corto y está hecho de 2014-T6, calcule la fuerza que se necesita para producir una falla dúctil por compresión en el anillo. Suponga que  $\sigma_{tension}$  es igual a tensión y a compresión.
- 3-14.M Un cubo de madera de 40 mm de lado está hecho de abeto No. 2. Calcule la fuerza de compresión permisible que podría aplicarse al cubo, ya sea paralela o perpendicular a su grano.
- 3-15.I Una barra redonda de acero estructural ASTM A242 se utilizará como tirante para tensar un marco. Si se espera una carga estática máxima de 4000 lb, especifique el diámetro conveniente para la barra.
- 3-16.I Una porción de una pieza fundida de hierro colado gris ASTM A48, grado 20, tiene la forma que se muestra en la figura 1-32 y está sometida a una fuerza de compresión alineada con el eje central de la sección. Si el miembro es corto y soporta una carga de 52 000 lb, calcule el esfuerzo en la sección y el factor de diseño.
- 3-17.M Una pieza de un sistema de suspensión de camión debe soportar una carga de compresión de 135 kN con la posibilidad de cargas de choque. Debe utilizarse hierro maleable ASTM A220 grado 45000. La sección transversal debe ser rectangular, siendo el lado largo el doble del lado corto. Especifique dimensiones convenientes para la pieza.
- 3-18.I El eslabón rectangular de plástico de una impresora de oficina se tiene que hacer de un copolímero de acetal relleno de fibra de vidrio (véase el apéndice A-19). Debe soportar una fuerza de tensión de 110 lb. Las limitaciones de espacio obligan a que el eslabón tenga un espesor máximo de 0.20 plg. Especifique un ancho idóneo del eslabón si se espera un factor de diseño de 8 con base en la resistencia a la tensión del plástico.
- 3-19.M La figura 1-33 muestra la sección transversal de un miembro corto que debe soportar una carga de compresión estática de 640 kN. Especifique el material propio para el miembro.
- 3-20.M La figura 1-25 muestra una barra que soporta varias cargas estáticas. Si la barra es de acero estructural ASTM A36, ¿es segura?
- 3-21.M En la figura 1-30, especifique una aleación de aluminio conveniente para el miembro AB si la carga debe repetirse varias veces. Considere sólo la parte cuadrada cerca de la parte media del miembro.

- 3-22.M La figura 3-12 muestra el diseño del extremo inferior del miembro  $AB$  de la figura 1-30. Utilice la carga que se muestra en la figura 1-30 y suponga que es estática. El miembro 1 es de aleación de aluminio 6061-T4; el miembro 2 es de aluminio 2014-T4; el perno 3 es de aleación de aluminio 2014-T6. Realice los siguientes análisis:



Dimensiones en mm

FIGURA 3-12 Horquilla para el soporte de viga del problema 3-22.

- Evalúe la seguridad del miembro 1 en lo que se refiere a tensión en el área de las perforaciones para el perno.
- Evalúe la seguridad del miembro 1 en lo que se refiere a esfuerzo de apoyo en el perno.
- Evalúe la seguridad del miembro 2 en lo que se refiere a esfuerzo de apoyo en el perno.
- Evalúe la seguridad del perno 3 a esfuerzo de apoyo.
- Evalúe la seguridad del perno 3 a cortante.

- 3-23.I Un ángulo de acero estándar,  $L2 \times 2 \times 1/4$ , funciona como miembro a tensión en una armadura que soporta una carga estática. Si el ángulo está hecho de acero estructural ASTM A36, calcule la carga de tensión permisible con base en las especificaciones AISC.
- 3-24.M Una máquina pesa 90 kN y descansa sobre cuatro patas. Dos bloques de concreto sirven como cimientos. La carga es simétrica, como se muestra en la figura 3-13. Evalúe el diseño propuesto en relación con la seguridad de la placa de acero, la cimentación de concreto y el suelo como apoyo.
- 3-25.M Una columna de un edificio debe soportar 160 kN. Si la columna ha de estar apoyada en un cimiento cuadrado de concreto que descansa sobre roca blanda, determine las dimensiones que se requieren para el bloque de cimentación.
- 3-26.I Una base para mover maquinaria pesada está diseñada como se muestra en la figura 3-14. ¿Cuánta carga podría soportar si se considera la capacidad

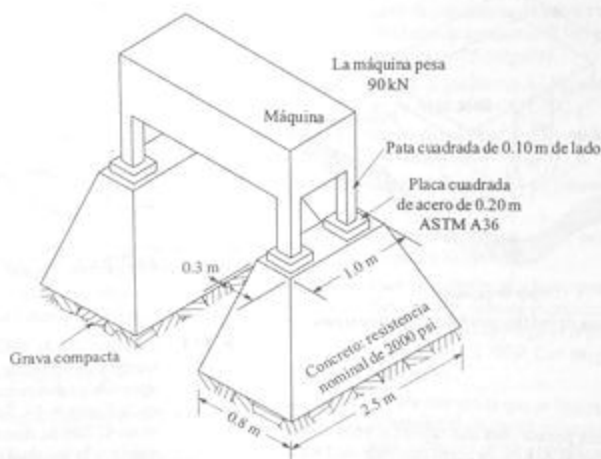


FIGURA 3-13 Apoyos de la máquina del problema 3-24.

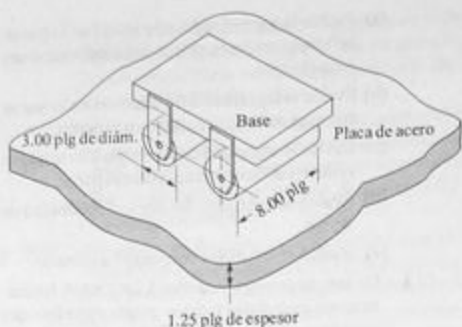


FIGURA 3-14 Base de rodillos para mover maquinaria para los problemas 3-26 y 3-27.

de sustentación de la placa de acero de 1.25 plg de espesor y está hecha de acero estructural ASTM A36?

- 3-27.I Repita el problema 3-26 con placa de acero de baja aleación y alta resistencia ASTM A242.
- 3-28.I La figura 3-15 muestra un diseño alternativo para la base transportadora de maquinaria descrita en el problema 3-26. Calcule la carga permisible para este diseño si está apoyada sobre acero (a) ASTM A36 o (b) acero ASTM A242.

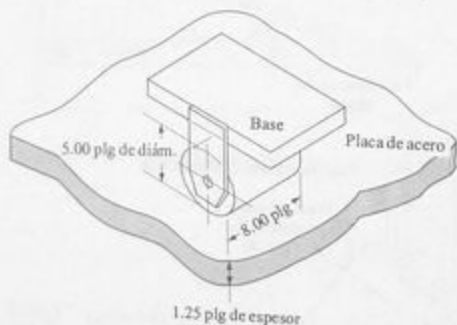


FIGURA 3-15 Base de rodillos para mover maquinaria para el problema 3-28.

- 3-29.I Una mesa pesada para uso industrial tiene cuatro patas hechas de tubo de acero cuadrado de  $2 \times 2 \times 1/4$ . Calcule el esfuerzo de apoyo que ejerce cada pata sobre el piso, si se coloca una carga total de

10 000 lb sobre la mesa de modo que se reparta en las cuatro patas. Luego sugiera otro diseño para las patas si se desea conservar el esfuerzo de apoyo a menos de 400 psi.

- 3-30.C Un extremo de una viga está apoyado sobre un balancín con un radio de 200 mm y un ángulo de 150 mm. Si el balancín y la placa en la que está apoyado son de acero estructural ASTM A36, especifique la reacción mínima permisible en el extremo de la viga.
- 3-31.I Un engrane transmite 5000 lb-plg de par de torsión a un eje circular con un diámetro de 2.25 plg. Una cuña cuadrada de 0.50 plg de lado conecta el eje al cubo del engrane, como se muestra en la figura 1-14. La cuña es de acero estirado en frío AISI 1020. Determine la longitud que se requiere de la cuña,  $L$ , para que ésta sea segura a cortante y a esfuerzo de apoyo. Utilice un factor de diseño de 2.0 basado en la cedencia a cortante y en el esfuerzo de apoyo AISC permisible.
- 3-32.I El apoyo de una viga está hecho como se muestra en la figura 3-16. Determine el espesor requerido del apoyo volado  $a$  si el máximo esfuerzo cortante debe ser de 6000 psi. La carga en el apoyo es de 21 000 lb.

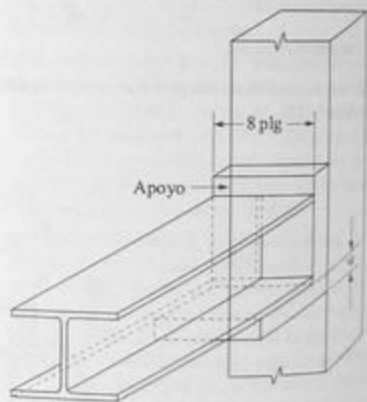


FIGURA 3-16 Apoyo de viga del problema 3-32.

- 3-33.I Una sección de tubo está soportada por una estructura de forma de caballete que, a su vez, está apoyada en dos pernos de acero, como se ilustra en la figura 3-17. Si la carga sobre el caballete es de 42 000 lb, determine el diámetro que se requiere y la longitud de los pernos. Utilice acero estirado en frío AISI 1040. Considere tanto las fuerzas cortantes como las de apoyo.

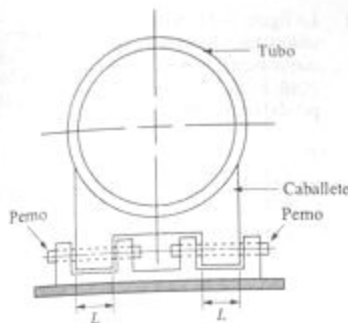


FIGURA 3-17 Caballete para el tubo del problema 3-33.

- 3-34.M El brazo de control inferior de un sistema de suspensión automotriz está conectado al chasis mediante un perno de acero redondo de 16 mm de diámetro. Dos lados del brazo le transfieren cargas del chasis, como se indica en la figura 3-18. ¿Cuánta fuerza cortante podría soportar el perno, si éste es de acero estirado en frío AISI 1040 y se desea un factor de diseño de 6 con base en la resistencia a la cedencia a cortante?
- 3-35.M Se utiliza una centrífuga para separar líquidos según sus densidades, y se usa fuerza centrífuga. La

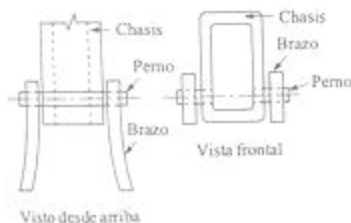


FIGURA 3-18 Perno del sistema de suspensión automotriz del problema 3-34.

figura 1-23 ilustra un brazo de una centrífuga con un balde en su extremo para contener el líquido. En operación, el balde y el líquido tienen una masa de 0.40 kg. La fuerza centrífuga tiene una magnitud en newtons de:

$$F = 0.01097 \cdot m \cdot R \cdot n^2$$

donde  $m$  = masa en rotación del balde y el líquido (kg)

$R$  = radio al centro de masa (metros)

$n$  = velocidad de rotación (rpm)

La fuerza centrífuga somete a cortante directo al perno que sostiene el balde. Calcule el esfuerzo en el perno producido por una velocidad de rotación de 3000 rpm. Luego, especifique un acero conveniente para el perno, considerando que la carga se repite.

- 3-36.M Se utiliza un punzón circular para hacer un agujero de 20.0 mm de diámetro en una plancha de acero laminado en caliente AISI 1020 con un espesor de 8.0 mm. Calcule la fuerza que se requiere para sacar el bocado.
- 3-37.M Repita el problema 3-36, pero con material de aluminio 6061-T4.
- 3-38.M Repita el problema 3-36, pero con material de cobre duro C14500.
- 3-39.M Repita el problema 3-36, pero con material de acero inoxidable duro AISI 430.
- 3-40.M Determine la fuerza requerida para perforar un bocado con la forma mostrada en la figura 1-36 de una lámina de acero laminado en caliente AISI 1020 con un espesor de 5.0 mm.
- 3-41.I Determine la fuerza requerida para perforar un bocado de la forma mostrada en la figura 1-37 de una lámina de aluminio 3003-H18 con un espesor de 0.194 pulgadas.
- 3-42.I Se hace una muesca en una pieza de madera, como se muestra en la figura 1-35, para soportar una carga externa de 1800 lb. Calcule el esfuerzo cortante en la madera. ¿Es segura la muesca? (Véase el apéndice A-18.)
- 3-43.I Calcule la fuerza requerida para cortar un borde recto de una lámina de acero estirado en frío AISI 1040 con un espesor de 0.105 plg. La longitud del borde es de 7.5 pulgadas.
- 3-44.I Repita el problema 3-43, pero con material de acero AISI 5160 OQT 700.
- 3-45.I Repita el problema 3-43, pero con material de acero inoxidable duro AISI 301.
- 3-46.I Repita el problema 3-43, pero con material de bronce duro C36000.
- 3-47.I Repita el problema 3-43, pero con material de aluminio 5154-H32.
- 3-48.M Para la palanca acodada que se muestra en la figura 3-19, calcule el diámetro que se requiere del perno A si la carga se repite y el perno es de cobre duro C17000. Las cargas se repiten muchas veces.
- 3-49.M Para la estructura que se ilustra en la figura 3-20, determine el diámetro requerido de cada perno si está hecho de acero estirado en frío AISI 1020. Cada perno está a cortante doble y la carga es estática.

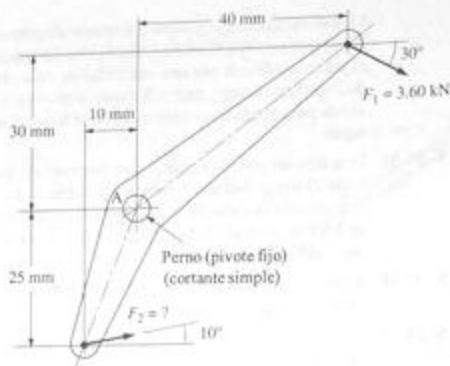


FIGURA 3-19 Palanca acodada del problema 3-48.

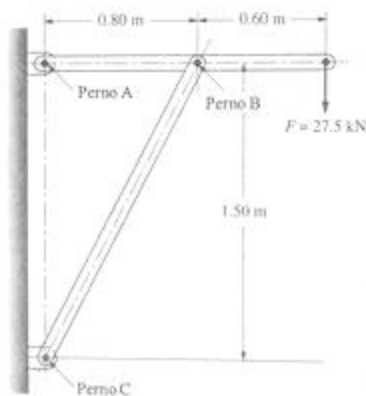


FIGURA 3-20 Estructura conectada con pernos, para el problema 3-49.

- 3-50.M Para la estructura que se muestra en la figura 1-28, determine el diámetro que convenga de cada perno si está hecho de acero estructural de alta resistencia y de baja aleación de cromo-níquel vanadio ASTM A572, grado 50. Cada perno está a cortante doble y la carga es estática.
- 3-51.I Una palanca como la que se muestra en la figura 3-21, se utiliza para generar una gran fuerza mecánica para alzar máquinas pesadas. Un operador puede ejercer una fuerza de 280 lb en la manija. Calcule la fuerza de levantamiento y el esfuerzo cortante en el eje de la rueda.

- 3-52.I La figura 3-22 ilustra un tipo de cadena que se utiliza para bandas transportadoras. Todos los componentes son de acero estrado en frío AISI 1040. Evalúe la fuerza de tensión permisible (permitida) en la cadena con respecto a:
- Fuerza cortante del perno.
  - Esfuerzo de apoyo del perno en las placas laterales.
  - Tensión en las placas laterales.

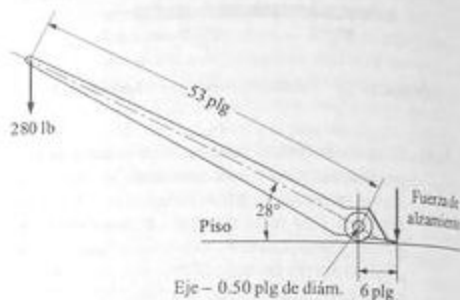


FIGURA 3-21 Palanca del problema 3-51.

- 3-53.I La figura 3-23 muestra un yunque para un muelle de impacto sostenido en un soporte por un perno circular. Si la fuerza es de 500 lb, especifique un diámetro conveniente para el perno de acero si éste debe hacerse de AISI 1040 WQT 900.
- 3-54.I La figura 3-24 muestra una brida de acero forjada integralmente con el eje que debe ser cargado a torsión. Ocho tornillos sirven para acoplar la brida a una brida coincidente. Suponga que cada tornillo soporta una carga igual. Calcule el par de torsión máximo permisible en el acoplamiento si el esfuerzo cortante en los tornillos no debe exceder de 6000 psi.
- 3-55.M La figura 3-25 muestra un eje circular sometido a una carga de tensión axial repetida de 25 kN. El eje es de acero AISI 4140 OQT 1100. Determine el factor de diseño en el agujero y el redondeo.
- 3-56.M Un vástago de válvula en un motor automotriz se somete a una carga de tensión axial de 900 N producida por el resorte de la válvula, como se muestra en la figura 3-26. Calcule el máximo esfuerzo en el vástago donde la fuerza del resorte actúa contra el reborde.
- 3-57.M Un eje redondo tiene dos muescas en donde se colocan anillos para mantener en posición a un engrane, según se muestra en la figura 3-27. Si el eje



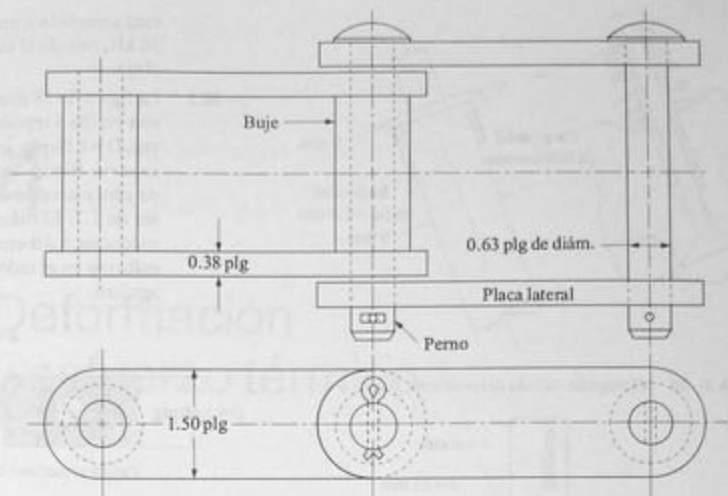


FIGURA 3-22 Cadena transportadora del problema 3-52.

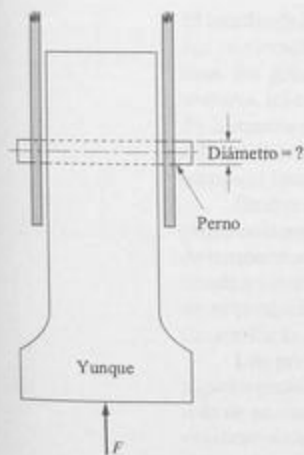


FIGURA 3-23 Martillo de impacto del problema 3-53.

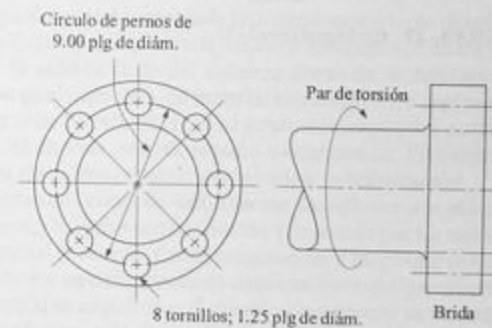


FIGURA 3-24 Acoplamiento de bridas del problema 3-54.

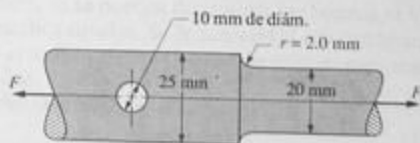


FIGURA 3-25 Eje del problema 3-55.

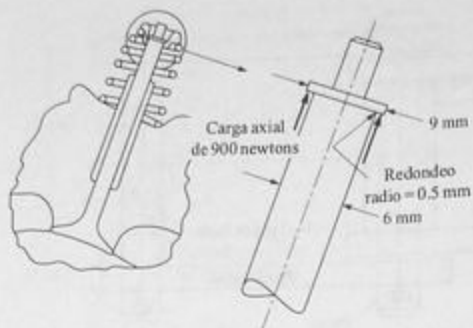


FIGURA 3-26 Vástago de válvula del problema 3-56.

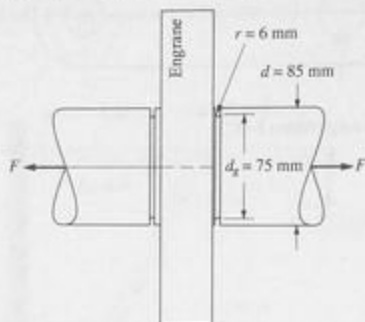


FIGURA 3-27 Eje del problema 3-57.

3-58.1

está sometido a una fuerza de tensión axial de 36 kN, calcule el esfuerzo máximo de tensión en el eje.

La figura 3-28 muestra el diseño propuesto para una varilla a tensión. Se conoce el diámetro mayor,  $D = 1.00$  plg, junto con el diámetro del agujero,  $a = 0.50$  plg. También se decidió que el factor de concentración de esfuerzo en redondeo debe ser de 1.7. El diámetro menor,  $d$ , y el radio del redondeo,  $r$ , deben especificarse de manera que el esfuerzo en el redondeo sea el mismo que el del agujero.

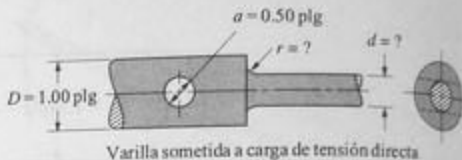


FIGURA 3-28 Varilla a tensión para el problema 3-58



# 4

## Deformación y esfuerzo térmico

### 4-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

El estudio de la resistencia de los materiales comprende la determinación tanto de esfuerzos en elementos estructurales de carga como de la deflexión o deformación de los mismos. En general, se requiere el análisis tanto del *esfuerzo* como de la *deformación unitaria*, tal como se definieron en el capítulo 1. El material expuesto en los capítulos 1, 2 y 3 permite calcular la magnitud de los esfuerzos que se generan en elementos estructurales sometidos a fuerzas axiales directas, sean de tensión o compresión. Este capítulo amplía el conocimiento de tales elementos estructurales al incluir la deformación.

En este capítulo se presentan dos clases de deformación, la *deformación elástica*, provocada por las cargas externas y la *deformación térmica*, provocada por los cambios de temperatura. Cuando un material se calienta tiende a expandirse y luego que se enfría tiende a contraerse. Si se permite que las deformaciones térmicas ocurran sin restricción, no se producirán esfuerzos. Pero si se impide que el miembro estructural se mueva, se desarrollarán esfuerzos. Estos esfuerzos se llaman *esfuerzos térmicos*.

Los principios de la deformación elástica también se pueden usar para resolver algunos problemas más o menos complejos en los que elementos estructurales hechos de más de un material se someten a cargas. Dichos elementos estructurales a menudo son *estáticamente indeterminados*, es decir, no se pueden determinar las fuerzas ni los esfuerzos internos con ecuaciones de estática simples. Se demostrará el uso combinado de la estática, el análisis del esfuerzo y el análisis de la deformación elástica para resolver problemas como los antes mencionados.

Después de terminar el estudio de este capítulo, el lector será capaz de:

1. Calcular la cantidad de deformación elástica de un miembro estructural sometido a una carga de tensión o compresión axial.

2. Diseñar elementos estructurales sometidos a cargas axiales para limitar su deformación a un valor específico.
3. Definir el *coeficiente de expansión térmica* y seleccionar el valor propio a usarse en el cálculo de la deformación térmica.
4. Calcular la cantidad de deformación térmica de un elemento sujeto a cambios de temperatura cuando la deformación no es restringida.
5. Calcular el esfuerzo térmico resultante de un elemento restringido sujeto a cambios de temperatura.
6. Calcular el esfuerzo en componentes de una estructura compuesta que tenga elementos hechos de más de un material sometido a cargas axiales.

#### 4-2 DEFORMACIÓN ELÁSTICA EN ELEMENTOS SOMETIDOS A TENSIÓN Y COMPRESIÓN

Deformación se refiere a cualquier cambio en las dimensiones de un miembro estructural de carga. El poder calcular la magnitud de la deformación es importante en el diseño de mecanismos de precisión, máquinas-herramienta, estructuras de edificios y estructuras de máquinas.

En la figura 3-2 se muestra una troqueladora con tensores de acero de sección transversal circular conectados a ella, donde la deformación es importante. Los tensores experimentan tensión cuando la troqueladora se encuentra en operación. Como los tensores contribuyen a la rigidez de la troqueladora, la deformación que sufren a consecuencia de una carga es algo que el diseñador ha de ser capaz de determinar.

Para deducir la relación con la que se pueda calcular la deformación en elementos sometidos a tensión o compresión axial, se tienen que revisar algunos de los conceptos del capítulo 1. La *deformación unitaria* se define como la razón de la deformación total a la longitud original de un elemento. Con el símbolo  $\epsilon$  para la deformación unitaria,  $\delta$  para la deformación total y  $L$  para la longitud, la fórmula para la deformación unitaria se convierte en:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (4-1)$$

La rigidez de un material es una función de su módulo de elasticidad  $E$ , que se define como:

$$E = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (4-2)$$

Al resolverse para la deformación unitaria se obtiene:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4-3)$$


Ahora se pueden igualar las ecuaciones (4-1) y (4-3):

$$\frac{\delta}{L} = \frac{\sigma}{E} \quad (4-4)$$

Al resolverse para la deformación se obtiene:

$$\delta = \frac{\sigma L}{E} \quad (4-5)$$

Como esta fórmula se aplica a elementos sometidos tanto a fuerzas directas de tensión como de compresión, se usa la fórmula del esfuerzo directo para calcular el esfuerzo  $\sigma$ . Es decir,  $\sigma = F/A$ , donde  $F$  es la carga aplicada y  $A$  es el área de la sección transversal del elemento. Al sustituir esta expresión en la ecuación (4-5) se tiene:

 Deformación axial

$$\delta = \frac{\sigma L}{E} = \frac{FL}{AE} \quad (4-6)$$

La ecuación (4-6) se usa para calcular la deformación total de cualquier elemento de carga, siempre que satisfagan las condiciones que se definen en relación con el esfuerzo directo de tensión y compresión. Es decir, el elemento ha de ser recto y de sección transversal constante; el material debe ser homogéneo, la carga axial directa y el esfuerzo menor que el límite proporcional del material. Recuerde que el valor del límite proporcional se aproxima a la resistencia a la cedencia,  $s_y$ .

**Ejemplo 4-1** Los tensores de la troqueladora que se ilustran en la figura 3-2 son de aleación de acero AISI 5160 OQT 1000. El diámetro de cada tensor es de 2.00 plg y su longitud inicial de 68.5 plg. Se aplica una fuerza de tensión axial de 40 000 lb a cada tensor durante el funcionamiento de la troqueladora. Calcule la deformación de los tensores.

**Solución** **Objetivo** Calcular la deformación de las varillas.

**Datos** Los tensores son de acero, AISI 5160 OQT 1000; diámetro =  $D = 2.00$  plg.  
Longitud =  $L = 68.5$  plg. Fuerza axial =  $F = 40\,000$  lb.

**Análisis** Se usará la ecuación (4-6) y se verificará el esfuerzo que actúa en los tensores para asegurarse de que esté abajo del límite proporcional.

**Resultados** *Esfuerzo de tensión axial:*  $\sigma = F/A$ .

$$\text{Área} = A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (2.0 \text{ plg})^2}{4} = 3.14 \text{ plg}^2.$$

$$\text{Luego, } \sigma = \frac{40\,000 \text{ lb}}{3.14 \text{ plg}^2} = 12\,700 \text{ psi.}$$

El apéndice A-13 da la resistencia a la cedencia del acero como de 132 ksi. Por consiguiente, el esfuerzo se encuentra muy por debajo del límite proporcional.

*Deformación axial:* Use la ecuación (4-6). Todos los datos se conocen excepto el módulo de elasticidad  $E$ . En las notas al pie del apéndice A-13 se encuentra que  $E = 30 \times 10^6$  psi. Entonces:

$$\delta = \frac{FL}{AE} = \frac{(40\,000 \text{ lb})(68.5 \text{ plg})}{(3.14 \text{ plg}^2)(30 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2)} = 0.029 \text{ plg}$$

**Comentario** La aceptabilidad de esta cantidad de deformación axial se tendría que determinar mediante un análisis del sistema de toda la troqueladora.

**Ejemplo 4-2** Un péndulo se compone de una bola de 10.0 kg que cuelga de un alambre de aluminio de 1.00 mm de diámetro y 6.30 m de longitud. El aluminio es una aleación 7075-T6. Calcule el alargamiento del alambre que se origine por el peso de la bola de 10 kg.

**Solución** **Objetivo** Calcular el alargamiento del alambre.

**Datos** El alambre es de una aleación de aluminio 7075-T6; diámetro =  $D = 1.00$  mm. Longitud =  $L = 6.30$  m; la masa de la bola es de 10.0 kg.

**Análisis** La fuerza que actúa en el alambre es igual al peso de la bola, la cual se puede calcular mediante  $w = mg$ . En seguida se tiene que verificar el esfuerzo que actúa en el alambre para asegurarse de que se encuentre por debajo del límite proporcional. Por último, como el esfuerzo resulta que ya se conoce, se usará la ecuación (4-5) para calcular el alargamiento del alambre.

**Resultados** **Fuerza en el alambre:**  $F = w = m \cdot g = 10.0 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 98.1 \text{ N}$ .  
**Esfuerzo de tensión axial:**  $\sigma = F/A$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (1.00 \text{ mm})^2}{4} = 0.785 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{98.1 \text{ N}}{0.785 \text{ mm}^2} = 125 \text{ N/mm}^2 = 125 \text{ MPa}$$

El apéndice A-17 da la resistencia a la cedencia de la aleación de aluminio 7075-T6 como de 503 MPa. El esfuerzo se encuentra muy por debajo del límite proporcional.

**Alargamiento:** Como ya se dispone de todos los datos, excepto del módulo de elasticidad,  $E$ , se puede usar la ecuación (4-5). La nota al pie del apéndice A-17 da el valor de  $E = 72 \text{ GPa} = 72 \times 10^9 \text{ Pa}$ . Por lo tanto

$$\delta = \frac{\sigma L}{E} = \frac{(125 \text{ MPa})(6.30 \text{ m})}{72 \text{ GPa}} = \frac{(125 \times 10^6 \text{ Pa})(6.30 \text{ m})}{72 \times 10^9 \text{ Pa}}$$

$$\delta = 10.9 \times 10^{-3} \text{ m} = 10.9 \text{ mm}$$

**Ejemplo 4-3** Un eslabón de tensión de una máquina debe tener 610 mm de longitud y se somete a una carga axial repetida de 3 000 N. Se propuso que el eslabón se fabrique de acero y que su sección transversal sea cuadrada. Determine las dimensiones que se requieren del eslabón si el alargamiento debido a la carga no debe exceder de 0.05 mm.

**Solución** **Objetivo** Determinar las dimensiones que se necesitan de la sección transversal cuadrada del eslabón para limitar el alargamiento,  $\delta$ , a 0.05 mm o menos.

**Datos** Carga axial en el eslabón =  $F = 3\,000 \text{ N}$ ; longitud =  $L = 610 \text{ mm}$ . El eslabón se fabricará de acero; por consiguiente,  $E = 207 \text{ GPa} = 207 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ . (Apéndice A-13)

**Análisis** En la ecuación (4-6) para la deformación axial, sea  $\delta = 0.05 \text{ mm}$ . Luego todos los datos se conocen excepto el área de la sección transversal. La ecuación (4-6) se puede resolver para  $A$ . Sea  $d$  cada uno de los lados de la sección transversal cuadrada. Por lo tanto  $A = d^2$  y el valor mínimo aceptable para  $d$  se calcula con  $d = \sqrt{A}$ . Tras de especificar una dimensión conveniente para  $d$ , se tiene que verificar para asegurarse de que el eslabón es seguro y que se encuentra por debajo del límite proporcional.

**Resultados** Si la ecuación (4-6) se resuelve para  $A$  y se sustituyen los valores se obtiene:

$$A = \frac{PL}{E\delta} = \frac{(3000 \text{ N})(610 \text{ mm})}{(207 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(0.05 \text{ mm})} = 176.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Convirtiendo en  $\text{mm}^2$ :

$$A = 176.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \times \frac{(10^3 \text{ mm})^2}{\text{m}^2} = 176.8 \text{ mm}^2$$

$$Y: \quad d = \sqrt{A} = \sqrt{176.8 \text{ mm}^2} = 13.3 \text{ mm}$$

El apéndice A-2 da la dimensión siguiente mayor preferida como de 14.0 mm. El área real de la sección transversal es  $A = d^2 = (14.0 \text{ mm})^2 = 196 \text{ mm}^2$ .

Esfuerzo:  $\sigma = F/A = 3000 \text{ N}/196 \text{ mm}^2 = 15.3 \text{ N/mm}^2 = 15.3 \text{ MPa}$ . Para el caso de una carga repetida, la tabla 3-2 recomienda que el esfuerzo de diseño sea  $\sigma_d = s_u/8$ . Si  $\sigma_d = \sigma$ , el valor que se busca para la resistencia última es:

$$s_u = 8(\sigma) = 8(15.3 \text{ MPa}) = 123 \text{ MPa}$$

**Comentarios** En el apéndice A-13 se ve que casi cualquier acero tiene una resistencia última mucho mayor que 123 MPa. A menos que existiesen más requisitos de diseño, se debe especificar el acero más barato. Luego se especificará:

$$d = 14.0 \text{ mm}$$

El acero laminado en caliente AISI 1020 debe ser el de menor costo.

$$s_u = 448 \text{ MPa}$$

Nótese que el alargamiento permisible limitó este diseño y que el esfuerzo resultante es relativamente bajo.

**Ejemplo 4-4**

La figura 1-26 ilustra un tubo de acero que se utiliza para soportar equipo por medio de cables como se muestra. Las fuerzas son  $F_1 = 8000 \text{ lb}$  y  $F_2 = 2500 \text{ lb}$ . Elija el tubo de acero cédula 40 de menor diámetro que limitará el esfuerzo a no más de 18 000 psi. En seguida, para el tubo que se escogió, determine la deflexión total del punto C dirigida hacia abajo en la cara inferior del tubo cuando se aplican las cargas.

**Solución**

**Objetivo** Especificar la medida adecuada de un tubo de acero cédula 40 estándar y determinar el alargamiento del mismo.

**Datos**

Las cargas que aparecen en la figura 1-26;  $F_1 = 8000 \text{ lb}$  (dos fuerzas);  $F_2 = 2500 \text{ lb}$ .  
 Longitud del tubo de A a B:  $L_{A-B} = 4.00 \text{ pies}$  (12 plg/pie) = 48 plg.  
 Longitud del tubo de B a C:  $L_{B-C} = 3.00 \text{ pies}$  (12 plg/pie) = 36.0 plg.  
 Esfuerzo máximo permisible = 18 000 psi;  $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$  (acero).

**Análisis**

La fuerza de tensión axial máxima que actúa en el tubo es la suma de  $F_2$  más los componentes verticales de las fuerzas  $F_1$ . Esto ocurre en el segmento de A a B. La medida del tubo y el área de sección transversal resultante deben dar como consecuencia un esfuerzo en dicho segmento de 18 000 psi o menor. De B a C, la fuerza de tensión axial es  $F_{B-C} = 2500 \text{ lb}$ . Como la fuerza es diferente en las dos secciones,

el cálculo del alargamiento del tubo se lleva a cabo en dos partes. Es decir:

$$\delta_C = \delta_{\text{total}} = \delta_{A-B} + \delta_{B-C}$$

**Resultados** Cargas axiales:

$$\begin{aligned} F_{A-B} &= F_2 + 2F_1 \cos 30^\circ \\ &= 2500 \text{ lb} + 2(8000 \text{ lb}) \cos 30^\circ \\ &= 16\,400 \text{ lb} \\ F_{B-C} &= F_2 = 2500 \text{ lb} \end{aligned}$$

**Análisis del esfuerzo y cálculo del área de sección transversal requerida:** Con  $\sigma = 18\,000$  psi, el área de la sección transversal requerida del metal en el tubo es:

$$A = \frac{F_{A-B}}{\sigma} = \frac{16\,400 \text{ lb}}{18\,000 \text{ lb/plg}^2} = 0.911 \text{ plg}^2$$

De acuerdo con el apéndice A-12, que da las propiedades de tubo de acero, la medida estándar con el área de sección transversal siguiente mayor es el tubo cédula 40 de 2 plg y  $A = 1.075 \text{ plg}^2$ .

**Deflexión:**

$$\delta_C = \delta_{\text{total}} = \delta_{A-B} + \delta_{B-C}$$

$$\delta_{A-B} = \left( \frac{F_{AB}L}{AE} \right)_{A-B} = \frac{(16\,400 \text{ lb})(48 \text{ plg})}{(1.075 \text{ plg}^2)(30 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2)} = 0.024 \text{ plg}$$

$$\delta_{B-C} = \left( \frac{F_{BC}L}{AE} \right)_{B-C} = \frac{(2500 \text{ lb})(36 \text{ plg})}{(1.075 \text{ plg}^2)(30 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2)} = 0.003 \text{ plg}$$

Por consiguiente:

$$\delta_C = \delta_{A-B} + \delta_{B-C} = 0.027 \text{ plg}$$

**Comentarios** En resumen, cuando el soporte que ilustra la figura 1-26 se fabrica de tubo de acero cédula 40 estándar de 2 plg, el punto C se desplaza hacia abajo 0.027 plg por la acción de las cargas aplicadas.

### 4-3 DEFORMACIÓN QUE CAUSAN LOS CAMBIOS DE TEMPERATURA

Una máquina o una estructura se podría deformar o verse sometida a esfuerzo por cambios de temperatura además de la aplicación de cargas. En algunas regiones los elementos de puentes y otros componentes estructurales se ven expuestos a temperaturas que oscilan desde  $-30^\circ\text{F}$  ( $-34^\circ\text{C}$ ) hasta  $110^\circ\text{F}$  ( $43^\circ\text{C}$ ). Los vehículos y la maquinaria que operan a la intemperie experimentan variaciones de temperatura similares. Con frecuen-



cia, una pieza de una máquina comienza a operar a temperatura ambiente y luego se calienta demasiado durante el funcionamiento de la máquina. Algunos ejemplos son piezas de motores, hornos, máquinas cortadoras de metal, trenes de laminación, equipo de moldeo y extrusión de plásticos, equipo procesador de alimentos, compresores de aire, mecanismos hidráulicos y neumáticos y equipo automático de alta velocidad.

Cuando una pieza metálica se calienta, se expande. Si la expansión no se restringe, las dimensiones de la pieza se incrementan pero en el metal no se genera esfuerzo. Sin embargo, en algunos casos la pieza se restringe, lo que impide que cambien sus dimensiones. En tales circunstancias, se presentan esfuerzos.

Los diferentes materiales cambian de dimensiones a diferentes tasas cuando se exponen a cambios de temperatura. La mayoría de los materiales se dilatan al aumentar la temperatura, aunque algunos se contraen y otros de hecho permanecen del mismo tamaño. El *coeficiente de expansión térmica* rige la deformación y el esfuerzo térmicos que experimentó un material.

*El coeficiente de expansión térmica,  $\alpha$ , es la propiedad de un material que indica la cantidad de cambio unitario dimensional con un cambio unitario de temperatura.*

La letra griega alfa minúscula,  $\alpha$ , denota el coeficiente de expansión térmica.

Las unidades de  $\alpha$  se derivan de su definición. Si se enuncia de una manera un poco diferente,  $\alpha$  es la medida del cambio de longitud de un material por longitud unitaria con un cambio de temperatura de 1.0 grado. Por lo tanto, las unidades de  $\alpha$  en el sistema de unidades estadounidense serían:

$$\text{plg}/(\text{plg} \cdot ^\circ\text{F}) \text{ o } 1/^\circ\text{F} \text{ o } ^\circ\text{F}^{-1}$$

En unidades SI,  $\alpha$  estaría en:

$$\text{m}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C}) \text{ o } \text{mm}/(\text{mm} \cdot ^\circ\text{C}) \text{ o } 1/^\circ\text{C} \text{ o } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Para usarse en los cálculos, la última forma de cada tipo de unidad es la más conveniente. Sin embargo, la primera nos ayuda a recordar el significado físico del término.

De la definición del coeficiente de expansión térmica se desprende que el cambio de longitud  $\delta$  de un miembro estructural se puede calcular con la ecuación:



#### Expansión térmica

$$\delta = \alpha \cdot L \cdot \Delta t \quad (4-7)$$

en donde  $L$  = longitud original del miembro estructural  
 $\Delta t$  = cambio de temperatura

La tabla 4-1 da valores representativos del coeficiente de expansión de varios metales, cristal, madera de pino y concreto. El valor real de cualquier material varía un poco con la temperatura. Los valores de la tabla 4-1 son valores aproximadamente promedio en el intervalo de temperaturas desde 32 °F (0 °C) hasta 212 °F (100 °C).

La tabla 4-2 contiene valores de  $\alpha$  correspondientes a seis materiales plásticos que se seleccionaron. Nótese que los valores reales dependen en gran medida de la temperatura y de la inclusión de cualquier material de aporte en la resina plástica. Para cada plástico listado, los valores aproximados de  $\alpha$  corresponden a resina sin material de aporte y a resina 30% de vidrio.

**TABLA 4-1** Coeficientes de expansión térmica,  $\alpha$ , de algunos metales, vidrio cilindrado, madera y concreto.

Material	$\alpha$	
	$^{\circ}\text{F}^{-1}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$
<b>Acero, AISI</b>		
1020	$6.5 \times 10^{-6}$	$11.7 \times 10^{-6}$
1040	$6.3 \times 10^{-6}$	$11.3 \times 10^{-6}$
4140	$6.2 \times 10^{-6}$	$11.2 \times 10^{-6}$
Acero estructural	$6.5 \times 10^{-6}$	$11.7 \times 10^{-6}$
Hierro fundido gris	$6.0 \times 10^{-6}$	$10.8 \times 10^{-6}$
<b>Acero inoxidable</b>		
AISI 301	$9.4 \times 10^{-6}$	$16.9 \times 10^{-6}$
AISI 430	$5.8 \times 10^{-6}$	$10.4 \times 10^{-6}$
AISI 501	$6.2 \times 10^{-6}$	$11.2 \times 10^{-6}$
<b>Aleaciones de aluminio</b>		
2014	$12.8 \times 10^{-6}$	$23.0 \times 10^{-6}$
6061	$13.0 \times 10^{-6}$	$23.4 \times 10^{-6}$
7075	$12.9 \times 10^{-6}$	$23.2 \times 10^{-6}$
Latón, C36000	$11.4 \times 10^{-6}$	$20.5 \times 10^{-6}$
Bronce, C22000	$10.2 \times 10^{-6}$	$18.4 \times 10^{-6}$
Cobre, C14500	$9.9 \times 10^{-6}$	$17.8 \times 10^{-6}$
Magnesio, ASTM AZ63A-T6	$14.0 \times 10^{-6}$	$25.2 \times 10^{-6}$
Titanio, Ti-6Al-4V	$5.3 \times 10^{-6}$	$9.5 \times 10^{-6}$
Vidrio cilindrado	$5.0 \times 10^{-6}$	$9.0 \times 10^{-6}$
Madera (pino)	$3.0 \times 10^{-6}$	$5.4 \times 10^{-6}$
Concreto	$6.0 \times 10^{-6}$	$10.8 \times 10^{-6}$

**TABLA 4-2** Coeficientes de expansión térmica,  $\alpha$ , de plásticos seleccionados.

Material	$\alpha$	
	$^{\circ}\text{F}^{-1}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$
ABS-resina sin relleno		
ABS/relleno de fibra de vidrio	$53 \times 10^{-6}$	$95.4 \times 10^{-6}$
Acetal-resina sin relleno	$16 \times 10^{-6}$	$28.8 \times 10^{-6}$
Acetal/relleno de fibra de vidrio	$45 \times 10^{-6}$	$81.0 \times 10^{-6}$
Nylon 6/6-resina sin relleno	$22 \times 10^{-6}$	$39.6 \times 10^{-6}$
Nylon 6/6-relleno de fibra de vidrio	$45 \times 10^{-6}$	$81.0 \times 10^{-6}$
Policarbonato-resina sin relleno	$13 \times 10^{-6}$	$23.4 \times 10^{-6}$
Policarbonato/relleno de fibra de vidrio	$37 \times 10^{-6}$	$66.6 \times 10^{-6}$
Poliéster-resina sin relleno	$13 \times 10^{-6}$	$23.4 \times 10^{-6}$
Poliéster/relleno de fibra de vidrio	$53 \times 10^{-6}$	$95.4 \times 10^{-6}$
Poliestireno-resina sin relleno	$12 \times 10^{-6}$	$21.6 \times 10^{-6}$
Poliestireno/relleno de fibra de vidrio	$36 \times 10^{-6}$	$64.8 \times 10^{-6}$
	$19 \times 10^{-6}$	$34.2 \times 10^{-6}$

Los compuestos se describieron en el capítulo 2 como materiales que combinan una matriz con fibras de refuerzo hechas de diferentes materiales tales como vidrio, poliéster, aramida, carbón o grafito. Los materiales que constituyen la matriz pueden ser polímeros tales como poliéster o resina epóxica, cerámica o algunos metales como alu-

TABLA 4-3 Coeficientes de expansión térmica,  $\alpha$ , de compuestos seleccionados.

Material	$\alpha$			
	Longitudinal		Transversal	
	$^{\circ}\text{F}^{-1}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	$^{\circ}\text{F}^{-1}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$
Vidrio E/fibras epóxicas unidireccionales	$3.5 \times 10^{-6}$	$6.30 \times 10^{-6}$	$11 \times 10^{-6}$	$19.8 \times 10^{-6}$
Aramida/fibras epóxicas unidireccionales	$-1.1 \times 10^{-6}$	$-1.98 \times 10^{-6}$	$38 \times 10^{-6}$	$68.4 \times 10^{-6}$
Carbón/fibras epóxicas unidireccionales	$0.05 \times 10^{-6}$	$0.09 \times 10^{-6}$	$9 \times 10^{-6}$	$16.2 \times 10^{-6}$
Carbón/fibras epóxicas cuasi-isotrópicas	$1.6 \times 10^{-6}$	$2.88 \times 10^{-6}$	$1.6 \times 10^{-6}$	$2.88 \times 10^{-6}$

minio. El valor de  $\alpha$  en el caso de las fibras en general es mucho menor que en el caso de la matriz. Además, existen varias maneras de colocar las fibras en la matriz. Por consiguiente, el coeficiente de expansión térmica en el caso de compuestos es muy difícil de generalizar. La tabla 4-3 da valores representativos para unas cuantas formas de compuestos. Recúrrase al capítulo 2 para lo que se refiera a la descripción de los términos *unidireccional* y *cuasi-isotrópico*. En particular, con la colocación unidireccional de las fibras en la matriz, existe una dramática diferencia en el valor del coeficiente de expansión térmica como una función de la orientación del material. En la dirección longitudinal, alineado con las fibras, el bajo valor de  $\alpha$  correspondiente a las fibras tiende a producir un valor general bajo. Pero en la dirección transversal, las fibras no son muy efectivas y el valor general de  $\alpha$  es mucho más alto. Nótese, además, que en el caso del compuesto particular unidireccional aramida/fibras epóxicas listado, el valor de  $\alpha$  de hecho es negativo, lo que significa que este compuesto se contrae a medida que se incrementa la temperatura.

**Ejemplo 4-5** Una varilla de acero AISI 1040 se usa como eslabón en el mecanismo de dirección de un camión. Si su longitud nominal es de 56 plg, calcule su cambio de longitud cuando la temperatura cambia de  $-30^{\circ}\text{F}$  a  $110^{\circ}\text{F}$ .

**Solución** **Objetivo** Calcular el cambio de longitud del eslabón.

**Datos** Eslabón de acero AISI 1040; longitud =  $L = 56$  plg.  
Temperatura inicial =  $t_1 = -30^{\circ}\text{F}$ .  
Temperatura final =  $t_2 = 110^{\circ}\text{F}$ .

**Análisis** Úsese la ecuación (4-7). En la tabla 4-1,  $\alpha = 6.3 \times 10^{-6}^{\circ}\text{F}^{-1}$ .

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 110^{\circ}\text{F} - (-30^{\circ}\text{F}) = 140^{\circ}\text{F}$$

**Resultados**  $\delta = \alpha \cdot L \cdot \Delta t = (6.3 \times 10^{-6}^{\circ}\text{F}^{-1})(56 \text{ plg})(140^{\circ}\text{F}) = 0.049 \text{ plg}$ .

**Comentario** El significado de esta cantidad de deformación se tendría que evaluar en el diseño global del mecanismo de dirección del camión.

**Ejemplo 4-6** Una varilla de empuje del mecanismo de válvulas del motor de un automóvil tiene una longitud nominal de 203 mm. Si la varilla es de acero AISI 4140, calcule el alargamiento que causa un cambio de temperatura de  $-20^{\circ}\text{C}$  a  $140^{\circ}\text{C}$ .

**Solución** **Objetivo** Calcular el cambio de longitud de la varilla de empuje.

<b>Datos</b>	Varilla de acero AISI 4140; longitud = $L = 203$ mm. Temperatura inicial = $t_1 = -20$ °C. Temperatura final = $t_2 = 140$ °C.
<b>Análisis</b>	Se usa la ecuación (4-7). En la tabla 4-1, $\alpha = 11.2 \times 10^{-6}$ °C <sup>-1</sup> .

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 140 \text{ °C} - (-20 \text{ °C}) = 160 \text{ °C}$$

**Resultados**  $\delta = \alpha \cdot L \cdot \Delta t = (11.2 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1})(203 \text{ mm})(160 \text{ °C}) = 0.364 \text{ mm}$ .

**Comentario** Es importante que esta expansión se tenga en cuenta en el diseño de mecanismo de válvulas.

**Ejemplo 4-7** Un marco de ventana de aleación de aluminio 6061 es de 4.350 m de longitud y sostiene un vidrio de 4.347 m de longitud cuando la temperatura es de 35 °C. ¿A qué temperatura el marco de aluminio y la hoja de vidrio tendrían la misma longitud?

**Solución** **Objetivo** Calcular la temperatura a la que el marco de aluminio y el vidrio tendrían la misma longitud.

**Datos** El aluminio es una aleación 6061; en la tabla 4-1 se encuentra que  $\alpha_a = 23.4 \times 10^{-6}$  °C<sup>-1</sup>.  
Para el vidrio,  $\alpha_g = 9.0 \times 10^{-6}$  °C<sup>-1</sup>.  
Con  $t_1 = 35$  °C,  $L_{a1} = 4.350$  m;  $L_{g1} = 4.347$  m.

**Análisis** Se tendría que reducir la temperatura para que el aluminio y el vidrio tengan la misma longitud, puesto que aquél se contrae más rápido que el vidrio. Al disminuir la temperatura, el cambio de temperatura  $\Delta t$  sería el mismo tanto para el aluminio como para el vidrio. Después del cambio de temperatura, la longitud del aluminio sería:

$$L_{a2} = L_{a1} - \alpha_a L_{a1} \Delta t$$

donde el subíndice  $a$  se refiere al aluminio, 1 a la condición inicial, y 2 a la condición final. La longitud del vidrio sería:

$$L_{g2} = L_{g1} - \alpha_g L_{g1} \Delta t$$

Pero cuando el aluminio y la hoja de vidrio tienen la misma longitud,

$$L_{a2} = L_{g2}$$

Por lo tanto:

$$L_{a1} - \alpha_a L_{a1} \Delta t = L_{g1} - \alpha_g L_{g1} \Delta t$$

Si se resuelve para  $\Delta t$  se obtiene:

$$\Delta t = \frac{L_{a1} - L_{g1}}{\alpha_a L_{a1} - \alpha_g L_{g1}}$$

**Resultados**

$$\Delta t = \frac{4.350 \text{ m} - 4.347 \text{ m}}{(23.4 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(4.350 \text{ m}) - (9.0 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(4.347 \text{ m})}$$

$$= \frac{0.003}{(0.000102) - (0.000039)} \text{ }^\circ\text{C} = 48 \text{ }^\circ\text{C}$$

Entonces,  $t_2 = t_1 - \Delta t = 35 \text{ }^\circ\text{C} - 48 \text{ }^\circ\text{C} = -13 \text{ }^\circ\text{C}$

**Comentarios** Como este valor de temperatura queda comprendido dentro del intervalo de temperatura ambiente en un edificio, esta ventana podría crear una situación peligrosa. El marco de la ventana y el vidrio se contraerían sin esfuerzo hasta alcanzar una temperatura de  $-13 \text{ }^\circ\text{C}$ . Si la temperatura disminuyera aún más, el marco se contraería más rápido que el vidrio y se generaría esfuerzo en éste. Por supuesto, si el esfuerzo es lo bastante grande, el vidrio se podría romper y tal vez herir a los inquilinos del edificio. Se debe modificar la ventana para que haya una mayor diferencia de tamaño entre el vidrio y el marco de aluminio.

#### 4-4 ESFUERZO TÉRMICO

En la sección anterior, las piezas estructurales sometidas a cambios de temperatura se encontraban libres, de manera que podían dilatarse y contraerse con libertad. Si las piezas se sujetaran de tal modo que se impidiera la deformación, se generarían esfuerzos.

Considérese un miembro estructural de acero en un horno que se calienta mientras que los elementos a los cuales está conectado se mantienen a una temperatura más baja. Si se supone el caso ideal, los apoyos se considerarían rígidos e inmóviles. De este modo se impediría la expansión del elemento de acero.

Si se permitiera que la pieza de acero se expanda, se alargaría en una proporción de  $\delta = \alpha \cdot L \cdot \Delta t$ . Pero como está sujeta, esta cantidad representa la deformación total aparente del acero. Luego la deformación unitaria sería:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{\alpha \cdot L \cdot \Delta t}{L} = \alpha(\Delta t) \quad (4-8)$$

El esfuerzo resultante en la pieza se puede hallar por medio de:

$$\sigma = E\epsilon$$

o:

$$\sigma = E\alpha(\Delta t) \quad (4-9)$$

#### Esfuerzo térmico

**Ejemplo 4-8** Un miembro estructural de acero AISI 1020 en un horno experimenta un incremento de temperatura de  $95 \text{ }^\circ\text{F}$  mientras que se sujeta por sus extremos. Calcule el esfuerzo resultante en el acero.

**Solución** **Objetivo** Calcular el esfuerzo térmico en el acero.

**Datos** El acero es AISI 1020; en la tabla 4-1,  $\alpha = 6.5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{F}^{-1}$ ,  $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ ;  $\Delta t = 95 \text{ }^\circ\text{F}$ .

<b>Análisis</b>	Se usa la ecuación (4-9); $\sigma = E\alpha(\Delta t)$ .
<b>Resultados</b>	$\sigma = (30 \times 10^6 \text{ psi})(6.5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{F}^{-1})(95 \text{ }^\circ\text{F}) = 18\,500 \text{ psi}$
<b>Comentario</b>	El apéndice A-13 muestra la resistencia a la cedencia del acero recocido AISI 1020, en su forma más débil, como de 43 000 psi. Por consiguiente, el miembro estructural sería seguro.

**Ejemplo 4-9** Una varilla de aleación de aluminio 2014-T6 de una máquina se sujeta por sus extremos mientras se enfría a partir de 95 °C. ¿A qué temperatura el esfuerzo de tensión en la varilla sería igual a la mitad de la resistencia a la cedencia del aluminio si al principio se encuentra libre de esfuerzo?

**Solución** **Objetivo** Calcular la temperatura cuando  $\sigma = s_y/2$ .

**Datos** El aluminio es una aleación 2014-T6; en la tabla 4-1,  $\alpha = 23.0 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . En el apéndice A-17,  $s_y = 414 \text{ MPa}$ ;  $E = 73 \text{ GPa}$ ;  $t_1 = 95 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Análisis** Use la ecuación (4-9) y resuélvala para  $\Delta t$ .

$$\sigma = E\alpha(\Delta t)$$

$$\Delta t = \frac{\sigma}{E\alpha}$$

Sea el esfuerzo:

$$\sigma = \frac{s_y}{2} = \frac{414 \text{ MPa}}{2} = 207 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \text{Resultados } \Delta t &= \frac{\sigma}{E\alpha} = \frac{207 \text{ MPa}}{(73 \text{ GPa})(23.0 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})} \\ &= \frac{207 \times 10^6 \text{ Pa}}{(73 \times 10^9 \text{ Pa})(23.0 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})} = 123 \text{ }^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Como la varilla se encontraba libre de esfuerzo a 95 °C, la temperatura a la que el esfuerzo sería de 207 MPa es:

$$t = 95 \text{ }^\circ\text{C} - 123 \text{ }^\circ\text{C} = -28 \text{ }^\circ\text{C}$$

**Comentarios** El valor del esfuerzo de la mitad de la resistencia a la cedencia es un diseño por esfuerzo razonable para un miembro estructural estáticamente cargado. Así pues, si la temperatura fuera de menos de -28 °C, la seguridad de la varilla se comprometería.

#### 4-5 ELEMENTOS ESTRUCTURALES HECHOS DE MÁS DE UN MATERIAL

Cuando dos o más materiales en un miembro estructural de carga comparten la carga, se requiere un análisis especial para determinar qué porción de la carga soporta cada material. Habrá que considerar las propiedades elásticas de los materiales.

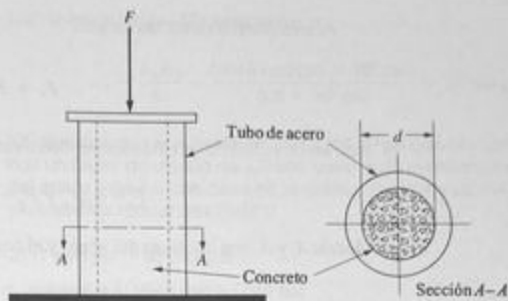


FIGURA 4-1 Poste de acero y concreto.

La figura 4-1 muestra un tubo de acero relleno de concreto que se usa para soportar parte de una gran estructura. La carga se distribuye uniformemente en la cara superior del tubo. Se desea determinar el esfuerzo tanto en el acero como en el concreto.

En la deducción de la solución a este problema se deben entender dos conceptos.

1. El acero y el concreto comparten la carga total  $F$  de tal modo que  $F = F_s + F_c$ .
2. Bajo la carga de compresión  $F$ , el apoyo compuesto se deforma y los dos materiales también se deforman en la misma cantidad. Es decir,  $\delta_s = \delta_c$ .

Como el acero y el concreto originalmente tenían la misma longitud:

$$\frac{\delta_s}{L} = \frac{\delta_c}{L}$$

Pero:

$$\frac{\delta_s}{L} = \epsilon_s \quad \text{y} \quad \frac{\delta_c}{L} = \epsilon_c$$

Asimismo:

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} \quad \text{y} \quad \epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c}$$

Por consiguiente:

$$\frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{\sigma_c}{E_c}$$

Al resolver para  $\sigma_s$  se obtiene:

$$\sigma_s = \frac{\sigma_c E_s}{E_c} \quad (4-10)$$

Esta ecuación da la relación entre los dos esfuerzos.

Ahora considérense las cargas:

$$F_s + F_c = F$$

Como ambos materiales están sometidos a esfuerzo axial:

$$F_s = \sigma_s A_s \text{ y } F_c = \sigma_c A_c$$

en donde  $A_s$  y  $A_c$  son las áreas del acero y el concreto, respectivamente. Por consiguiente:

$$\sigma_s A_s + \sigma_c A_c = F \quad (4-11)$$

Si se sustituye la ecuación (4-10) en la ecuación (4-11) se obtiene:

$$\frac{A_s \sigma_c E_s}{E_c} + \sigma_c A_c = F$$

Ahora, al resolver para  $\sigma_c$  se obtiene:

$$\sigma_c = \frac{FE_c}{A_s E_s + A_c E_c} \quad (4-12)$$

Las ecuaciones (4-10) y (4-11) ahora se pueden usar para calcular los esfuerzos en el acero y el concreto.

**Ejemplo 4-10** En el apoyo mostrado en la figura 4-1, el tubo es de acero cédula 40 de 6 plg estándar relleno por completo de concreto. Si la carga  $P$  es de 155 000 lb, calcule el esfuerzo en el concreto y el acero. Para el acero use  $E = 30 \times 10^6$  psi. Para el concreto use  $E = 3.3 \times 10^6$  psi para una resistencia nominal  $s_c = 3 000$  psi (véase la sección 2-10).

**Solución**

**Objetivo** Calcular el esfuerzo en el concreto y el acero.

**Datos** Carga =  $F = 155 000$  lb;  $E_s = 30 \times 10^6$  psi;  $E_c = 3.3 \times 10^6$  psi. En el apéndice A-12, para un tubo cédula 40 de 6 plg:  $A_s = 5.581$  plg<sup>2</sup>, diámetro interno =  $d = 6.065$  plg.

**Análisis** Se usa la ecuación (4-12) para calcular el esfuerzo en el concreto. Luego utilice la ecuación (4-10) para calcular  $\sigma_s$ . Todos los datos se conocen excepto  $A_c$ . Pero:

$$A_c = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (6.065 \text{ plg})^2}{4} = 28.89 \text{ plg}^2$$

**Resultados** Luego en la ecuación (4-12):

$$\sigma_c = \frac{(155 000 \text{ lb})(3.3 \times 10^6 \text{ psi})}{(5.581 \text{ plg}^2)(30 \times 10^6 \text{ psi}) + (28.89 \text{ plg}^2)(3.3 \times 10^6 \text{ psi})} = 1946 \text{ psi}$$



Con la ecuación (4-10) se obtiene:

$$\sigma_s = \frac{\sigma_c E_s}{E_c} = \frac{(1946 \text{ psi})(30 \times 10^6 \text{ psi})}{3.3 \times 10^6 \text{ psi}} = 17\,696 \text{ psi}$$

**Comentarios** Estos esfuerzos son bastante elevados. Si se quisiera tener por lo menos un factor de diseño de 2.0 con base en la resistencia a la cedencia del acero y de 4.0 con base en la resistencia nominal del concreto, las resistencias requeridas serían:

$$\text{Acero: } s_y = 2(17\,696 \text{ psi}) = 35\,392 \text{ psi}$$

$$\text{Concreto: } \sigma_c \text{ nominal} = 4(1946 \text{ psi}) = 7784 \text{ psi}$$

El acero podría ser semejante al AISI 1020 recocido o a cualquier otro de mayor resistencia. Una resistencia nominal de 3000 psi para el concreto no sería satisfactoria.

**Resumen.** El análisis del problema 4-10 se puede generalizar para cualquier situación en la que dos o más elementos estructurales hechos de diferentes materiales compartan las cargas siempre y cuando experimenten deformaciones iguales. Si se reemplazan los subíndices  $s$  y  $c$  en el análisis precedente por los subíndices más generales 1 y 2, las ecuaciones (4-12) y (4-10) se plantean como sigue:

$$\sigma_2 = \frac{FE_2}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \quad (4-13)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_2 E_1}{E_2} \quad (4-14)$$

## PROBLEMAS

### Deformación elástica

- 4-1.1 Un poste de abeto clase 2 tiene 6.0 pies de longitud y una sección transversal cuadrada de 3.50 plg de lado. ¿Qué tanto se acortaría cuando se somete a su carga de compresión permisible aplicada paralela a la veta?
- 4-2.M Determine el alargamiento de una tira de plástico de 0.75 mm de espesor por 12 mm de ancho y 375 mm de longitud cuando se somete a una carga de 90 N y se fabrica de a) vidrio con refuerzo de ABS o b) resina fenólica (véase el apéndice A-19).
- 4-3.1 Un cilindro hueco de aluminio 2014-T4 tiene un diámetro externo de 2.50 plg y un espesor de pared de 0.085 plg. Su longitud es de 14.5 plg. ¿Qué fuerza de compresión axial haría que el cilindro se acorte 0.005 plg? ¿Cuál es el esfuerzo resultante en el aluminio?
- 4-4.1 En un cajón de existencias de material se encontró

una barra metálica que parece estar hecha de aluminio o magnesio. Su sección transversal es cuadrada de 0.25 plg de lado. Analice dos métodos con los que se podría determinar de qué material se trata.

- 4-5.M Se va a diseñar un tirante para un automóvil. Debe soportar una carga repetida de 3500 N y no alargarse más de 0.12 mm en su longitud de 630 mm. Use un factor de diseño de 8 basado en la resistencia última y calcule el diámetro necesario de una varilla redonda que satisfaga estos requisitos utilizando a) Acero AISI 1020 laminado en caliente, b) Acero AISI 4140 OQT 700 y c) Aleación de aluminio 6061-T6. Compare la masa de las tres opciones.
- 4-6.M La porción sin roscar de un perno de acero tiene 12.0 mm de diámetro. Determine el alargamiento en una longitud de 220 mm si se aplica una fuerza de 17.0 kN.

- 4-7.M En la estructura de una aeronave, se diseña una varilla de 1.25 m de longitud y sección transversal cuadrada de 8.0 mm de lado. Calcule el alargamiento que experimentaría si se fabrica de a) titanio Ti-6Al-4V y b) acero inoxidable AISI 501 OQT 1000. La carga es de 5000 N.
- 4-8.I Un tirante de 13.0 pies en una armadura soldada se somete a una fuerza de 35 000 lb. Elija un ángulo de patas iguales de acero ASTM A36 que limite el esfuerzo a 21 600 psi. Luego calcule el alargamiento del ángulo debido a la fuerza. Use  $E = 29.0 \times 10^6$  psi para acero estructural.
- 4-9.I Un eslabón en un mecanismo es una barra rectangular de acero que se somete de manera alternada a una carga de tensión de 450 lb y a una de compresión de 50 lb. Sus dimensiones son: longitud = 8.40 plg, ancho = 0.25 plg, espesor = 0.125 plg. Calcule el alargamiento y la compresión del eslabón.
- 4-10.I Una barra de acero con su extremo superior fijo se somete a tres cargas axiales, como se muestra en la figura 4-2. El área de su sección circular es de 0.50 plg<sup>2</sup>. Determine la deflexión del extremo libre.

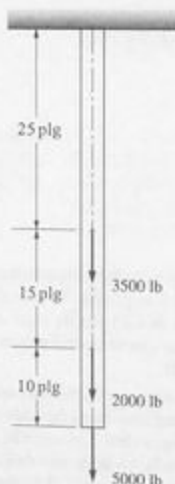


FIGURA 4-2 Barra del problema 4-10 sujeta a tensión axial.

- 4-11.I Un eslabón en una máquina empacadora automática es un tubo hueco de aluminio 6061-T6. Sus dimensiones son: diámetro externo = 1.250 plg, diámetro

interno = 1.126 plg, longitud = 36.0 plg. Calcule la fuerza necesaria para producir una deflexión de la barra de 0.050 plg. ¿Sería seguro el esfuerzo producido por la fuerza que se acaba de determinar, si esta se aplica repetidamente?

- 4-12.I Un tirante de una armadura se somete a una carga estática de 2500 lb. Sus dimensiones son: longitud = 8.75 pies, diámetro externo = 0.750 plg, diámetro interno = 0.563 plg. En primer lugar, especifique una aleación de aluminio que sea segura. Luego calcule el alargamiento del tirante.
- 4-13.M Un tubo hueco de aluminio 6061-T4, de 40 mm de largo, se usa como espaciador en una máquina y se somete a una fuerza de compresión axial de 18.2 kN. El diámetro externo del tubo es de 56.0 mm y el interno de 48.0 mm. Calcule la deflexión del tubo y el esfuerzo de compresión resultante.
- 4-14.I Un tirante de acero AISI 1020 CD tiene 135 pies de longitud y 0.375 plg de diámetro. Calcule el esfuerzo en el tirante y su deflexión cuando se somete a una fuerza de tensión de 1600 lb.
- 4-15.M Calcule el alargamiento total de la barra de titanio Ti-6Al-4V mostrada en la figura 1-24.
- 4-16.I Durante una prueba de una barra metálica se encontró que una fuerza de tensión axial de 10 000 lb produjo un alargamiento de 0.023 plg. Las dimensiones originales de la barra eran: longitud = 10.000 plg, diámetro = 0.750 plg. Calcule el módulo de elasticidad del metal. ¿De qué clase de metal estaba hecha la barra?
- 4-17.M La barra que ilustra la figura 1-25 soporta tres cargas. Calcule la deflexión del punto D con respecto al punto A. La barra es de plástico policarbonato.
- 4-18.I Una columna se compone de una base cilíndrica de concreto que soporta un tubo de acero de  $4 \times 4 \times 1/2$  cuadrado hueco estándar, de 8.60 pies de longitud. La base tiene 3.0 pies de longitud y 8.00 plg de diámetro. En primer lugar, especifique el concreto de la sección 2-10 con una resistencia nominal propia para soportar una carga de compresión de 64 000 lb. En seguida, si se supone que la columna no se pande, calcule la cantidad total en que la columna se acortará.
- 4-19.I Un cable eléctrico de cobre (C14500, duro) calibre 14 de 10.5 pies de longitud se fija rigidamente en el extremo superior de una viga. El diámetro del cable es de 0.064 plg. ¿Cuánto se alargaría si una persona que pesa 120 lb se cuelga del extremo inferior? ¿Cuánto se alargaría si la persona pesa 200 lb?

4-20.I Una cinta de medir como la que utilizan los carpinteros es de 25.00 pies de longitud y está hecha con una tira de acero plana con las dimensiones siguientes: ancho = 0.750 plg, espesor = 0.006 plg. Calcule el alargamiento que experimenta y el esfuerzo en el acero si se le aplica una fuerza de tensión de 25.0 lb.

4-21.I Se fabrica un poste con un tablón estándar de 4 x 4 (Apéndice A-4) de pino del sur clase 2, calcule la carga de compresión axial que podría soportar antes de que alcance su esfuerzo permisible de compresión paralelo a la veta. En seguida, si el poste es de 10.75 pies de longitud, calcule la cantidad que se acortaría por la acción de la carga mencionada.

4-22.M Con un hierro dúctil, ASTM A536, grado 60-40-18, se forma un perfil cuadrado hueco, de 200 mm de dimensión externa y 150 mm de dimensión interna. Calcule la carga que produciría un esfuerzo de compresión axial en el hierro de 200 MPa. En seguida, con esa carga, calcule el acortamiento del perfil a partir de su longitud original de 1.80 m.

4-23.M Un alambre de latón (C36000, duro) tiene un diámetro de 3.00 mm y una longitud inicial de 3.600 m. En esta condición, el extremo inferior, con una placa para aplicar una carga, está a 6.0 mm del suelo. ¿Cuántos kilogramos de plomo se tendrían que agregar a la placa para que apenas toque el suelo? ¿Cuál sería el esfuerzo en el alambre en ese momento?

4-24.M Calcule el alargamiento de la barra cuadrada AB que ilustra la figura 1-30 si es de 1.25 m de longitud y está hecha de aluminio 6061-T6.

#### Deformación térmica

4-25.I Una losa de concreto en una carretera es de 80 pies de longitud. Determine el cambio de longitud de la losa si la temperatura cambia de  $-30^{\circ}\text{F}$  a  $+110^{\circ}\text{F}$ .

4-26.M Un riel de acero laminado en caliente AISI 1040 para guía de ferrocarril es de 12.0 m de longitud. Determine el cambio de longitud del riel si la temperatura cambia de  $-34^{\circ}\text{C}$  a  $+43^{\circ}\text{C}$ .

4-27.M Determine el esfuerzo que se generaría en el riel del problema 4-26 si estuviera restringido por completo, lo que impediría que se expandiera.

4-28.M Las varillas de empuje que accionan las válvulas en un motor de seis cilindros son de acero AISI 1040 y de 625 mm de longitud y 8.0 mm de diámetro. Calcule el cambio de longitud de las varillas si su temperatura varía de  $-40^{\circ}\text{C}$  a  $+116^{\circ}\text{C}$  considerando que nada impide su dilatación.

4-29.M Si las varillas del problema 4-28 se instalan con tolerancia cero con respecto a otras piezas del mecanismo de válvulas a  $25^{\circ}\text{C}$ , calcule lo siguiente:

a) La tolerancia entre las piezas a  $-40^{\circ}\text{C}$ .

b) El esfuerzo en las varillas generado por la elevación de la temperatura a  $116^{\circ}\text{C}$ .

Suponga que las piezas en contacto son rígidas.

4-30.I La plataforma de un puente es una losa continua de concreto de 140 pies de longitud a  $30^{\circ}\text{F}$ . Determine el ancho de las juntas de expansión que se requiere en los extremos del puente, suponiendo que no se debe generar esfuerzo cuando la temperatura varíe de  $+30^{\circ}\text{F}$  a  $+110^{\circ}\text{F}$ .

4-31.I Cuando se instaló la plataforma del puente del problema 4-30, el ancho de la junta de expansión en cada extremo era de sólo 0.25 plg. ¿Qué esfuerzo se producirá si los apoyos son rígidos? Para el concreto use  $\epsilon_c = 4000$  psi y halle  $E$  en la sección 2-10.

4-32.I Para la plataforma del puente del problema 4-30, suponga que aquella debe hacer contacto con su apoyo justo a la temperatura de  $110^{\circ}\text{F}$ . Si la plataforma se ha de instalar cuando la temperatura sea de  $60^{\circ}\text{F}$ , ¿cuál debería ser la separación entre la plataforma y su apoyo?

4-33.M Se tiene que montar un anillo de acero inoxidable AISI 301 en una flecha que está a una temperatura de  $20^{\circ}\text{C}$  y cuyo diámetro es de 55.200 mm. El diámetro interno del anillo es de 55.100 mm. ¿A qué temperatura se debe calentar el anillo para que su diámetro sea de 55.300 mm y se pueda deslizar en la flecha?

4-34.M Cuando el anillo del problema 4-33 se monta en la flecha y luego se enfría de nuevo a  $20^{\circ}\text{C}$ , ¿qué esfuerzo de tensión se desarrollará en él?

4-35.M Un intercambiador de calor se arma disponiendo varios tubos de latón (C36000) en el interior de una coraza de acero inoxidable (AISI 430). Al principio, cuando la temperatura es de  $10^{\circ}\text{C}$ , los tubos son de 4.20 m de longitud y la coraza de 4.50 m de longitud, respectivamente. Determine el alargamiento de cada uno de los componentes cuando se calienten a  $85^{\circ}\text{C}$ .

4-36.I En Alaska, un tramo de oleoducto de acero AISI 1020 y que tiene 40 pies de largo, puede experimentar variaciones de temperatura desde  $-50^{\circ}\text{F}$  cuando está a temperatura ambiente de hasta  $+140^{\circ}\text{F}$  cuando por él circula petróleo caliente. Calcule el cambio de longitud del tramo de oleoducto en estas condiciones.

4-37.M A  $20^{\circ}\text{C}$  las dimensiones de una barra cuadrada de magnesio son de 30 mm de lado y 250.0 mm de longitud. Se coloca entre dos apoyos rígidos separados 250.1 mm entre sí. Acto seguido la barra se calienta a  $70^{\circ}\text{C}$  mientras que los apoyos no se mueven. Calcule el esfuerzo resultante en la barra.

- 4-38.M Una barra cuadrada, de 8.0 mm de lado, es de acero AISI 1040 estirado en frío y su longitud es de 175 mm. Se coloca sin holgura entre dos apoyos inmóviles sin ningún esfuerzo en ella. En seguida la temperatura se incrementa en 90 °C. ¿Cuál es el esfuerzo final en la varilla?
- 4-39.I La longitud de una varilla cuadrada de aluminio 6061-T4 a 75 °F es de 10.500 plg. Se coloca entre dos apoyos rígidos separados 10.505 plg entre sí. Si los apoyos no se mueven, describa lo que le ocurriría a la barra cuando su temperatura se eleve a 400 °F.
- 4-40.I Un nivel de carpintero se coloca sobre dos barras; una de resina de poliéster y la otra de titanio Ti-6Al-4V. La distancia entre las barras es de 24.00 plg. A una temperatura de 65 °F, el nivel se encuentra perfectamente nivelado y la longitud de las barras es de 30.00 plg. ¿Cuál sería el ángulo de inclinación del nivel cuando la temperatura se eleva a 212 °F?
- 4-41.I Cuando se fabricó, la longitud de una cinta de medir de acero (AISI 1040) era exactamente de 25.000 pies de largo a una temperatura de 68 °F. Calcule el error que resultaría si la cinta se usa a -15 °F.
- 4-42.M La figura 4-3 muestra dos barras de diferentes materiales separadas por 0.50 mm cuando la temperatura es de 20 °C. ¿A qué temperatura se tocarían?
- 4-43.M Un alambre de acero inoxidable (AISI 1030) se estira entre dos soportes rígidos de manera que se induce un esfuerzo de 40 MPa en el alambre a una temperatura de 20 °C. ¿Cuál sería el esfuerzo a -15 °C?
- 4-44.M En las condiciones descritas en el problema 4-43, ¿a qué temperatura sería nulo el esfuerzo en el alambre?

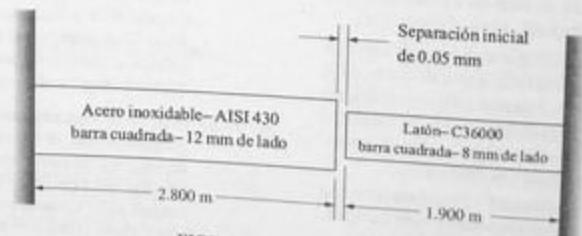


FIGURA 4-3 Problema 4-42.

## Elementos hechos de dos materiales

- 4-45.M Se fabrica un poste corto soldando placas de acero en forma de cuadrado, como se muestra en la figura 4-4 y en seguida se rellena de concreto el área interna. Calcule el esfuerzo en el acero y en el concreto si  $b = 150$  mm,  $t = 10$  mm y el poste soporta una carga axial de 900 kN. Véase la sección 2-10 en busca de las propiedades del concreto. Use  $\nu_c = 0.01$ .

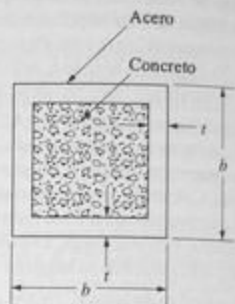


FIGURA 4-4 Poste de los problemas 4-45 y 4-46.

- 4-46.I Se fabrica un poste corto y se rellena de concreto un tubo de acero estándar de  $6 \times 6 \times 1/2$ , como se muestra en la figura 4-4. El esfuerzo permisible del acero es de 21 600 psi. La resistencia nominal del concreto es de 6000 psi pero, en este caso, el esfuerzo se debe limitar a 1500 psi. Véase la sección 2-10 donde se da el módulo de elasticidad del concreto. Calcule la carga permisible en el poste.
- 4-47.I Se va a diseñar un poste corto para que soporte una carga de compresión axial de 500 000 lb. Se tiene que fabricar soldando placas de acero A36 de 1/2 plg de espesor en forma de cuadrado y llenando el área interna de concreto, como se muestra en la

figura 4-4. Se requiere determinar la dimensión del lado  $b$  del poste con el objeto de limitar el esfuerzo en el acero a no más de 21 600 psi y en el concreto a no más de 1500 psi. Véase la sección 2-10 donde se dan las propiedades del concreto. Use  $s_c = 6000$  psi.

- 4-48.M Los dos discos de la figura 4-5 están conectados por medio de cuatro varillas. Todas las varillas son de 6.0 mm de diámetro y de la misma longitud. Dos varillas son de acero ( $E = 207$  GPa) y dos de aluminio ( $E = 69$  GPa). Calcule el esfuerzo en cada varilla cuando se aplica una fuerza axial de 11.3 kN a los discos.

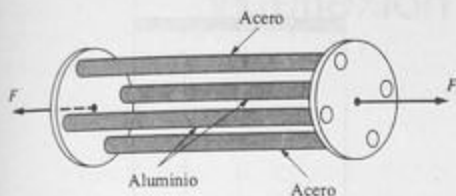


FIGURA 4-5 Problema 4-48.

- 4-49.M Se utiliza un arreglo de tres alambres para colgar una pieza fundida de 2265 kg de tal modo que los alambres soporten cargas simétricas (véase la figura 4-6). Los dos alambres externos son de acero

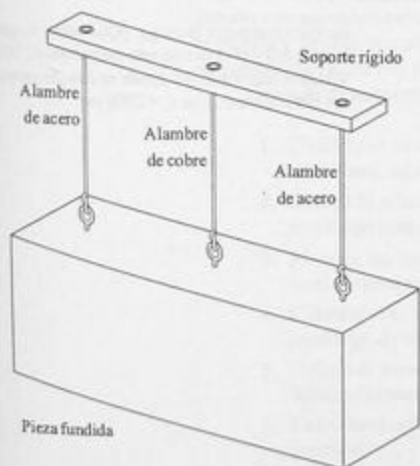


FIGURA 4-6 Problema 4-49.

ro inoxidable AISI 430, enteramente duro. El de en medio es de cobre duro, C17000. Los tres alambres tienen el mismo diámetro y longitud. Determine el diámetro que se necesita de los alambres si ninguno debe soportar un esfuerzo de más de la mitad de su resistencia a la cedencia.

- 4-50.M La figura 4-7 muestra una carga aplicada a un elemento cilíndrico interno inicialmente 0.12 mm más largo que un segundo tubo hueco concéntrico. ¿Cuál sería el esfuerzo en ambos elementos si se aplica una carga total de 350 kN?

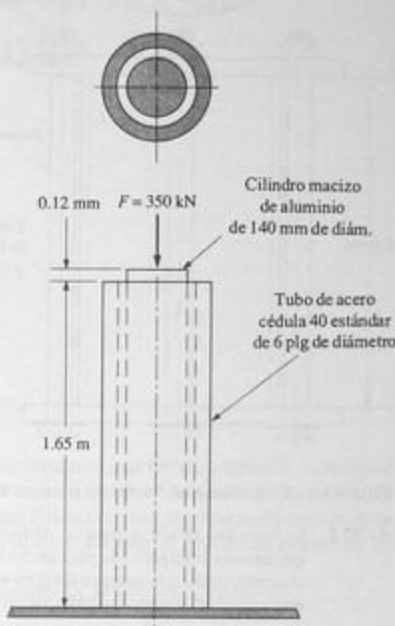


FIGURA 4-7 Barra de aluminio del problema 4-50, dentro de un tubo de acero sujeta a compresión axial.

- 4-51.M La figura 4-8 muestra un cilindro de aluminio con tapas en sus extremos que se mantienen en posición con cuatro tensores de acero. Se genera una fuerza de sujeción al apretar las tuercas en los extremos de los tensores. Calcule el esfuerzo en el cilindro y los tensores si las tuercas se hacen girar media vuelta más después de apretarlas a mano.

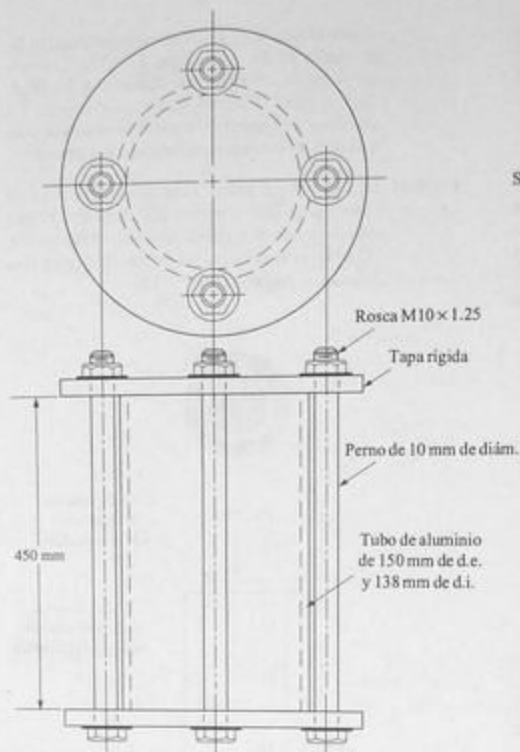


FIGURA 4-8 Tirantes en el cilindro del problema 4-51.

- 4-52.1 Se hace una columna para un edificio de modo que se embute un perfil de patin ancho W6 x 15 en concreto, como se muestra en la figura 4-9. El concreto protege al acero del calor de un incendio y

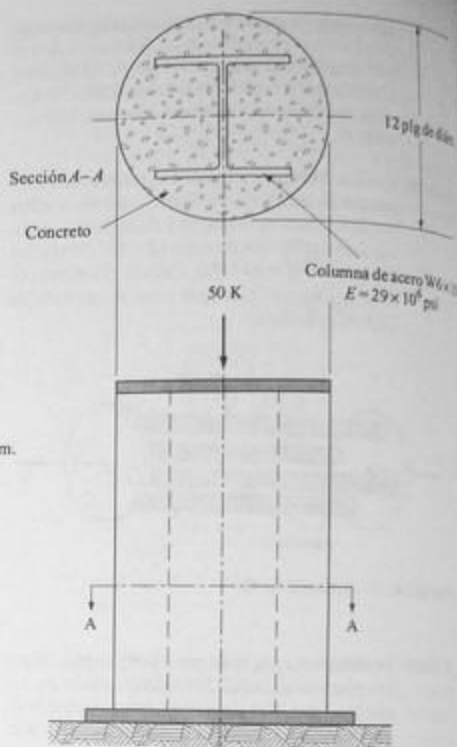


FIGURA 4-9 Columna de acero embutida en concreto del problema 4-52.

también comparte la carga. ¿Qué esfuerzo genera en el acero y el concreto una carga total de 50 kip? Véase la sección 2-10 donde se dan las propiedades del concreto. Use  $s_c = 2000$  psi.



# 5

## Esfuerzo cortante torsional y deflexión torsional

### 5-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Torsión se refiere a la carga de un miembro estructural que tiende a torcerlo. Semejante carga se llama *par de torsión*, *momento de torsión* o *par*. Cuando se aplica un par de torsión a un miembro estructural, tal como una flecha circular, se genera *esfuerzo cortante* en ella y se crea una *deflexión torsional*, la cual produce un ángulo de torsión en un extremo de la flecha con respecto al otro.

Después de terminar el estudio de este capítulo, el lector será capaz de:

1. Definir *par de torsión* y calcular el par de torsión que se ejerce en un miembro estructural sujeto a una carga torsional.
2. Definir la relación entre las tres variables críticas que intervienen en la transmisión de potencia: potencia, par de torsión y velocidad de rotación.
3. Manejar las unidades de potencia, par de torsión y velocidad de rotación tanto en el sistema métrico decimal como en el sistema estadounidense.
4. Calcular el esfuerzo cortante máximo en un miembro estructural sometido a una carga de torsión.
5. Definir el *momento polar de inercia* y calcular su valor para flechas redondas sólidas (o macizas) y huecas.
6. Calcular el esfuerzo cortante en un punto cualquiera de un elemento sometido a torsión.
7. Especificar un diseño conveniente por esfuerzo cortante para un miembro estructural sometido a torsión.

8. Definir el *módulo de sección polar* y calcular su valor para flechas redondas sólidas y huecas.
9. Determinar el diámetro que se requiere de una flecha para que soporte, con seguridad, un par de torsión dado.
10. Comparar el diseño de flechas sólidas y huecas con base en la masa de las mismas requerida para soportar un cierto par de torsión al mismo tiempo que se limita el esfuerzo cortante torsional a un cierto valor de diseño.
11. Aplicar factores de concentración de esfuerzo a elementos estructurales que se someten a torsión.
12. Calcular el ángulo de torsión de un miembro estructural que se somete a torsión.
13. Definir el *módulo de cortante de elasticidad*.
14. Analizar el método para calcular el esfuerzo cortante y la deflexión torsional en el caso de elementos estructurales de secciones transversales no circulares.
15. Describir las formas generales de elementos estructurales que disponen de una rigidez torsional relativamente elevada.

## 5-2 PAR DE TORSIÓN, POTENCIA Y VELOCIDAD DE ROTACIÓN

Una tarea necesaria cuando se trata de calcular el esfuerzo cortante torsional y la deflexión torsional es la comprensión del concepto de *par de torsión* y la relación entre las tres variables críticas que intervienen en la transmisión de potencia: *par de torsión*, *potencia* y *velocidad de rotación*.

La figura 5-1 muestra una llave de cubo con extensión que se utiliza para apretar un perno. El par de torsión, que se aplica tanto al perno, como a la extensión, es el producto

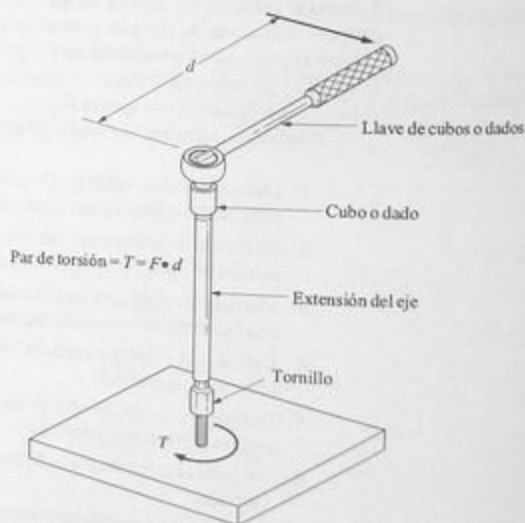


FIGURA 5-1 Llave con la que se aplica un par de torsión a un tornillo.



de la fuerza aplicada y la distancia de la línea de acción de la fuerza al eje del perno.  
Es decir:



Par de torsión

$$\text{par de torsión} = T = F \times d \quad (5-1)$$

Así pues, el par de torsión se expresa en las unidades de *fuerza por distancia*, las cuales son N·m en el sistema métrico y lb·pie o lb·pie en el sistema de medidas estadounidense.

**Ejemplo 5-1** Para la llave de la figura 5-1, calcule la magnitud del par de torsión que se aplicó al perno si se ejerce una fuerza de 50 N en un punto a 250 mm del eje del cubo.

**Solución** La ecuación (5-1) da:

$$T = F \times d = (50 \text{ N}) (250 \text{ mm}) \times \frac{1 \text{ m}}{1000 \text{ mm}} = 12.5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

La figura 5-2 muestra el sistema propulsor de un bote. La potencia que se genera por el motor fluye a través de la transmisión y la flecha motriz hacia la hélice, la cual impulsa al bote hacia adelante. El cigüeñal en el interior del motor, las diversas flechas de transmisión de potencia que componen la transmisión y la flecha motriz experimentan torsión. La magnitud del par de torsión en una flecha de transmisión de potencia depende de la cantidad de potencia que soporta y de la velocidad de rotación, según la siguiente relación:

$$\text{potencia} = \text{par de torsión} \times \text{velocidad de rotación}$$



Potencia

$$P = T \times n \quad (5-2)$$

Ésta es una relación de suma utilidad porque, con dos valores que se conozcan de  $P$ ,  $n$  o  $T$ , se puede calcular el tercero.

Ha de prestarse una especial atención a las unidades cuando se trabaje con par de torsión, potencia y velocidad de rotación. Las unidades apropiadas del SI y del sistema estadounidense se repasan a continuación.

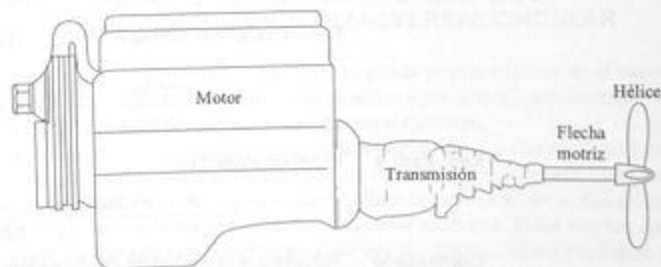


FIGURA 5-2 Sistema de transmisión de potencia de un bote.


### Sistema métrico decimal.

La potencia se define como la velocidad de transferencia de energía.

En el SI, el *joule* es la unidad estándar de energía y equivale a N·m, la unidad estándar de par de torsión. Es decir:

$$1.0 \text{ J} = 1.0 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Luego la potencia se define como:

 Unidades del SI  
de potencia

$$\text{potencia} = \frac{\text{energía}}{\text{tiempo}} = \frac{\text{joule}}{\text{segundo}} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{s}} = \text{watt} = \text{W} \quad (5-2)$$

Obsérvese que 1.0 J/s se define como 1.0 watt (1.0 W). El watt es una unidad algo pequeña, por lo que a menudo se usa el kilowatt (1.0 kW = 1000 W).

La unidad estándar de velocidad de rotación en el SI es *radianes por segundo*, rad/s. Con frecuencia, sin embargo, la velocidad de rotación se expresa en revoluciones por minuto, rpm. La conversión que se necesita, se ilustra a continuación, al convertir 1750 rpm en rad/s.

$$n = \frac{1750 \text{ rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 183 \text{ rad/s}$$

Cuando se utiliza  $n$  en rad/s en la ecuación (5-2), el radián no se considera como *unidad*, tal como se ilustra en el ejemplo siguiente.

---

**Ejemplo 5-2** La flecha motriz del bote que se ilustra en la figura 5-2 transmite 95 kW de potencia cuando gira a 525 rpm. Calcule el par de torsión en la flecha.

**Solución** **Objetivo** Calcular el par de torsión en la flecha.

**Datos**  $P = 95 \text{ kW} = 95\,000 \text{ W} = 95\,000 \text{ N}\cdot\text{m/s}$ ;  $n = 525 \text{ rpm}$

**Análisis** La ecuación (5-2) se resolverá para  $T$  con el fin de calcular el par de torsión.

$$P = Tn; \text{ luego, } T = P/n$$

Pero  $n$  debe expresarse en rad/s, como a continuación se determina:

$$n = \frac{525 \text{ rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 55.0 \text{ rad/s}$$

**Resultados** El par de torsión es:

$$T = \frac{P}{n} = \frac{95\,000 \text{ N}\cdot\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{55.0 \text{ rad/s}} = 1727 \text{ N}\cdot\text{m}$$

**Comentario** Nótese que la unidad de radián se ignoró en los cálculos.

**Unidades estadounidenses.** Las unidades características de par de torsión, potencia y velocidad de rotación en el sistema estadounidense de medidas son:

$$T = \text{par de torsión (lb} \cdot \text{plg)}$$

$$n = \text{velocidad de rotación (rpm)}$$

$$P = \text{potencia (caballos de fuerza, hp)}$$

Nótese que  $1.0 \text{ hp} = 6600 \text{ lb} \cdot \text{plg/s}$ . Entonces, las conversiones de unidades necesarias para garantizar la compatibilidad de las unidades son:

$$\text{potencia} = T(\text{lb} \cdot \text{plg}) \times n \left( \frac{\text{rev}}{\text{min}} \right) \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{1 \text{ hp}}{6600 \text{ lb} \cdot \text{plg/s}}$$

o:



Unidades  
estadounidenses  
de potencia

$$\text{potencia} = \frac{Tn}{63\,000} \quad (5-4)$$

**Ejemplo 5-3** Calcule la potencia, en caballos de fuerza, transmitida por una flecha que genera un par de torsión de  $15\,000 \text{ lb} \cdot \text{plg}$  a  $525 \text{ rpm}$ .

**Solución** **Objetivo** Calcular la potencia transmitida por la flecha.

**Datos**  $T = 15\,000 \text{ lb} \cdot \text{plg}$ ;  $n = 525 \text{ rpm}$

**Análisis** Se usará la ecuación (5-4) directamente porque  $T$  y  $n$  están en las unidades propias de  $\text{lb} \cdot \text{plg}$  y  $\text{rpm}$ . La potencia se calculará en caballos de fuerza.

**Resultados** La potencia es:

$$P = \frac{Tn}{63\,000} = \frac{(15\,000)(525)}{63\,000} = 125 \text{ hp}$$

### 5-3 ESFUERZO CORTANTE TORSIONAL EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES DE SECCIÓN TRANSVERSAL CIRCULAR

Cuando un miembro estructural se somete a un par de torsión externo, en el material del que está hecho el miembro estructural se desarrolla un par de torsión resistente interno, el cual es el resultado de los esfuerzos generados en el material.

La figura 5-3(a) muestra una barra circular que se sometió a un par de torsión,  $T$ . La sección  $N$  gira con respecto a la sección  $M$  como se indica. Si se aísla un elemento en la superficie de la barra, se verá que se sometió a fuerzas cortantes que actúan en las caras paralelas a las secciones transversales  $M$  y  $N$ , como se ilustra. Estas fuerzas cortantes crean esfuerzos cortantes en el elemento. Para que el elemento sujeto a esfuerzo esté en equilibrio, en las caras superior e inferior del elemento deben actuar esfuerzos cortantes de la misma magnitud.

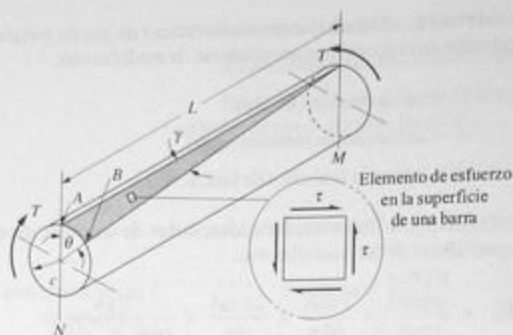


FIGURA 5-3 Esfuerzo cortante torsional en una barra circular.

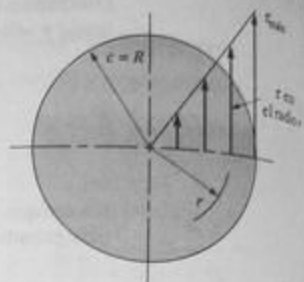



FIGURA 5-4 Distribución del esfuerzo cortante en una sección transversal de la barra.

El elemento sometido a esfuerzo cortante de la figura 5-3 en realidad es el mismo de la figura 1-15 utilizado en el análisis del esfuerzo cortante directo. Si bien la forma en que se producen los esfuerzos difiere, la naturaleza del esfuerzo cortante torsional es la misma del esfuerzo cortante directo en el caso de un elemento infinitesimal.

Cuando la barra circular se somete al par de torsión externo, el material en cada una de sus secciones se deforma de tal modo que las fibras en la superficie externa experimentan la máxima deformación. En el eje central de la barra, no se produce deformación. Entre el centro y la superficie externa, existe una variación lineal de la deformación con la posición radial  $r$ . Como el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación, se puede decir que el esfuerzo cortante máximo ocurre en la superficie externa, que existe una variación lineal del esfuerzo con la posición radial  $r$  y que en el centro ocurre un nivel de esfuerzo nulo. La figura 5-4 ilustra estas observaciones.

La derivación de la fórmula para el esfuerzo cortante máximo que actúa en la superficie externa de la barra se demostrará en la siguiente sección. Por ahora, se establece la fórmula para el esfuerzo cortante torsional como:


**Fórmula para el esfuerzo cortante torsional**


$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad (5-5)$$

en donde  $T$  = par de torsión aplicado en la sección de interés

$c$  = radio de la sección transversal

$J$  = momento polar de inercia de la sección transversal circular


La fórmula para  $J$  de una sección transversal sólida circular se deduce en la sección 5-5. Por el momento, se muestran los resultados de la deducción como:


**Momento polar de inercia de una barra circular**

$$J = \frac{\pi D^4}{32} \quad (5-6)$$

en donde  $D$  es el diámetro de la flecha; es decir,  $D = 2R$ .

Por la variación lineal del esfuerzo y la deformación con la posición en la barra como se ilustra en la figura 5-4, el esfuerzo,  $\tau$ , en cualquier posición radial,  $r$ , puede calcularse por medio de:

 **Esfuerzo cortante en cualquier radio**

$$\tau = \tau_{\max} \frac{r}{c} \quad (5-7)$$

Las ecuaciones (5-5), (5-6) y (5-7) se usan para calcular el esfuerzo cortante en un punto cualquiera de una barra circular sujeta a un par de torsión externo. Los ejemplos siguientes ilustran el uso de estas ecuaciones.

**Ejemplo 5-4** Calcule el esfuerzo cortante torsional máximo en la porción media, donde el diámetro es de 9.5 mm, de la extensión de la llave de cubo que se exhibe en la figura 5-1. El par de torsión aplicado es de 10.0 N·m.

**Solución** **Objetivo** Calcular el esfuerzo cortante torsional máximo en la extensión.

**Datos** Par de torsión =  $T = 10.0 \text{ N}\cdot\text{m}$ ; diámetro =  $D = 9.5 \text{ mm}$

**Análisis** Se usa la ecuación (5-6) para calcular  $J$  y la ecuación (5-5) para calcular el esfuerzo cortante máximo. Además,  $c = D/2 = 9.5 \text{ mm}/2 = 4.75 \text{ mm}$ .

**Resultados**

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (9.5 \text{ mm})^4}{32} = 800 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} = \frac{(10 \text{ N}\cdot\text{m})(4.75 \text{ mm})}{800 \text{ mm}^4} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 59.4 \text{ N/mm}^2 = 59.4 \text{ MPa}$$

**Comentario** Este nivel de esfuerzo ocurrirá en todos los puntos de la superficie de la porción circular de la extensión.

**Ejemplo 5-5** Calcule el esfuerzo cortante torsional máximo que se desarrollará en una flecha circular sólida de 1.25 plg de diámetro, si transmite 125 hp cuando gira a 525 rpm.

**Solución** **Objetivo** Calcular el esfuerzo cortante torsional máximo en la flecha.

**Datos** Potencia =  $P = 125 \text{ hp}$ ; velocidad de rotación =  $n = 525 \text{ rpm}$   
Diámetro de la flecha =  $D = 1.25 \text{ plg}$

**Análisis** Se resuelve la ecuación (5-4) para el par de torsión,  $T$ . Se usa la ecuación (5-6) para calcular  $J$  y la ecuación (5-5) para calcular el esfuerzo cortante máximo. Por otra parte,  $c = D/2 = 1.25 \text{ plg}/2 = 0.625 \text{ plg}$ .

**Resultados** Ecuación (5-4):

$$\text{Potencia} = P = \frac{Tn}{63\,000}$$

Si se resuelve para el par de torsión  $T$  se obtiene:

$$T = \frac{63\,000P}{n}$$

Recuérdese que esta ecuación da el valor del par de torsión de manera directa en  $\text{lb} \cdot \text{plg}$  cuando  $P$  está en caballos de fuerza y  $n$  en rpm. Por lo tanto:

$$T = \frac{63\,000(125)}{525} = 15\,000 \text{ lb} \cdot \text{plg}$$

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi(1.25 \text{ plg})^4}{32} = 0.240 \text{ plg}^4$$

y, por último:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} = \frac{(15\,000 \text{ lb} \cdot \text{plg})(0.625 \text{ plg})}{0.240 \text{ plg}^4} = 39\,100 \text{ psi}$$

**Comentario** Este nivel de esfuerzo ocurrirá en todos los puntos de la superficie de la flecha.

## 5-4 DERIVACIÓN DE LA FÓRMULA PARA EL ESFUERZO CORTANTE TORSIONAL

La forma estándar de la fórmula para el esfuerzo cortante torsional en una barra circular que se sometió a un par de torsión externo se presentó como la ecuación (5-5) y su uso se ilustró en los ejemplos 5-4 y 5-5. Esta sección demostrará la derivación de dicha fórmula. Las figuras 5-3 y 5-4 ilustran la naturaleza general de las cargas de torsión y el efecto del par de torsión en el comportamiento de la barra circular.

En esta derivación, se supone que el material de la barra se comporta según la ley de Hooke; esto es, el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación. Además, las propiedades de la barra son homogéneas e isotrópicas; es decir, el material reacciona igual sin cuidado de la dirección de las cargas aplicadas. Asimismo, se supone que la barra es de sección transversal constante cerca de la sección de interés.

Si se consideran dos secciones transversales  $M$  y  $N$ , en diferentes lugares de la barra, y si la sección  $N$  gira un ángulo  $\theta$  con respecto a la sección  $M$ , las fibras del material experimentarán una deformación que alcanza su valor máximo en la superficie externa de la barra y que varía linealmente con la posición radial hasta un valor nulo en el centro de la misma. Puesto que en el caso de materiales elásticos que obedecen la ley de Hooke, el esfuerzo es proporcional a la deformación, el esfuerzo máximo también ocurrirá en el exterior de la barra, como se muestra en la figura 5-4. Se muestra también la variación lineal del esfuerzo,  $\tau$ , con la posición radial,  $r$ , en la sección transversal. Así pues, por la proporción de triángulos semejantes:

$$\frac{\tau}{r} = \frac{\tau_{\text{máx}}}{c} \quad (5-8)$$

Por consiguiente, el esfuerzo cortante en cualquier radio puede expresarse como una función del esfuerzo cortante máximo que actúa en la superficie externa de la flecha:

$$\tau = \tau_{\max} \times \frac{r}{c} \quad (5-9)$$

Es de hacerse notar que el esfuerzo cortante  $\tau$  actúa de modo uniforme en una pequeña área anular,  $dA$ , de la flecha, como se ilustra en la figura 5-5. Ahora bien, como la fuerza es igual al esfuerzo por el área, la fuerza en el área  $dA$  es:

$$dF = \tau dA = \underbrace{\tau_{\max} \frac{r}{c}}_{\text{esfuerzo}} \times \underbrace{dA}_{\text{área}}$$

El siguiente paso es considerar que el par de torsión  $dT$  que se generó por esta fuerza es el producto de  $dF$  por la distancia radial a  $dA$ . Luego:

$$dT = dF \times r = \underbrace{\tau_{\max} \frac{r}{c}}_{\text{fuerza}} dA \times \underbrace{r}_{\text{radio}} = \tau_{\max} \frac{r^2}{c} dA$$

Esta ecuación es el par de torsión resistente interno desarrollado en la pequeña área  $dA$ . El par de torsión total que actúa en toda el área sería la suma de todos los pares de torsión individuales que actúan en todas las áreas de la sección transversal. El proceso de suma se logra mediante la técnica matemática de integración, que a continuación se ilustra:

$$T = \int_A dT = \int_A \tau_{\max} \frac{r^2}{c} dA$$

En el proceso de integración, las constantes tales como  $\tau_{\max}$  y  $c$  se sacan del signo integral, y la ecuación se escribe como:

$$T = \frac{\tau_{\max}}{c} \int_A r^2 dA \quad (5-10)$$

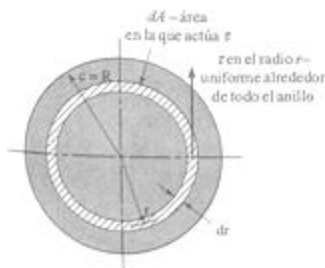


FIGURA 5-5 El esfuerzo cortante  $\tau$  en el radio  $r$  que actúa en el área  $dA$ .

En mecánica, el término  $\int r^2 dA$  recibe el nombre de *momento polar de inercia* y se identifica con el símbolo  $J$ . La derivación de  $J$  se da en la siguiente sección. La ecuación (5-10) se escribe entonces:

$$T = \tau_{\max} \frac{J}{c}$$

o:

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad (5-11)$$

El método de evaluar  $J$  se describe en la siguiente sección.

La ecuación (5-11), que es idéntica a la ecuación (5-5), se usa para calcular el esfuerzo cortante máximo en una barra circular sujeta a torsión. El esfuerzo cortante máximo se presenta en cualquier parte de la superficie exterior de la barra.

## 5-5 MOMENTO POLAR DE INERCIA DE BARRAS CIRCULARES SÓLIDAS

Recurre a la figura 5-5 que muestra una sección transversal circular sólida. Para evaluar  $J$  con:

$$J = \int r^2 dA$$

se considera que  $dA$  es el área de un pequeño anillo de espesor  $dr$  que se localiza a una distancia  $r$  del centro de la sección.

Con  $dr$  de pequeña magnitud, el área es la de un listón de longitud igual a la circunferencia del anillo por su espesor.

$$dA = \underbrace{2\pi r}_{\text{circunferencia de un anillo en el radio } r} \times \underbrace{dr}_{\text{espesor del anillo}}$$

Por consiguiente, el momento polar de inercia de toda la sección transversal se determina cuando se integra desde  $r=0$  en el centro de la barra hasta  $r=R$  en la superficie exterior.

$$J = \int_0^R r^2 dA = \int_0^R r^2 (2\pi r) dr = \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{2\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

En general, conviene más usar el diámetro en lugar del radio. Luego como  $R=D/2$ :

$$J = \frac{\pi(D/2)^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \quad (5-12)$$



## 5-6 ESFUERZO CORTANTE TORSIONAL Y MOMENTO POLAR DE INERCIA DE UNA BARRA CIRCULAR HUECA

Más adelante se demostrará que existen muchas ventajas al utilizar una barra circular hueca, en comparación con una sólida, para transmitir un par de torsión. En esta sección se estudia el método de calcular el esfuerzo cortante máximo y el momento polar de inercia de una barra hueca.

La figura 5-6 muestra la geometría básica de una barra hueca. Las variables son:

$R_i$  = radio interno

$D_i$  = diámetro interno

$R_o$  = radio externo =  $c$

$D_o$  = diámetro externo

La lógica y los detalles del desarrollo de la fórmula para esfuerzo cortante torsional como se muestran en la sección 5-4 se aplican también tanto a una barra hueca como a una sólida. La diferencia entre ellas radica en la evaluación del momento polar de inercia, como se verá más adelante. Por consiguiente, se puede usar la ecuación (5-5) o la (5-11) para calcular el esfuerzo cortante torsional máximo ya sea en una barra sólida o en una hueca.

Además, tal como se ilustra en la figura 5-6, el esfuerzo cortante máximo ocurre en la superficie externa de la barra y el esfuerzo varía linealmente con la posición radial en el interior de la barra. El esfuerzo cortante mínimo ocurre en la superficie interna. El esfuerzo cortante en cualquier posición radial se calcula con la ecuación (5-7) o la (5-9).

**Momento polar de inercia de una barra hueca.** La derivación de la fórmula del momento polar de inercia de una barra hueca es similar a la que se usó en el caso de la

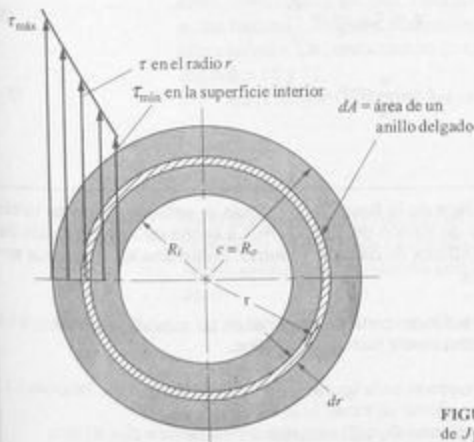


FIGURA 5-6 Notación de las variables utilizadas en la derivación de  $J$  para una barra circular hueca.

barra sólida. Recúrrase de nuevo a la figura 5-6 por lo que se refiere a la geometría. Partiendo de la definición básica del momento polar de inercia:

$$J = \int r^2 dA$$

como con anterioridad,  $dA = 2\pi r dr$ . Pero en el caso de la barra hueca,  $r$  varía únicamente de  $R_i$  a  $R_o$ . Luego:

$$J = \int_{R_i}^{R_o} r^2 (2\pi r) dr = 2\pi \int_{R_i}^{R_o} r^3 dr = \frac{2\pi(R_o^4 - R_i^4)}{4}$$

$$J = \frac{\pi}{2}(R_o^4 - R_i^4)$$

Si se sustituye  $R_o = D_o/2$  y  $R_i = D_i/2$  se obtiene:

$$J = \frac{\pi}{32}(D_o^4 - D_i^4) \quad (5-13)$$



Momento polar de inercia de una barra hueca

Ésta es la ecuación para el momento polar de inercia de una barra circular hueca.

**Resumen de las relaciones para esfuerzos cortantes torsionales en barras circulares huecas.**



Esfuerzo cortante máximo

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad (5-11)$$

$\tau_{\max}$  ocurre en la superficie externa de la barra, donde  $c$  es el radio de la barra.



Esfuerzo cortante en cualquier posición radial  $r$

$$\tau = \tau_{\max} \frac{r}{c} = \frac{Tr}{J} \quad (5-9)$$



Momento polar de inercia de barras huecas

$$J = \frac{\pi}{32}(D_o^4 - D_i^4) \quad (5-13)$$

**Ejemplo 5-6**

Para la flecha motriz de hélice de la figura 5-2, calcule el esfuerzo cortante torsional cuando se transmite un par de torsión de 1.76 kN·m. La flecha es un tubo hueco de 60 mm de diámetro externo y 40 mm de diámetro interno. Determine los esfuerzos en las superficies externa e interna.

**Solución**    **Objetivo**

Calcular el esfuerzo cortante torsional en las superficies externa e interna de la flecha motriz hueca de la hélice.

**Datos**

La flecha mostrada en la figura 5-2. Par de torsión =  $T = 1.76 \text{ kN}\cdot\text{m} = 1.76 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}$ .

Diámetro externo =  $D_o = 60 \text{ mm}$ ; diámetro interno =  $D_i = 40 \text{ mm}$ .

**Análisis** El cálculo final del esfuerzo cortante torsional en la superficie externa se hará con la ecuación (5-11). La ecuación (5-9) se usará para calcular el esfuerzo en la superficie interna. El momento polar de inercia se calculará con la ecuación (5-13). Y ahora,  $c = D_o/2 = 30$  mm.

**Resultados** En la superficie externa:

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{Tc}{J} \\ J &= \frac{\pi}{32}(D_o^4 - D_i^4) = \frac{\pi}{32}(60^4 - 40^4) \text{ mm}^4 = 1.02 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ \tau_{\max} &= \frac{Tc}{J} = \frac{(1.76 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m})(30 \text{ mm})}{1.02 \times 10^6 \text{ mm}^4} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} \\ &= 51.8 \text{ N/mm}^2 = 51.8 \text{ MPa}\end{aligned}$$

En la superficie interna,  $r = D_i/2 = 40 \text{ mm}/2 = 20$  mm.

$$\tau = \tau_{\max} \frac{r}{c} = 51.8 \text{ MPa} \times \frac{20 \text{ mm}}{30 \text{ mm}} = 34.5 \text{ MPa}$$

**Comentario** El lector debe visualizar estos valores de esfuerzo graficados en la sección transversal mostrada en la figura 5-6.

## 5-7 DISEÑO DE ELEMENTOS CIRCULARES SOMETIDOS A TORSIÓN

En un problema de diseño, se conocen las cargas que actúan en un elemento, y se requiere determinar su geometría para garantizar que las soportará con seguridad. La selección del material y la determinación de los esfuerzos de diseño son partes integrales del proceso de diseño. *Las técnicas que se desarrollan en esta sección son sólo para miembros circulares, sometidos a torsión.* Desde luego, se analizan miembros circulares tanto sólidos como huecos. La torsión en miembros no circulares se estudia en una sección posterior de este capítulo. La combinación de torsión con flexión y cargas axiales se presenta en los capítulos 10 y 11.

La ecuación (5-11) para el esfuerzo cortante torsional básico, se expresó como:

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad (5-11)$$

En el diseño, se puede sustituir un cierto esfuerzo de diseño  $\tau_d$  por  $\tau_{\max}$ . Como en el caso de miembros sometidos a esfuerzo cortante directo hechos de materiales dúctiles, el diseño por esfuerzo tiene relación con la resistencia a la cedencia del material a cortante. Es decir:


$$\tau_d = \frac{S_{xy}}{N}$$

en donde  $N$  es el factor de diseño que eligió el diseñador con base en el tipo de carga. La tabla 5-1 se puede usar como guía para determinar el valor de  $N$ .

**TABLA 5-1** Factores de diseño y esfuerzos cortantes de diseño para metales dúctiles

Tipo de carga	Factor de diseño	Diseño por esfuerzo cortante $\tau_d = s_y / 2N$
Torsión estática	2	$\tau_d = s_y / 4$
Torsión cíclica	4	$\tau_d = s_y / 8$
Impacto o choque torsional	6	$\tau_d = s_y / 12$

Donde los valores de  $s_y$ , no están disponibles, pero se pueden calcular como  $s_y/2$ . Así se obtienen valores razonables y, por lo general, conservadores, para metales dúctiles, en especial el acero. Por consiguiente:

 **Diseño por esfuerzo cortante**

$$\tau_d = \frac{s_y}{N} = \frac{s_y}{2N} \quad (5-14)$$

En un problema de diseño el par de torsión  $T$  se debe conocer. Luego, en la ecuación (5-11), sólo  $c$  y  $J$  no se conocen. Nótese que tanto  $c$  como  $J$  son propiedades geométricas del miembro que se va a diseñar. En el caso de miembros circulares sólidos (flechas), el diámetro define la geometría por completo. Se demostró que:


$$c = \frac{D}{2}$$

y:

$$J = \frac{\pi D^4}{32}$$


Ahora conviene señalar que si forma el cociente  $J/c$ , se obtiene una expresión simple que incluye  $D$ .

En el estudio de la resistencia de materiales, el término  $J/c$  recibe el nombre de *módulo de sección polar*, y se usa el símbolo  $Z_p$  para denotarlo.

 **Módulo de sección polar—flechas sólidas**

$$Z_p = \frac{J}{c} = \frac{\pi D^4}{32} \times \frac{1}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} \quad (5-15)$$

Si se sustituye  $J/c$  por  $Z_p$  en la ecuación (5-11) se obtiene:

 **Esfuerzo cortante máximo**


$$\tau_{\max} = \frac{T}{Z_p} \quad (5-16)$$

Para usar esta ecuación en el diseño, se puede hacer  $\tau_{\max} = \tau_d$  y en seguida resolverse para  $Z_p$ .

 **Módulo de sección polar requerido**


$$Z_p = \frac{T}{\tau_d} \quad (5-17)$$

La ecuación (5-17) da el valor que se requiere del módulo de sección polar de una flecha circular que limita el esfuerzo cortante torsional a  $t_u$  cuando se somete a un par de torsión  $T$ . Luego la ecuación (5-15) se usa para determinar el diámetro necesario de una flecha circular sólida. Resolviéndola para  $D$  se tiene:

 Diámetro requerido

$$D = \sqrt[3]{\frac{16Z_p}{\pi}} \quad (5-18)$$

Si se va a diseñar una flecha hueca:

 Módulo de sección polar-flechas huecas

$$Z_p = \frac{J}{c} = \frac{\pi}{32} (D_o^4 - D_i^4) \times \frac{1}{D_o/2}$$

$$Z_p = \frac{\pi}{16} \frac{D_o^4 - D_i^4}{D_o} \quad (5-19)$$

En este caso, uno de los diámetros o la relación entre los dos diámetros se tendría que especificar para definir la geometría completa de la flecha hueca.

#### EJEMPLO PROGRAMADO

**Ejemplo 5-7** La transmisión de una transportadora que alimenta carbón a un carro de ferrocarril es una flecha que se somete a torsión pura y que transmite un par de torsión de 800 N·m. Un diseño propuesto exige que la flecha tenga una sección transversal sólida. Complete el diseño y especifique primero un acero conveniente para la flecha y luego el diámetro.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	1. Especificar un acero que convenga para la flecha. 2. Especificar el diámetro de la flecha.
<b>Datos</b>	<b>Datos</b>	Par de torsión aplicado = $T = 800$ N·m. La flecha impulsa a una transportadora de carbón.
<b>Análisis</b>	<b>Análisis</b>	<p><i>La solución de este problema se expone en un formato programado. Usted debe contestar cada pregunta, a medida que se van planteando, antes de pasar a la siguiente sección, después de la línea que las separa. Este proceso tiene el propósito de que usted intervenga en las actividades de toma de decisiones con las que se encuentra a diario un diseñador.</i></p> <p>En primer lugar, como una ayuda en la selección de un material adecuado, ¿qué tipo de carga experimentará la flecha en servicio?</p> <hr/> <p>Es probable que la transmisión de una transportadora de carbón experimente un tipo de servicio en extremo severo conforme el carbón se vacía sobre la banda transportadora. Por consiguiente, en el diseño se deben tener en cuenta las cargas de impacto y choque. Ahora, ¿qué propiedades debe poseer el acero para la flecha?</p> <hr/> <p>Se debe usar un material mucho muy dúctil porque los materiales con esa característica soportan cargas de choque mucho mejor que los frágiles. El acero debe tener una resistencia moderadamente elevada de</p>

modo que el diámetro requerido de la flecha sea razonable. Es importante que se seleccione un acero maquinable porque es probable que la flecha requiera maquinado durante su fabricación. ¿Cuál es la medida de la ductilidad de los aceros que, por lo general, se usa?

En el capítulo 2 se mencionó que el *porcentaje de alargamiento* de un acero es una indicación de su ductilidad. Para que soporte cargas de impacto o choque, se debe especificar un acero con un porcentaje de alargamiento de más del 10%. Ahora especifique un acero conveniente.

Existen muchos aceros que pueden dar resultados satisfactorios. Especifique acero AISI 1141 OQT 1300. Tome los datos pertinentes del apéndice A-13.

Tal vez encontró que  $s_y = 469 \text{ MPa}$  y que el alargamiento del 28% indica una elevada ductilidad. Asimismo, nótese, tal como se planteó en el capítulo 2, que los aceros de la serie 1100 tienen buena maquinabilidad por su contenido de azufre relativamente elevado en la aleación.

Se utilizarán las ecuaciones (5-16), (5-17) y (5-18) para continuar el proceso de diseño con el objetivo final de especificar un diámetro idóneo para la flecha. Se sabe que el par de torsión aplicado es de 800 N·m. El siguiente paso consiste en determinar un esfuerzo cortante de diseño aceptable. ¿Cómo lo haría?

La tabla 5-1 requiere  $\tau_d = s_y/2N$  con  $N = 6$ ; es decir,  $\tau_d = s_y/12$ . Por lo tanto,  $\tau_d = s_y/12 = 469 \text{ MPa}/12 = 39.1 \text{ MPa} = 39.1 \text{ N/mm}^2$ . ¿Cuál sería el siguiente paso?

Se puede usar la ecuación (5-17) para calcular el valor que se requiere del módulo de sección polar de la sección transversal de la flecha. Hágalo ahora.

Usted debe tener ahora el  $Z_p = 20.5 \times 10^3 \text{ mm}^3$  necesario, determinado como sigue:

$$Z_p = \frac{T}{\tau_d} = \frac{800 \text{ N}\cdot\text{m}}{39.1 \text{ N/mm}^2} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 20.5 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

¿Cuál es el siguiente paso?

Con la ecuación (5-18) se calcula el diámetro mínimo aceptable de la flecha. Hágalo ahora.

$D_{\min} = 47.1 \text{ mm}$  se calcula como sigue,

$$D = \sqrt[3]{\frac{16Z_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16(20.5 \times 10^3) \text{ mm}^3}{\pi}} = 47.1 \text{ mm}$$

Sería conveniente especificar un diámetro para la flecha un poco mayor que el valor anterior. Use el apéndice A-2 como guía y especifique un diámetro.

Se prefiere  $D = 50 \text{ mm}$ .

### Resumen de los resultados

La flecha se fabricará de acero AISI 1141 OQT 1300 con un diámetro de 50 mm.

**Comentarios** El esfuerzo cortante máximo en la superficie externa de la flecha de 50 mm de diámetro de hecho es menor que el esfuerzo de diseño porque se especificó un diámetro un poco mayor que el diámetro requerido de 47,1 mm. A continuación se calcula el esfuerzo máximo real en la flecha. En primer lugar, se calcula el módulo de sección polar de la flecha de 50 mm de diámetro.

$$Z_p = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi(50)^3 \text{ mm}^3}{16} = 24.5 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Luego, el esfuerzo cortante máximo es:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{Z_p} = \frac{800 \text{ N}\cdot\text{m}}{24.5 \times 10^3 \text{ mm}^3} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{1 \text{ m}} = 32.6 \text{ N/mm}^2 = 32.6 \text{ MPa}$$

Ahora se demostrará, con un ejemplo, que las flechas huecas son más eficientes que las sólidas. En este caso el término eficiencia se usa como una medida de la masa del material que se necesita de una flecha para soportar un par de torsión dado con un cierto nivel de esfuerzo cortante. El ejemplo siguiente ilustra el diseño de una flecha hueca con diámetro externo un poco más grande que desarrolla el mismo esfuerzo cortante máximo que la flecha sólida de 50 mm de diámetro que se acaba de diseñar. Por consiguiente, la masa de la flecha hueca es equiparable a la de la flecha sólida.

#### Ejemplo 5-8

Un diseño alternativo de la flecha del ejemplo 5-7 sería un tubo hueco. Suponga que el tubo de 60 mm de diámetro externo está disponible en el mismo material que se especificó para la flecha sólida (AISI 1141 OQT 1300). Calcule el diámetro interno máximo que el tubo puede tener para que se produzca un esfuerzo en el acero igual al de la flecha sólida de 50 mm.

#### Solución

- Objetivo** Calcular el diámetro interno máximo permisible para la flecha hueca.
- Datos** Según el ejemplo 5-7, el esfuerzo cortante máximo =  $\tau_{\max} = 32.6 \text{ MPa}$ .  $D_o = 60 \text{ mm}$ . Par de torsión aplicado =  $T = 800 \text{ N}\cdot\text{m}$ .
- Análisis** Como el esfuerzo cortante torsional es inversamente proporcional al módulo de sección polar, se requiere que el tubo hueco tenga el mismo valor de  $Z_p$  que el de la flecha sólida de 50 mm de diámetro. Es decir,  $Z_p = 24.5 \times 10^3 \text{ mm}^3$ . Ahora bien, ¿cuál es la fórmula para  $Z_p$  en el caso de una flecha hueca?

$$Z_p = \frac{\pi}{16} \frac{D_o^4 - D_i^4}{D_o}$$

Se sabe que el diámetro externo  $D_o$  es de 60 mm. La ecuación se resuelve para el diámetro interno que se requiere,  $D_i$ . Hágalo ahora.

Se tiene:

$$D_i = \left( D_o^4 - \frac{16Z_p D_o}{\pi} \right)^{1/4}$$

Ahora calcule el diámetro interno máximo permisible.

$$D_i = \left[ (60)^4 - \frac{(16)(24.5 \times 10^3)(60)}{\pi} \right]^{1/4} \text{ mm} = 48.4 \text{ mm}$$

#### Resumen de los resultados

Diseño final de la flecha hueca:

$D_o = 60 \text{ mm}$ ;  $D_i = 48.4 \text{ mm}$ .

Material: Acero AISI 1141 OQT 1300.

Esfuerzo cortante máximo en la superficie externa =  $\tau_{\text{máx}} = 32.6 \text{ MPa}$ .

#### Comentario

La figura 5.7 muestra una comparación de la flecha hueca con la sólida que soportan el mismo esfuerzo cortante máximo. Los diseños se dibujan en su tamaño real. A simple vista se ve que la flecha hueca requiere menos material. La siguiente sección demostrará que esto es cierto.

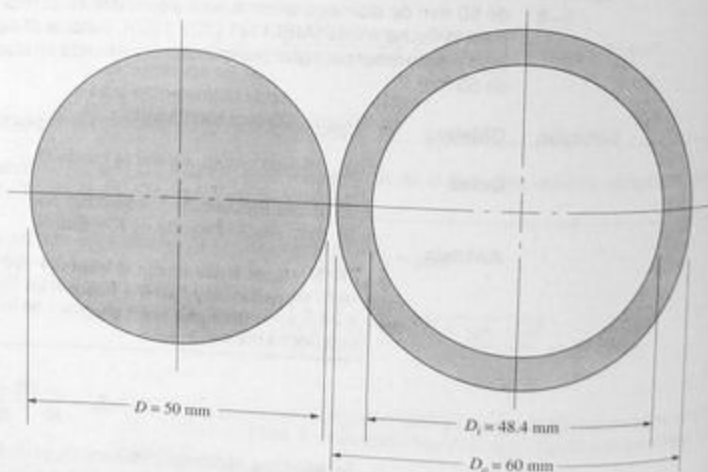


FIGURA 5-7 Comparación de flechas sólida y hueca del ejemplo 5-8.



## 5-8 COMPARACIÓN DE ELEMENTOS CIRCULARES SÓLIDOS Y HUECOS

En muchas situaciones de diseño, la economía en el uso de material es un importante criterio del desempeño de un producto. En aplicaciones aeroespaciales, cualquier reducción en la masa de la aeronave o vehículo espacial incrementa la carga útil. Los automóviles consumen menos combustible cuando son más ligeros. Asimismo, como la materia prima se adquiere con base en un precio por unidad de masa, una pieza ligera casi siempre cuesta menos.

Para economizar material en la fabricación de miembros de carga se requiere que éstos se sometan a un nivel de esfuerzo próximo al esfuerzo de diseño seguro. De esta manera cada porción del miembro soporta una parte de la carga.

Para ilustrar este punto se pueden usar los ejemplos 5-7 y 5-8. Recuérdese que los dos diseños que se ilustran en la figura 5-7 producen el mismo esfuerzo cortante torsional en la flecha de acero. El diámetro externo de la flecha hueca es un poco más grande, pero el *volumen* de metal es lo que determina la masa de la flecha. Considérese un segmento de flecha de 1.0 m de longitud. El volumen de la flecha sólida es igual al área de la sección transversal por la longitud.

$$\begin{aligned}V_s &= AL = \frac{\pi D^2}{4} L \\ &= \frac{\pi (50 \text{ mm})^2}{4} \times 1.0 \text{ m} \times \frac{1 \text{ m}^2}{(10^3 \text{ mm})^2} = 1.96 \times 10^{-3} \text{ m}^3\end{aligned}$$

La masa es el volumen por la densidad,  $\rho$ . El apéndice A-13 da la densidad del acero como  $7680 \text{ kg/m}^3$ . Por lo tanto, la masa de la flecha sólida es  $V_s \times \rho$ .

$$M_s = 1.96 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \times 7680 \text{ kg/m}^3 = 15.1 \text{ kg}$$

Ahora el volumen de la flecha hueca es:

$$\begin{aligned}V_H &= AL = \frac{\pi}{4} (D_o^2 - D_i^2) (L) \\ &= \frac{\pi}{4} (60^2 - 48.4^2) \text{ mm}^2 \times 1.0 \text{ m} \times \frac{1 \text{ m}^2}{(10^3 \text{ mm})^2} \\ &= 0.988 \times 10^{-3} \text{ m}^3\end{aligned}$$

La masa de la flecha hueca es  $V_H \times \rho$ .

$$M_H = 0.988 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \times 7680 \text{ kg/m}^3 = 7.58 \text{ kg}$$

De este modo se puede ver que la flecha hueca tiene casi la *mitad de la masa* de la flecha sólida, aun cuando a ambas se les sometió al mismo nivel de esfuerzo con un par de torsión dado. ¿Por qué?

La razón de que la flecha hueca sea más ligera es que la mayor parte de su material se somete a un nivel de esfuerzo más elevado que en la flecha sólida. La figura 5-4

muestra la distribución del esfuerzo en la flecha sólida. El esfuerzo máximo, 32.6 MPa, ocurre en la superficie externa. El esfuerzo en tal caso varía linealmente con el radio en otros puntos de la flecha hasta *cero* en el centro. Por consiguiente el material cerca de la parte media de la flecha, en este caso, no se usa con eficiencia.

Compárese lo anterior con la flecha hueca de la figura 5-6. Asimismo, el esfuerzo en la superficie externa es el máximo, 32.6 MPa. El esfuerzo en la superficie interna de la flecha hueca se determina con la ecuación (5-6).

$$\tau = \tau_{\text{máx}} \frac{r}{c}$$

En la superficie interna,  $r = R_i = D/2 = 48.4 \text{ mm}/2 = 24.2 \text{ mm}$ . Además,  $c = R_o = D_o/2 = 60 \text{ mm}/2 = 30 \text{ mm}$ . Luego:

$$\tau = 32.6 \text{ MPa} \frac{24.2}{30} = 26.3 \text{ MPa}$$

El esfuerzo en puntos entre las superficies interna y externa varía linealmente con el radio en cada punto. Por consiguiente, todo el material de la flecha hueca expuesto en la figura 5-6 está sometido a un esfuerzo bastante elevado pero seguro. Esto ilustra por qué la sección hueca requiere menos material.

Desde luego, los datos específicos que exhibe la ilustración anterior no se pueden generalizar a todos los problemas. Sin embargo, se puede concluir que, en el caso de carga torsional de miembros circulares, una sección hueca se puede diseñar de modo que sea más ligera que una sección sólida, si bien el material de ambas se ve sometido al mismo esfuerzo cortante torsional máximo.

### 5-9 CONCENTRACIONES DE ESFUERZO EN ELEMENTOS SOMETIDOS A TORSIÓN

Los miembros sometidos a torsión, en especial las flechas transmisoras de potencia, con frecuencia se fabrican con cambios de geometría en varias posiciones. La figura 5-8

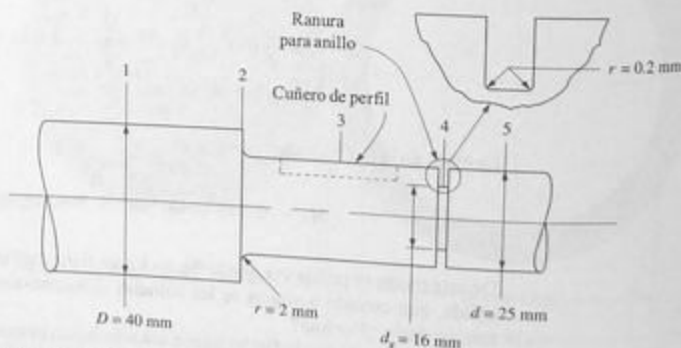


FIGURA 5-8 Flecha con concentraciones de esfuerzo.

muestra un ejemplo. Éste es un segmento de una flecha en la que se va a montar un elemento transmisor de potencia como, por ejemplo, un engrane. El diámetro del agujero en la maza del engrane es tal que permite deslizarlo en el extremo derecho de la flecha donde el diámetro de ésta es  $d = 25$  mm. En el cuñero se inserta una cuña rectangular y habría un cuñero correspondiente en la maza del engrane para que se deslice sobre la cuña. El engrane se deslizaría entonces de derecha a izquierda hasta que se detuviera contra el hombro de la sección 2 por el incremento en el diámetro de la flecha a  $D = 40$  mm. Para mantener el engrane en posición, se inserta un anillo de sujeción en la ranura de la sección 4.

Los cambios de la sección transversal de un miembro sometido a torsión provocan que el esfuerzo local cerca de los cambios sea mayor que el que se pronosticó mediante el uso de la fórmula para el esfuerzo cortante torsional. El nivel real de esfuerzo en tales casos se determina de manera experimental. En tal caso se determina un *factor de concentración de esfuerzo* que permita que el esfuerzo máximo en diseños similares se calcule con la relación:

$$\tau_{\text{máx}} = K_t \tau_{\text{nom}} = K_t (T/Z_p) \quad (5-20)$$

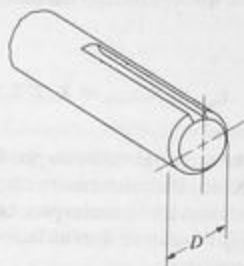
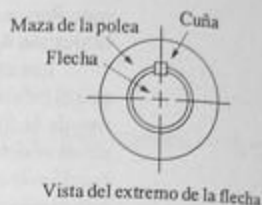
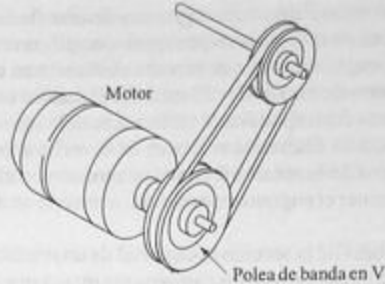
El término  $\tau_{\text{nom}}$  es el esfuerzo nominal causado por la torsión que se desarrollaría en las piezas si la concentración de esfuerzo no estuviera presente. Por consiguiente, para calcular el esfuerzo nominal se usan las fórmulas para esfuerzo cortante torsional estándar [ecuaciones (5-5) y (5-16)]. El valor de  $K_t$  es un factor por el cual el esfuerzo máximo real es mayor que el esfuerzo nominal.

Si se recurre de nuevo a la figura 5-8, se observa que habría varios niveles de esfuerzo en diferentes lugares a lo largo de la barra, aun cuando el par de torsión que se aplica fuera el mismo a lo largo de toda ella. Los diámetros diferentes y la presencia de concentraciones de esfuerzo ocasionan los niveles de esfuerzo variables. El esfuerzo en la sección 1, donde  $D = 40$  mm, sería relativamente bajo, por la presencia de un diámetro grande y un módulo de sección polar que, en correspondencia, sería también grande. En la sección 2, el diámetro de la flecha se reduce a  $d = 25$  mm y el escalón produce una concentración de esfuerzo que tiende a elevar el nivel de esfuerzo local. Por esta razón, el cuñero en la sección 3 produce una concentración de esfuerzo diferente. En la sección 4 concurren dos factores importantes que tienden a incrementar el esfuerzo local. El corte de la ranura para anillo reduce el diámetro a  $d_g = 16$  mm y también produce dos escalones muy cercanos entre sí con radios de redondez un tanto pequeños en el fondo de la ranura. En la sección 5, lejos de la ranura, el esfuerzo sería igual al esfuerzo nominal en la flecha de 25 mm de diámetro. El ejemplo 5-10 ilustra todas estas situaciones mediante cálculos reales de los esfuerzos en las cinco secciones de la flecha.

Primero, se analizará más a fondo la naturaleza de los factores de concentración de esfuerzo. La lista siguiente de gráficas de apéndices da datos sobre varios casos representativos.

- Apéndice A-21-5: Barra redonda con un agujero transversal sometida a torsión
- Apéndice A-21-6: Barra redonda ranurada sometida a torsión
- Apéndice A-21-7: Barra redonda escalonada sometida a torsión
- Apéndice A-21-11: Flechas con cuñeros (véase también la figura 5-9)

**Barra redonda con un agujero transversal.** El objeto de perforar un agujero en una flecha es insertar un pasador a través del agujero y a través del agujero correspondiente en la maza de un elemento de máquina tal como un engrane, polea o rueda dentada para



$$\text{Esfuerzo de la flecha} = \tau_{\text{máx}} = K_t \tau_{\text{nom}}$$

$$\tau_{\text{nom}} = T / (\pi D^3 / 16)$$

(a)

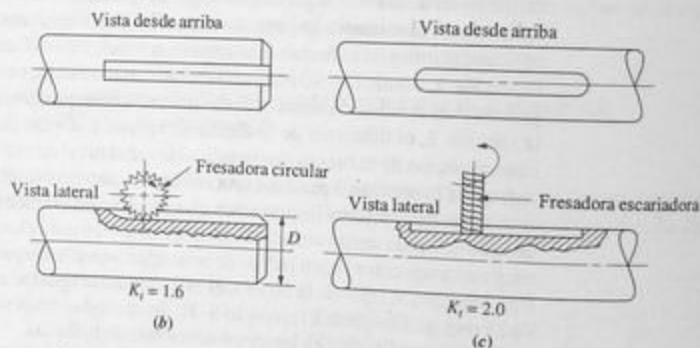


FIGURA 5-9 Factores de concentración de esfuerzo en cuñeros. (a) Aplicación representativa. (b) Cuñero de extremo hecho con una fresadora circular. (c) Cuñero de perfil hecho con una fresadora escariadora.

cadena. El pasador sirve para situar el elemento de máquina axialmente en la flecha al mismo tiempo que también transmite el par de torsión de la flecha al elemento o de éste a la flecha. El agujero en la flecha es un cambio repentino de geometría y causa una concentración de esfuerzo. El apéndice A-21-5 es una gráfica de este caso con la que se puede determinar  $K_t$ . La curva C corresponde al caso de flechas sometidas a torsión. Nótese que la fórmula para el esfuerzo nominal en la flecha se basa en toda la sección transversal circular bruta de la flecha.

**Barra redonda ranurada.** Las ranuras de fondo redondeado se cortan en las barras redondas con el objeto de instalar sellos o para distribuir aceite lubricante alrededor de una flecha. El factor de concentración de esfuerzo depende de la relación del diámetro de la flecha al diámetro de la ranura y de la relación del radio de la ranura al diámetro de la misma. La ranura se corta con una herramienta de boca redondeada que produce la ranura de fondo redondeado. El radio ha de ser tan grande como sea posible para reducir al mínimo el factor de concentración de esfuerzo. Nótese que el esfuerzo nominal se basa en el diámetro *en la base de la ranura*. Véase el apéndice A-21-6.

**Barra redonda escalonada.** Las flechas con frecuencia se fabrican con dos o más diámetros, lo que da por resultado una flecha escalonada como la que se muestra en el apéndice A-21-7. La cara del escalón sirve para localizar un lado de un elemento que se monta en la flecha, tal como un cojinete, engrane, polea o una rueda dentada para cadena. Se debe tener cuidado al definir el radio de la base del escalón, llamado *radio de redondeo*. Deben evitarse los vértices puntiagudos, porque provocan factores de concentración de esfuerzo muy elevados. El radio ha de ser tan grande como sea posible y al mismo tiempo compatible con los elementos montados en la flecha.

Los anillos de retención que se asientan en las ranuras cortadas en la flecha, a menudo se usan para localizar elementos de máquina, como se muestra en la figura 5-8. Las ranuras por lo general son de fondo plano con radios pequeños en los costados. Algunos diseñadores tratan a tales ranuras como si fueran dos escalones muy juntos en la flecha y utilizan la gráfica de flechas escalonadas (apéndice A-21-7) para determinar el factor de concentración de esfuerzo. Por el radio pequeño en la base de la ranura, el radio relativo con frecuencia es bastante pequeño, lo cual resulta en que se tomen valores elevados de  $K_t$  de la gráfica. En tales casos, suele usarse un valor de  $K_t = 3.0$ .

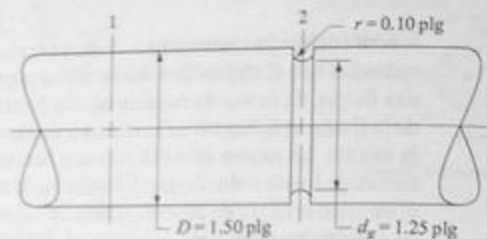
**Flechas con cuñeros.** Los elementos transmisores de potencia por lo general transmiten un par de torsión hacia y desde las flechas por medio de cuñas que se insertan en cuñeros en la flecha, como se muestra en la figura 5-9. La polea de banda en V montada en el extremo de la flecha motriz constituye un ejemplo. Dos tipos de cuñeros son los de uso más frecuente: los cuñeros de *extremo* y los de *perfil*.

Para cortar el cuñero de extremo, por lo general en el extremo de una flecha, se usa una fresa circular de espesor igual al ancho del cuñero, como se muestra en la figura 5-9(b). Al final del corte, la fresa deja un radio pequeño, como se ilustra en la vista lateral, que da  $K_t = 1.6$  como valor de diseño.

Un cuñero de perfil se corta con una fresadora escariadora de diámetro igual al ancho del cuñero. Cortado, por lo general, en un lugar distante a los extremos de la flecha, deja esquinas interiores a escuadra en los extremos del cuñero visto de lado, como se muestra en la figura 5-9(c). Éste es más severo que el cuñero de extremo y se usa un valor de  $K_t = 2.0$ . Nótese que los factores de concentración de esfuerzo tienen en cuenta tanto la remoción de material de la flecha como el cambio de geometría.

**Ejemplo 5-9**

La figura 5-10 muestra un segmento de una flecha en la que se maquinó una ranura circular. Para un par de torsión aplicado de 4500 lb-pulg, calcule el esfuerzo cortante torsional en la sección 1, donde el diámetro es máximo, y en la sección 2, donde se localiza la ranura.



**FIGURA 5-10** Flecha con una ranura circular del ejemplo 5-9.

**Solución Objetivo**

Calcular el esfuerzo en las secciones 1 y 2.

**Datos**

Par de torsión aplicado =  $T = 4500$  lb-pulg. La geometría de la flecha expuesta en la figura 5-10.

**Análisis**

Si se supone que la sección 1 está lo bastante lejos de la ranura, no existe una concentración de esfuerzo significativa. Luego se puede usar la fórmula [ecuación 5-16] para el esfuerzo cortante torsional estándar. En la sección 2 donde se localiza la ranura, debe usarse la ecuación 5-20. El valor del factor de concentración de esfuerzo se determina con el apéndice A-21-6.

**Resultados**

En la sección 1:  $\tau_{\max} = T/Z_p$

$$Z_p = \pi D^3 / 16 = \pi (1.50 \text{ pulg})^3 / 16 = 0.663 \text{ pulg}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{4500 \text{ lb-pulg}}{0.663 \text{ pulg}^3} = 6790 \text{ psi}$$

En la sección 2:  $\tau_{\max} = K_t T / Z_p$

$$Z_p = \pi d_g^3 / 16 = \pi (1.25 \text{ pulg})^3 / 16 = 0.383 \text{ pulg}^3$$

Para evaluar  $K_t$ , se tienen que calcular dos radios, como el apéndice A-21-6 lo exige.

$$D/d_g = (1.50 \text{ pulg}) / (1.25 \text{ pulg}) = 1.20$$

$$r/d_g = (0.10 \text{ pulg}) / (1.25 \text{ pulg}) = 0.08$$

Por consiguiente, en la gráfica del apéndice A-21-6 se lee,  $K_t = 1.55$ .

Ahora ya se puede calcular el esfuerzo cortante máximo.

$$\tau_{\max} = \frac{K_f T}{Z_p} = \frac{(1.55)(4500 \text{ lb}\cdot\text{plg})}{0.383 \text{ plg}^3} = 18\,200 \text{ psi}$$

**Comentarios** Nótese que el esfuerzo en la ranura es sustancialmente más elevado que en la parte del diámetro máximo de la flecha. Además, el uso del factor de concentración de esfuerzo es esencial para predecir el nivel de esfuerzo máximo real en la ranura.

**Ejemplo 5-10** La figura 5-8 muestra un segmento de una flecha donde se va a montar un engrane sobre el cuñero de la sección 3. Se apoyará contra el hombro de la sección 2 y se mantendrá en posición con un anillo de retención que se inserta en la ranura de la sección 4. Se aplica un par de torsión cíclico de 20 N·m a lo largo de la flecha. Calcule el esfuerzo cortante máximo en las secciones 1, 2, 3, 4 y 5 de la flecha. En seguida especifique un acero idóneo para la fabricación de la flecha.

**Solución** **Objetivo** 1. Calcular los esfuerzos en las secciones 1, 2, 3, 4 y 5.  
2. Especificar un acero conveniente para la flecha.

**Datos** La geometría de la flecha que se ilustra en la figura 5-8.  $T = 20 \text{ N}\cdot\text{m}$ , cíclico.

**Análisis** El esfuerzo en cada una de las secciones se analizará aparte en cada sección separada por una línea horizontal a través de la página. Recomendamos al lector realizar los cálculos que se señalan antes de consultar los resultados que se proporcionan. En cada caso, el análisis requiere la aplicación de la ecuación (5-20).

$$\tau_{\max} = K_f T / Z_p$$

Se considerará que el par de torsión siempre es de 20 N·m. Se debe evaluar el factor de concentración de esfuerzo y el módulo de sección polar que convenga a cada sección. Nótese que  $K_f = 1.0$  donde la geometría no cambia. Ahora calcule el esfuerzo en la sección 1.

**Sección 1.** La geometría no cambia, así que  $K_f = 1.0$ . El diámetro de la flecha es  $D = 40 \text{ mm}$ . Entonces:

$$Z_p = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi(40 \text{ mm})^3}{16} = 12\,570 \text{ mm}^3$$

$$\tau_1 = \frac{20 \text{ N}\cdot\text{m}}{12\,570 \text{ mm}^3} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 1.59 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 1.59 \text{ MPa}$$

Ahora calcule el esfuerzo en la sección 2.

**Sección 2.** La flecha escalonada y el redondeo del hombro producen una concentración de esfuerzo que se debe evaluar con el apéndice A-21-7. El módulo de sección polar debe basarse en el diámetro menor;  $d = 25 \text{ mm}$ . Los resultados son:

$$\tau_{\text{nom}} = \frac{T}{\pi d^3 / 16} = \frac{20 \text{ N}\cdot\text{m}}{[\pi(25)^3 / 16] \text{ mm}^3} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}}$$

$$= 6.52 \text{ N/mm}^2 = 6.52 \text{ MPa}$$

El valor de  $K_f$  depende de las relaciones  $D/d$  y  $r/d$ .

$$\frac{D}{d} = \frac{40 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} = 1.60$$

$$\frac{r}{d} = \frac{2 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} = 0.08$$

Luego según el apéndice A-21-7,  $K_f = 1.45$ . Por consiguiente:

$$\tau_2 = (1.45)(6.52 \text{ MPa}) = 9.45 \text{ MPa}$$

Ahora, calcule el esfuerzo en la sección 3.

**Sección 3.** El cuñero tipo perfil presenta un factor de concentración de esfuerzo de 2.0. El esfuerzo nominal es el mismo que se calculó en el redondeo del hombro. Así pues:

$$\tau_3 = K_f \tau_{\text{nom}} = (2.0)(6.52 \text{ MPa}) = 13.04 \text{ MPa}$$

Ahora calcule el esfuerzo en la sección 4.

**Sección 4.** En esta sección se localiza la ranura para anillo. En este lugar, el esfuerzo nominal se calcula con base en el diámetro de la raíz de la ranura.

$$\begin{aligned} \tau_{\text{nom}} &= \frac{T}{\pi d_g^3 / 16} = \frac{20 \text{ N}\cdot\text{m}}{[\pi(16)^3 / 16] \text{ mm}^3} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 24.9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ &= 24.9 \text{ MPa} \end{aligned}$$

El valor de  $K_f$  depende de  $d/d_g$  y de  $r/d_g$ .

$$\frac{d}{d_g} = \frac{25 \text{ mm}}{16 \text{ mm}} = 1.56$$

$$\frac{r}{d_g} = \frac{0.2 \text{ mm}}{16 \text{ mm}} = 0.013$$

El factor de concentración de esfuerzo se lee en la gráfica del apéndice A-21-7. Éste es el tipo de caso en que  $K_f = 3.0$  es razonable.

$$\tau_4 = K_f \tau_{\text{nom}} = (3.0)(24.9 \text{ MPa}) = 74.7 \text{ MPa}$$

Ahora calcule el esfuerzo en la sección 5.

**Sección 5.** Esta sección es la porción menor de la flecha, donde no hay concentración de esfuerzo. Por consiguiente  $K_f = 1.0$  y:

$$\tau = \frac{T}{Z_p} = \frac{T}{\pi d^3 / 16}$$

Nótese que este esfuerzo es idéntico al esfuerzo nominal que se calculó en las secciones 2 y 3. Por lo tanto, en la sección 5:

$$\tau_5 = 6.52 \text{ MPa}$$



## Resumen de los resultados

Existe una amplia variedad de niveles de esfuerzo cerca del lugar en la flecha donde se va a montar el engrane.

$\tau_1 = 1.59 \text{ MPa}$	$D = 40 \text{ mm}$	$K_t = 1.0$
$\tau_2 = 9.45 \text{ MPa}$	$d = 25 \text{ mm}$	$K_t = 1.45$ . Escalón o resalto.
$\tau_3 = 13.04 \text{ MPa}$	$d = 25 \text{ mm}$	$K_t = 2.0$ . Cuñero.
$\tau_4 = 74.7 \text{ MPa}$	$d_g = 16 \text{ mm}$	$K_t = 3.0$ . Ranura para anillo.
$\tau_5 = 6.52 \text{ MPa}$	$d = 25 \text{ mm}$	$K_t = 1.0$ .

La especificación de un material adecuado se debe basar en el esfuerzo que aparece consignado en la sección 4 donde se localiza la ranura para anillo. Considere que el diseño por esfuerzo  $\tau_d$  sea igual a ese nivel de esfuerzo y determine la resistencia a la cedencia requerida del material.

Se debe obtener una resistencia a la cedencia requerida de  $s_y = 598 \text{ MPa}$ . Para el par de torsión cíclico, en la tabla 5-1 se recomienda  $N = 4$ , con lo que se obtiene:

$$\tau_d = s_y/2N = s_y/8$$

Luego, si se resuelve para  $s_y$  se obtiene:

$$s_y = 8(\tau_d) = 8(74.7 \text{ MPa}) = 598 \text{ MPa}$$

Ahora especifique un material conveniente.

Según el apéndice A-13, dos aceros que convienen para este requisito son AISI 1040 WQT 900 y AISI 4140 OQT 1300. Ambos tienen una resistencia buena y una alta ductilidad de acuerdo con su porcentaje de alargamiento. Sin duda, se podrían usar otras aleaciones y tratamientos térmicos.

**Comentario** Revise los resultados de este ejemplo, el cual ilustra la importancia de considerar los detalles del diseño de una flecha en cualquier área local donde pudieran ocurrir concentraciones de esfuerzos.

## 5-10 TORSIÓN-DEFORMACIÓN TORSIONAL ELÁSTICA

La rigidez además de la resistencia es una importante consideración de diseño de miembros sujetos a torsión. La medida de la rigidez torsional es el ángulo de torsión de un segmento de una flecha con respecto a otro cuando se aplica un cierto par de torsión.

En aplicaciones de transmisión de potencia mecánica, la excesiva torsión de una flecha puede provocar problemas de vibración que, a su vez, pueden provocar ruido y una sincronización impropia de las piezas móviles. Una indicación por lo que se refiere a rigidez torsional tiene que ver con el grado de precisión que se desea, como se indica en la tabla 5-2 (véanse las referencias 1 y 3).

En el diseño estructural, los miembros de carga en ocasiones se someten a torsión así como también a tensión o flexión. La rigidez de una estructura depende entonces de la rigidez torsional de sus componentes. Cualquier carga aplicada fuera del eje de un miembro y transversal al mismo producirá torsión. Esta sección analizará la torsión de miem-

TABLA 5-2 Rigideces torsionales recomendadas: ángulo de torsión por unidad de longitud.

Aplicación	Deflexión torsional	
	grados/plg	rad/m
Pieza de máquina en general	$1 \times 10^{-3}$ a $1 \times 10^{-2}$	$6.9 \times 10^{-4}$ a $6.9 \times 10^{-3}$
Precisión moderada	$2 \times 10^{-5}$ a $4 \times 10^{-4}$	$1.4 \times 10^{-5}$ a $2.7 \times 10^{-4}$
Alta precisión	$1 \times 10^{-6}$ a $2 \times 10^{-5}$	$6.9 \times 10^{-7}$ a $1.4 \times 10^{-6}$

bros circulares, tanto sólidos como huecos. Los perfiles no circulares se estudiarán más adelante. Es muy importante señalar que el comportamiento de un perfil abierto tal como un canal o ángulo es muy diferente del de un perfil cerrado tal como un tubo circular o rectangular. En general, los perfiles abiertos tienen una rigidez torsional muy baja.

Como una ayuda en el desarrollo de la relación para calcular el ángulo de torsión de un miembro circular, considérese la flecha que ilustra la figura 5-3. Uno de sus extremos se mantiene fijo mientras se aplica un par de torsión  $T$  al otro. En estas condiciones la flecha se torcerá entre los dos extremos a través de un ángulo  $\theta$ .

La derivación de la fórmula para el ángulo de torsión depende de algunas suposiciones básicas con respecto al comportamiento de un miembro circular que se somete a torsión. Conforme se aplica el par de torsión, un elemento a lo largo de la superficie externa del miembro, inicialmente recto, gira un pequeño ángulo  $\gamma$  (gamma). Asimismo, un radio del miembro en una sección transversal gira en un pequeño ángulo  $\theta$ . En la figura 5-3, las rotaciones  $\gamma$  y  $\theta$  guardan relación con la longitud del arco  $AB$  en la superficie de la barra. Por la geometría, para ángulos pequeños, la longitud del arco es el producto del ángulo en radianes y el radio medido a partir del centro de rotación. Por consiguiente, la longitud del arco  $AB$  puede expresarse como:

$$AB = \gamma L$$

o:

$$AB = \theta c$$

en donde  $c$  es el radio externo de la barra. Estas dos expresiones para la longitud del arco  $AB$  pueden igualarse entre sí:

$$\gamma L = \theta c$$

Si se resuelve para  $\gamma$ , se obtiene:

$$\gamma = \frac{\theta c}{L} \quad (5-2)$$

El ángulo  $\gamma$  mide la deformación por cortante máxima en un elemento de la superficie externa de la barra. En el capítulo 1 se vio que la deformación por cortante,  $\gamma$ , se relaciona con el esfuerzo cortante,  $\tau$ , por el módulo de elasticidad a cortante,  $G$ . Esa relación se expresó como la ecuación (1-7):

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (1-7)$$

En la superficie externa, por consiguiente:

$$\tau = G\gamma$$

Pero la fórmula para el esfuerzo cortante torsional [ecuación (5-11)] establece:

$$\tau = \frac{Tc}{J}$$

Al igualar estas dos expresiones para  $\gamma$ , se obtiene:

$$G\gamma = \frac{Tc}{J}$$

Ahora, al sustituirse la ecuación (5-21) por  $\gamma$ , se obtiene:

$$\frac{G\theta c}{L} = \frac{Tc}{J}$$

Ahora se puede eliminar  $c$  y resolver para  $\theta$ :

$$\theta = \frac{TL}{JG} \quad (5-22)$$



Ángulo de torsión

El ángulo de torsión resultante,  $\theta$ , está en radianes. Cuando en el cálculo se utilizan unidades compatibles para todos los términos, todas las unidades se eliminan y queda un número adimensional. Éste, puede interpretarse como el ángulo,  $\theta$ , en radianes.

La ecuación (5-22) puede usarse para calcular el ángulo de torsión de una sección de una barra circular, ya sea sólida o hueca, con respecto a otra donde  $L$  es la distancia entre ellas, siempre que el par de torsión  $T$ , el momento polar de inercia,  $J$ , y el módulo de elasticidad a cortante,  $G$ , sean los mismos a lo largo de  $L$ . Si alguno de estos factores varía en un problema dado, la barra puede subdividirse en segmentos donde sean constantes para calcular ángulos de rotación de tales segmentos. Luego los ángulos que se calcularon se pueden combinar algebraicamente para obtener el ángulo total de torsión. Este principio, llamado *superposición*, se ilustrará por medio de ejemplos.

El módulo de elasticidad a cortante,  $G$ , mide la rigidez torsional del material de la barra. La tabla 5-3 da valores de  $G$  para materiales que se seleccionaron.

TABLA 5-3 Módulo de elasticidad a cortante,  $G$ .

Material	Módulo a cortante, $G$	
	GPa	psi
Aceros al carbón y aleaciones comunes	80	$11.5 \times 10^6$
Acero inoxidable tipo 304	69	$10.0 \times 10^6$
Aluminio 6061-T6	26	$3.75 \times 10^6$
Cobre al berilio	48	$7.0 \times 10^6$
Magnesio	17	$2.4 \times 10^6$
Aleación de titanio	43	$6.2 \times 10^6$

**Ejemplo 5-11** Determine el ángulo de torsión en grados entre dos secciones con una separación de 250 mm en una varilla de acero de 10 mm de diámetro cuando se aplica un par de torsión de 15 N·m. La figura 5-3 ilustra la disposición de la flecha.

**Solución** **Objetivo** Calcular el ángulo de torsión en grados.

**Datos** Par de torsión aplicado =  $T = 15 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Barra circular; diámetro =  $D = 10 \text{ mm}$ . Longitud =  $L = 250 \text{ mm}$ .

**Análisis** Se puede usar la ecuación (5-22). Calcule  $J = \pi D^4/32$ .  $G = 80 \text{ GPa} = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  (tabla 5-3).

**Resultados**  $\theta = \frac{TL}{JG}$

El valor de  $J$  es:

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi(10 \text{ mm})^4}{32} = 982 \text{ mm}^4$$

Luego:

$$\theta = \frac{TL}{JG} = \frac{(15 \text{ N}\cdot\text{m})(250 \text{ mm})}{(982 \text{ mm}^4)(80 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} \times \frac{(10^3 \text{ mm})^3}{1 \text{ m}^3} = 0.048 \text{ rad}$$

Observe que todas las unidades se eliminan, y si el ángulo se expresa en grados se obtiene:

$$\theta = 0.048 \text{ rad} \times \frac{180 \text{ grados}}{\pi \text{ rad}} = 2.73 \text{ grados}$$

**Ejemplo 5-12** Determine el diámetro conveniente de una flecha redonda de aleación de aluminio 6061-T6 si no se debe torcer más de 0.08 grados en 1.0 pie de longitud cuando se le aplica un par de torsión de 75 lb·plg.

**Solución** **Objetivo** Calcular el diámetro necesario,  $D$ , de la flecha redonda.

**Datos** Par de torsión que se aplica =  $T = 75 \text{ lb}\cdot\text{plg}$ . Longitud =  $L = 1.0 \text{ pies} = 12 \text{ plg}$ . Ángulo máximo de torsión = 0.08 grados. Aluminio 6061-T6.

**Análisis** La ecuación (5-22) puede resolverse para  $J$  porque  $J$  es la única expresión que incluye el diámetro desconocido,  $D$ . Luego, despeje  $D$  de la expresión  $J = \pi D^4/32$ .  $G = 3.75 \times 10^{10} \text{ psi}$  (tabla 5-3).

**Resultados**  $\theta = \frac{TL}{JG}$

$$J = \frac{TL}{\theta G}$$

El ángulo de torsión debe expresarse en radianes.

$$\theta = 0.08 \text{ grados} \times \frac{\pi \text{ rad}}{180 \text{ grados}} = 0.0014 \text{ rad}$$

Por consiguiente:

$$J = \frac{TL}{\theta G} = \frac{(75 \text{ lb} \cdot \text{plg})(12 \text{ plg})}{(0.0014)(3.75 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2)} = 0.171 \text{ plg}^4$$

y como  $J = \pi D^4/32$ :

$$D = \left( \frac{32J}{\pi} \right)^{1/4} = \left[ \frac{(32)(0.171 \text{ plg}^4)}{\pi} \right]^{1/4} = 1.15 \text{ plg}$$

**Comentario** Éste es el diámetro mínimo aceptable. Se debe especificar un diámetro conveniente, por ejemplo de 1.25 plg. El ángulo de torsión resultante será entonces menor que 0.08 grados en un 1.0 pie de longitud.

**Ejemplo 5-13**

La figura 5-11 muestra una varilla de acero con tres discos montados en ella. La varilla tiene su extremo izquierdo fijo contra rotación, pero con el extremo derecho libre para girar sobre una chumacera. Cada disco es de 300 mm de diámetro. En las caras externas de los discos actúan fuerzas dirigidas hacia abajo de modo que la varilla se ve sometida a pares de torsión. Determine el ángulo de torsión de la sección A con respecto a la sección fija E.

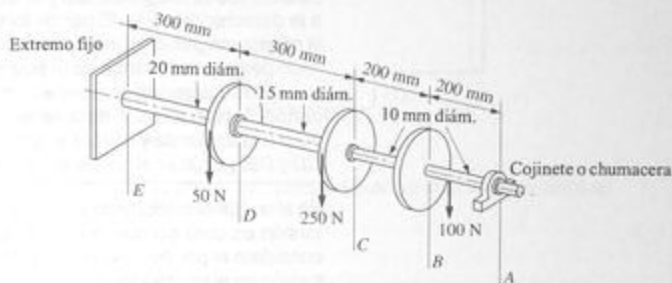


FIGURA 5-11 Varilla del ejemplo 5-13.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular el ángulo de torsión de la sección A con respecto a la sección E de la varilla.
	<b>Datos</b>	Varilla de acero. $G = 80 \text{ GPa}$ . (Tabla 5-3.) La geometría de la varilla y cargas expuestas en la figura 5-11. Para cada disco, diámetro = $D = 300 \text{ mm}$ . Radio = $R = 150 \text{ mm}$ .
	<b>Análisis</b>	El diseño del sistema que se muestra en la figura 5-11 es una varilla de 1000 mm o 1.0 m de longitud total. En la varilla hay cuatro segmentos de diferentes longitudes, diámetros o niveles de par de torsión aplicados. Por consiguiente, debe aplicarse la ecuación 5-22 a cada segmento por separado para calcular el ángulo de torsión de cada uno. En seguida, el ángulo total de torsión de la sección A con respecto a la E será la suma algebraica de los cuatro ángulos. <i>La solución de este ejemplo se demostrará en un formato programado. Usted debe realizar cada operación que se indica antes de pasar a la siguiente sección.</i>

El primer paso es calcular la magnitud y dirección de los pares de torsión que se aplican a cada disco, *B*, *C* y *D*. Hágalo ahora. Recuerde la definición de par de torsión de la ecuación (5-1).

Por lo que se refiere a las direcciones, se supondrá un punto de vista a lo largo de la varilla a partir del extremo derecho. La magnitud del par de torsión en cada uno de los discos es el producto de la fuerza que actúa en su periferia por su radio. Por consiguiente, si se considera el sentido de las manecillas del reloj como positivo:

Par de torsión en disco *B*, en el sentido de las manecillas del reloj:

$$T_B = (100 \text{ N})(150 \text{ mm}) = 15\,000 \text{ N}\cdot\text{mm} = 15 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Par de torsión en el disco *C*, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj:

$$T_C = -(250 \text{ N})(150 \text{ mm}) = -37\,500 \text{ N}\cdot\text{mm} = -37.5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Par de torsión en el disco *D*, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj:

$$T_D = -(50 \text{ N})(150 \text{ mm}) = -7\,500 \text{ N}\cdot\text{mm} = -7.5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Ahora determine el par de torsión en cada segmento de la varilla. Se debe trazar un diagrama de cuerpo libre de cada uno de los segmentos de la varilla entre los extremos de cada segmento "cortando" la varilla y calculando la magnitud del par de torsión que se aplicó a la varilla a la derecha del corte. El par de torsión interno en la varilla debe ser de la misma magnitud y de dirección opuesta al par de torsión externo aplicado para que se mantenga el equilibrio.

Se sugiere que comience en el extremo derecho *A*. La chumacera permite la libre rotación de la varilla en dicho extremo. En seguida, muévase a la izquierda y calcule el par de torsión en los segmentos *AB*, *BC*, *CD* y *DE*. ¿Cuál es el par de torsión en el segmento *AB*?

En el segmento *AB*, hasta *B*, pero sin que se incluya el disco *B*, el par de torsión es cero porque la chumacera permite la libre rotación. Ahora, considere el par de torsión aplicado por el disco *B* y determine el par de torsión en el segmento *BC*.

Si se corta la varilla en un punto cualquiera a la derecha de *C* en el segmento *BC* se tendría un par de torsión externo de 15 N·m en el sentido de las manecillas del reloj, debido al par de torsión del disco *B*. Por consiguiente, el par de torsión a lo largo del segmento *BC* es:

$$T_{BC} = 15 \text{ N}\cdot\text{m} \text{ (sentido de las manecillas del reloj)}$$

Se considerará que este par de torsión actúa en el sentido de las manecillas del reloj y que es positivo porque tiende a girar la varilla en el sentido de las manecillas del reloj.

Ahora determine el par de torsión en el segmento *CD*, llamado  $T_{CD}$ .

Si se corta la varilla en un punto cualquiera entre *C* y *D* se tendría tanto  $T_C$  como  $T_D$  actuando en la varilla a la derecha del corte. Pero actúan en sentido opuesto, uno en el sentido de las manecillas del reloj y el otro en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Así el par de torsión neto aplicado a la varilla es la diferencia entre ellos. Es decir:

$$T_{CD} = -T_C + T_D = -37.5 \text{ N}\cdot\text{m} + 15 \text{ N}\cdot\text{m} = -22.5 \text{ N}\cdot\text{m} \text{ (en el sentido contrario al de las manecillas del reloj)}$$

Ahora continúe este proceso para el segmento final, *DE*.

Entre  $D$  y  $E$  en la varilla, el par de torsión es la resultante de todos los pares de torsión que se aplicaron en  $D$ ,  $C$  y  $B$ .

$$T_{DE} = -T_D - T_C + T_B = -7.5 \text{ N}\cdot\text{m} - 37.5 \text{ N}\cdot\text{m} + 15 \text{ N}\cdot\text{m} = -30 \text{ N}\cdot\text{m}$$

(en sentido contrario al de las manecillas del reloj)

El apoyo fijo  $E$  debe ser capaz de producir un par de torsión de reacción de  $30 \text{ N}\cdot\text{m}$  para mantener la varilla en equilibrio.

En resumen, la distribución del par de torsión se muestra de manera gráfica en la figura 5-12. Nótese que los pares de torsión aplicados  $T_B$ ,  $T_C$  y  $T_D$  son los cambios que experimenta el par de torsión que ocurre en  $B$ ,  $C$  y  $D$  pero no son las magnitudes del par de torsión en esos puntos de la varilla.

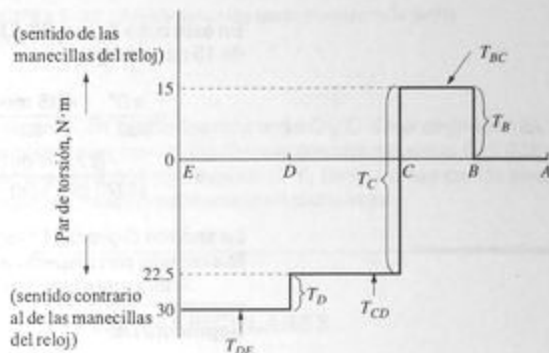


FIGURA 5-12 Distribución del par de torsión en la varilla del ejemplo 5-13.

Ahora calcule el ángulo de torsión en cada uno de los segmentos y aplique la ecuación (5-22) de un modo sucesivo. Comience con el segmento  $AB$ .

#### Segmento $AB$

$$\theta_{AB} = T_{AB} \left( \frac{L}{JG} \right)_{AB}$$

Como  $T_{AB} = 0$ ,  $\theta_{AB} = 0$ . No hay torsión de la varilla entre  $A$  y  $B$ .  
Ahora continúe con el segmento  $BC$ .

#### Segmento $BC$

$$\theta_{BC} = T_{BC} \left( \frac{L}{JG} \right)_{BC}$$

Como datos se tiene  $T_{BC} = 15 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $L = 200 \text{ mm}$  y  $G = 80 \text{ GPa}$  para acero. Para la varilla de  $10 \text{ mm}$  de diámetro:

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (10 \text{ mm})^4}{32} = 982 \text{ mm}^4$$

Por consiguiente:

$$\theta_{BC} = \frac{(15 \text{ N}\cdot\text{m})(200 \text{ mm})}{(982 \text{ mm}^4)(80 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} \times \frac{(10^3)^3 \text{ mm}^3}{\text{m}^3} = 0.038 \text{ rad}$$

Este valor indica que la sección *B* gira 0.038 radianes en sentido de las manecillas del reloj con respecto a la sección *C*, puesto que  $\theta_{BC}$  es el ángulo total de torsión en el segmento *BC*.

Ahora continúe con el segmento *CD*.

### Segmento *CD*

$$\theta_{CD} = T_{CD} \left( \frac{L}{JG} \right)_{CD}$$

En este caso  $T_{CD} = -22.5 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $L = 300 \text{ mm}$  y el diámetro de la varilla es de 15 mm. Luego:

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi(15 \text{ mm})^4}{32} = 4970 \text{ mm}^4$$
$$\theta_{CD} = \frac{-(22.5 \text{ N}\cdot\text{m})(300 \text{ mm})}{(4970 \text{ mm}^4)(80 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} \times \frac{(10^3)^3 \text{ mm}^3}{\text{m}^3} = -0.017 \text{ rad}$$

La sección *C* gira 0.017 radianes en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a la sección *D*.

Ahora, para terminar, complete el análisis del segmento *DE*.

### Segmento *DE*

$$\theta_{DE} = T_{DE} \left( \frac{L}{JG} \right)_{DE}$$

En este caso  $T_{DE} = -30 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $L = 300 \text{ mm}$  y  $D = 20 \text{ mm}$ . Por consiguiente:

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi(20 \text{ mm})^4}{32} = 15700 \text{ mm}^4$$
$$\theta_{DE} = \frac{-(30 \text{ N}\cdot\text{m})(300 \text{ mm})}{(15700 \text{ mm}^4)(80 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} \times \frac{(10^3)^3 \text{ mm}^3}{\text{m}^3} = -0.007 \text{ rad}$$

La sección *D* gira 0.007 radianes en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a *E*.

El paso final es calcular el ángulo de torsión total desde *E* hasta *A* al sumar algebraicamente los ángulos de torsión de todos los segmentos. Hágalo ahora.

Ángulo de torsión total desde *E* hasta *A*:

$$\theta_{AE} = \theta_{AB} + \theta_{BC} - \theta_{CD} - \theta_{DE}$$
$$= 0 + 0.038 - 0.017 - 0.007 = 0.014 \text{ rad}$$

**Resumen y Comentario** Para tener una idea clara de lo que sucede a todo lo largo de la varilla se traza una gráfica del ángulo de torsión como una función de la posición. Esto se hace en la figura 5-13 estableciendo el punto de referencia cero como *E*. La línea recta de *E* a *D* muestra el cambio lineal del ángulo con la posición hasta el valor de  $-0.007$  radianes (en sentido contrario al de las manecillas del reloj). A partir de este valor, el



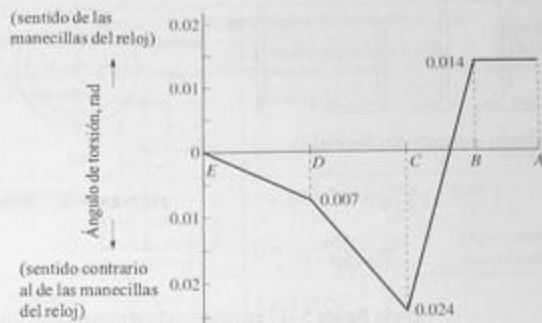


FIGURA 5-13 Ángulo de torsión contra posición en la varilla del ejemplo 5-13.

ángulo se incrementa en  $-0.017$  radianes más entre  $D$  y  $C$ . En el segmento  $BC$ , la rotación relativa es en sentido de las manecillas del reloj con una magnitud de  $0.038$  radianes y termina en el valor final de  $0.014$  radianes en  $B$ . Y, como no hay par de torsión en el segmento  $AB$ , el ángulo de rotación permanece en dicho valor.

## 5-11 TORSIÓN EN SECCIONES NO CIRCULARES

El comportamiento de secciones no circulares cuando se someten a torsión es diferente en sumo grado del de las secciones circulares, las cuales se estudiaron en este capítulo. Existe una gran variedad de perfiles y el análisis de su rigidez y resistencia es diferente para cada uno. El desarrollo de las relaciones implicadas no se llevará a cabo aquí. Las recopilaciones de las fórmulas pertinentes se encuentran en las referencias, de la 1 a la 5, que aparecen al final de este capítulo y en esta sección se dan algunas.

Se pueden hacer algunas generalizaciones. Las secciones sólidas que tienen la misma área de sección transversal son más rígidas cuando su forma se aproxima a la de un círculo (véase la figura 5-14). Por otra parte, un elemento compuesto de perfiles largos esbeltos que no son cerrados como un tubo son muy débiles y flexibles a torsión. Algunos ejemplos de perfiles flexibles son los perfiles estructurales comunes tales como vigas de patín ancho, vigas I estándar, canales, ángulos y tes, como se ilustra en la figura 5-15. Los tubos, las barras sólidas y los tubos rectangulares estructurales son muy rígidos (véase la figura 5-16).



FIGURA 5-14 Comparación de la rigidez de secciones rectangulares y cuadradas a torsión. La sección cuadrada es dos veces más rígida que la rectangular, aun cuando ambas tienen la misma área:  $ab = h^2$ .



FIGURA 5-15 Secciones torsionalmente flexibles.

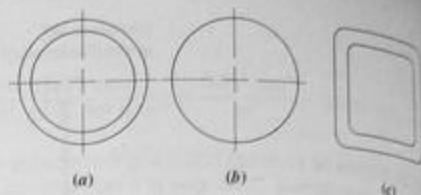


FIGURA 5-16 Secciones torsionalmente rígidas.

En la figura 5-17 se muestra una interesante ilustración de la escasa rigidez de los perfiles abiertos esbeltos. La placa delgada (a), el ángulo (b) y el canal (c) tienen el mismo espesor y área de sección transversal y casi la misma rigidez torsional. Asimismo, si con la placa esbelta va a formarse un perfil circular (d) con una abertura, su rigidez seguiría baja. Sin embargo, si va a cerrarse por completo como en la figura 5-16(a) soldándolo o estirándolo como los tubos sin costura se tendría un elemento un tanto rígido. La comprensión de estas comparaciones sirve para seleccionar un perfil conveniente para elementos sujetos a torsión.

La figura 5-18 muestra siete casos de secciones transversales no circulares de uso común en el diseño de máquinas y en análisis estructural. El cálculo del esfuerzo cortante máximo y el ángulo de torsión se puede llevar modificando un poco la fórmula que se utiliza para secciones transversales circulares dadas aquí.

$$\tau_{\max} = \frac{T}{Q} \quad (5-23)$$

$$\theta = \frac{TL}{GK} \quad (5-24)$$

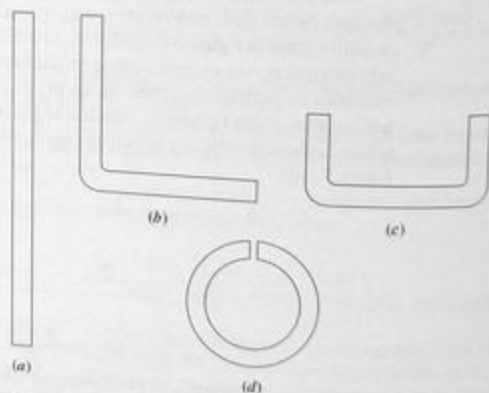


FIGURA 5-17 Secciones con rigidez torsional casi igual (baja).

Forma de la sección transversal	$K =$ para usarse en $\theta = TL/GK$ $Q =$ para usarse en $\tau = T/Q$	El punto negro (•) denota la ubicación de $\tau_{m\acute{a}x}$																					
<b>Cuadrado</b> 	$K = 0.141a^4$ $Q = 0.208a^3$	$\tau_{m\acute{a}x}$ a la mitad de cada lado																					
<b>Rectángulo</b> 	$K = bh^3 \left[ \frac{1}{3} - 0.21 \frac{h}{b} \left( 1 - \frac{(h/b)^4}{12} \right) \right]$ $Q = \frac{bh^2}{[3 + 1.8(h/b)]}$	(Aproximado; dentro = 5%) $\tau_{m\acute{a}x}$ a la mitad de los lados largos																					
<b>Triángulo (equilátero)</b> 	$K = 0.0217a^4$ $Q = 0.050a^3$																						
<b>Flecha con un rebaje plano</b> 	$K = C_1 r^4$ $Q = C_2 r^3$	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>h/r</math></th> <th>0</th> <th>0.2</th> <th>0.4</th> <th>0.6</th> <th>0.8</th> <th>1.0</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>C_1</math></td> <td>0.30</td> <td>0.51</td> <td>0.78</td> <td>1.06</td> <td>1.37</td> <td>1.57</td> </tr> <tr> <td><math>C_2</math></td> <td>0.35</td> <td>0.51</td> <td>0.70</td> <td>0.92</td> <td>1.18</td> <td>1.57</td> </tr> </tbody> </table>	$h/r$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	$C_1$	0.30	0.51	0.78	1.06	1.37	1.57	$C_2$	0.35	0.51	0.70	0.92	1.18	1.57
$h/r$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0																	
$C_1$	0.30	0.51	0.78	1.06	1.37	1.57																	
$C_2$	0.35	0.51	0.70	0.92	1.18	1.57																	
<b>Flecha con dos rebajes planos</b> 	$K = C_3 r^4$ $Q = C_4 r^3$	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>h/r</math></th> <th>0.5</th> <th>0.6</th> <th>0.7</th> <th>0.8</th> <th>0.9</th> <th>1.0</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>C_3</math></td> <td>0.44</td> <td>0.67</td> <td>0.93</td> <td>1.19</td> <td>1.39</td> <td>1.57</td> </tr> <tr> <td><math>C_4</math></td> <td>0.47</td> <td>0.60</td> <td>0.81</td> <td>1.02</td> <td>1.25</td> <td>1.57</td> </tr> </tbody> </table>	$h/r$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	$C_3$	0.44	0.67	0.93	1.19	1.39	1.57	$C_4$	0.47	0.60	0.81	1.02	1.25	1.57
$h/r$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0																	
$C_3$	0.44	0.67	0.93	1.19	1.39	1.57																	
$C_4$	0.47	0.60	0.81	1.02	1.25	1.57																	
<b>Rectángulo hueco</b> 	$K = \frac{2t(a-t)^2(b-t)^2}{(a+b-2t)}$ $Q = 2t(a-t)(b-t)$	Da el esfuerzo promedio; buena aproximación del esfuerzo máximo cuando $t$ es pequeño Las esquinas interiores deben estar muy redondeadas																					
<b>Tubo partido</b> 	$K = 2\pi r^3/3$ $Q = \frac{4\pi^2 r^2 t^2}{(6\pi r + 1.8t)}$	$t$ debe ser pequeño																					

FIGURA 5-18 Métodos para determinar valores de  $K$  y  $Q$  de varios tipos de secciones transversales. (Fuente: *Machine Elements in Mechanical Design*, 2a. ed., Robert L. Mott, derechos reservados © Macmillan Publishing Co., Nueva York. Reimpresión con el permiso del editor.)

El término  $Q$  es análogo al módulo de sección polar  $Z_p$  que se usa para barras circulares. La rigidez torsional se denota por  $K$ , análoga al momento polar de inercia  $J$ .

Nótese en la figura 5-18 que los puntos de esfuerzo cortante máximo en las secciones transversales no circulares se señalan con un punto negro prominente.

A continuación se da un ejemplo que ilustra el alto grado de flexibilidad de un tubo ranurado en comparación con uno cerrado.

**Ejemplo 5-14**

Con una lámina de acero de 4.00 mm de espesor se forma un perfil circular de 90 mm de diámetro externo. El paso final es soldar la costura a lo largo del tubo. Las figuras 5-17(a), 5-17(d) y 5-16(a) ilustran las etapas del proceso. Realice los cálculos siguientes para comparar el comportamiento del tubo soldado una vez cerrado con el de un tubo abierto.

- Calcule el par de torsión que produciría un esfuerzo de 10 MPa en el tubo cerrado soldado.
- Calcule el ángulo de torsión de un segmento de 1.0 m de longitud del tubo cerrado con el par de torsión descrito en el inciso (a).
- Calcule el esfuerzo en el tubo abierto con el par de torsión descrito en el inciso (a).
- Calcule el ángulo de torsión de un segmento de 1.0 m de longitud del tubo abierto con el par de torsión que se determina en el inciso (a).
- Compare el esfuerzo y la deflexión del tubo abierto con los del tubo cerrado.

**Solución**

La solución se realizará si se sigue un formato programado en cada una de sus partes, (a)–(e), dadas como secciones separadas. Cada parte de la solución puede abordarse como un problema diferente con las secciones **Objetivo**, **Datos**, **Análisis** y **Resultados**. Complete el inciso (a) ahora.

<b>Objetivo</b>	Calcular el par de torsión en el tubo cerrado que produciría un esfuerzo cortante torsional de 10 MPa.
<b>Datos</b>	El tubo es de acero. $D_o = 90$ mm. Espesor de pared = $t = 4.0$ mm. $D_i = D_o - 2t = 90$ mm $- 2(4.0$ mm) = 82 mm.
<b>Análisis</b>	Use la ecuación 5-11 para el esfuerzo cortante máximo y resuélvala para $T$ .

**Resultados**

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad (5-11)$$

Luego:

$$T = \frac{\tau_{\max} J}{c}$$

$J$  se calcula con la ecuación (5-13):

$$J = \frac{\pi}{32} (D_o^4 - D_i^4) \quad (5-13)$$

Con  $D_o = 90$  mm = 0.09 m y  $D_i = 82$  mm = 0.082 m:

$$J = \frac{\pi}{32} (0.09^4 - 0.082^4) \text{ m}^4 = 2.00 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Ahora, sea  $\tau_{\max} = 10$  MPa =  $10 \times 10^6$  N/m<sup>2</sup>, por consiguiente:

$$T = \frac{\tau_{\max} J}{c} = \frac{(10 \times 10^6 \text{ N/m}^2)(2.00 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0.045 \text{ m}} = 444 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Es decir, un par de torsión de 444 N·m aplicado al tubo soldado cerrado produciría un esfuerzo cortante torsional máximo de 10 MPa en el mismo. Nótese que este valor de esfuerzo es muy bajo para acero. Ahora complete el inciso (b) del problema.

---

<b>Objetivo</b>	Para el tubo cerrado del inciso (a), calcule el ángulo de torsión.
<b>Datos</b>	$J = 2.00 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ . Longitud = $L = 1.0 \text{ m}$ . Par de torsión = $T = 444 \text{ N}\cdot\text{m}$ , $G = 80 \text{ GPa}$ .
<b>Análisis</b>	Use la ecuación (5-22) para calcular el ángulo de torsión, $\theta$ .
<b>Resultados</b>	$\theta = \frac{TL}{GJ} = \frac{(444 \text{ N}\cdot\text{m})(1.0 \text{ m})}{(80 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(2.00 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} = 0.00278 \text{ rad}$

Al convertir  $\theta$  en grados se obtiene:

$$\theta = 0.00278 \text{ rad} \frac{180 \text{ grados}}{\pi \text{ rad}} = 0.159 \text{ grados}$$

De nuevo, nótese que éste es un ángulo de torsión muy pequeño.

Ahora considere un tubo como el de los incisos (a) y (b) excepto que no está cerrado, como se muestra en la figura 5-17(d). Calcule el esfuerzo cortante torsional en el tubo abierto que causó el par de torsión de 444 N·m.

---

<b>Objetivo</b>	Calcule el esfuerzo cortante en el tubo abierto.
<b>Datos</b>	Par de torsión = $T = 444 \text{ N}\cdot\text{m}$ . $D_o = 90 \text{ mm}$ . Espesor de pared = $t = 4.0 \text{ mm}$ .
<b>Análisis</b>	La ecuación (5-23) puede usarse para calcular el esfuerzo cortante máximo en el tubo abierto antes de soldarlo, considerándolo como una sección transversal no circular. La fórmula para $Q$ se da en la figura 5-18.

$$Q = \frac{4\pi^2 r^2 t^2}{6\pi r + 1.8t}$$

El radio medio es:

$$r = \frac{D_o}{2} - \frac{t}{2} = \frac{90 \text{ mm}}{2} - \frac{4 \text{ mm}}{2} = 43 \text{ mm}$$

Por consiguiente:

$$Q = \frac{4\pi^2(43)^2(4)^2}{6\pi(43) + 1.8(4)} \text{ mm}^3 = 1428 \text{ mm}^3$$

El esfuerzo en el tubo abierto es, por lo tanto:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{Q} = \frac{444 \text{ N}\cdot\text{m}}{1428 \text{ mm}^3} \frac{1000 \text{ mm}}{\text{m}} = 311 \text{ MPa}$$

Ahora complete el inciso (d) con el cálculo del ángulo de torsión del tubo abierto.

---

- Objetivo** Calcular el ángulo de torsión del tubo abierto con  $T = 444 \text{ N}\cdot\text{m}$ .
- Datos** Longitud  $= L = 1.0 \text{ m}$ . Par de torsión  $T = 444 \text{ N}\cdot\text{m}$ .  $G = 80 \text{ Gpa}$ .  
 $D_o = 90 \text{ mm}$ . Espesor de pared  $= t = 4.0 \text{ mm}$ .
- Análisis** Con la ecuación (5-24) se puede calcular el ángulo de torsión del tubo abierto. La figura 5-18 da la fórmula para la constante de rigidez torsional,  $K$ . Con  $r = 43 \text{ mm} = 0.043 \text{ m}$  y  $t = 4 \text{ mm} = 0.004 \text{ m}$  se obtiene:

$$K = \frac{2\pi r t^3}{3} = \frac{2\pi(0.043)(0.004)^3}{3} = 5.764 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Entonces el ángulo de torsión es:

$$\theta = \frac{TL}{GK} = \frac{(444 \text{ N}\cdot\text{m})(1.0 \text{ m})}{(80 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(5.764 \times 10^{-9} \text{ m}^4)} = 0.963 \text{ rad}$$

Al convertir  $\theta$  en grados, se obtiene:

$$\theta = 0.963 \text{ rad} \frac{180 \text{ grados}}{\pi \text{ rad}} = 55.2 \text{ grados}$$

Ahora complete el inciso final (e) con la comparación de los tubos abiertos y cerrados.

- Objetivo** Comparar el esfuerzo y la deflexión del tubo abierto con los del tubo cerrado.
- Datos** Los resultados de los incisos (a), (b), (c) y (d):  
 Esfuerzo en el tubo cerrado  $= \tau_c = 10 \text{ MPa}$ .  
 Ángulo de torsión del tubo cerrado  $= \theta_c = 0.159 \text{ grados}$ .  
 Esfuerzo en el tubo abierto  $= \tau_o = 311 \text{ MPa}$ .  
 Ángulo de torsión del tubo abierto  $= \theta_o = 55.2 \text{ grados}$ .

**Análisis** Relación de los esfuerzos:

$$\frac{\tau_o}{\tau_c} = \frac{311 \text{ MPa}}{10 \text{ MPa}} = 31.1 \text{ veces mayor}$$

Relación de los ángulos de torsión:

$$\frac{\theta_o}{\theta_c} = \frac{55.2 \text{ grados}}{0.159 \text{ grados}} = 347 \text{ veces mayor}$$

**Comentarios** Estas comparaciones son una clara demostración de la ventaja de usar perfiles cerrados para soportar torsión. Además, el valor del esfuerzo real que se calculó para el tubo abierto es probable que sea mayor que el esfuerzo permisible de muchos aceros. Recuerde que el esfuerzo cortante de diseño es:

$$\tau_d = \frac{0.5s_y}{N}$$

Luego la resistencia a la cedencia que se requiere del material para que sea seguro a un esfuerzo de 311 MPa y un factor de diseño de 2.0 es:

$$s_y = \frac{N r_d}{0.5} = \frac{2(311 \text{ MPa})}{0.5} = 1244 \text{ MPa}$$

Sólo unos cuantos de los aceros térmicamente tratados que aparecen en el apéndice A-13 tienen este valor de resistencia a la cedencia.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Bloodgett, O. W., *Design of Weldments*, James F. Lincoln Arc Welding Foundation, Cleveland, OH, 1963.
2. Boresi, A. P., O. M. Sidebottom, F. B. Seely, and J. O. Smith, *Advanced Mechanics of Materials*, 3rd ed., New York, 1978.
3. Mott, R. L., *Machine Elements in Mechanical Design*, 2nd ed., Macmillan Publishing Co., New York, 1992.
4. Popov, E. P., *Engineering Mechanics of Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.
5. Young, W. C., *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1989.

## PROBLEMAS

- 5-1.M Calcule el esfuerzo cortante torsional que se produciría en una flecha circular sólida de 20 mm de diámetro cuando se somete a un par de torsión de 280 N·m.
- 5-2.M Calcule el esfuerzo cortante torsional en una flecha hueca de 35 mm de diámetro externo y 25 mm de diámetro interno, cuando se somete a un par de torsión de 560 N·m.
- 5.3.I Calcule el esfuerzo cortante torsional en una flecha cuyo diámetro es de 1.25 plg cuando transmite un par de torsión de 1550 lb·plg.
- 5-4.I Un tubo de acero se usa como flecha para transmitir 5500 lb·plg de par de torsión. Su diámetro externo es de 1.75 plg y su espesor de pared de 1/8 plg. Calcule el esfuerzo cortante torsional en las superficies externa e interna del tubo.
- 5-5.M El mecanismo impulsor de un proyector de cine funciona por un motor de 0.08 kW cuyo eje gira a 180 rad/s. Calcule el esfuerzo cortante torsional en su eje de 3.0 mm de diámetro.
- 5-6.M Las aspas de una batidora giran a 42 rad/s y requieren 35 kW de potencia. Calcule el esfuerzo cortante torsional en el eje que las impulsa suponiendo que esté hueco, y cuyos diámetros externo e interno son de 40 mm y 25 mm, respectivamente.
- 5-7.I La flecha motriz de una fresadora transmite 15.0 hp a una velocidad de 240 rpm. Calcule el esfuerzo cortante torsional en la flecha si es sólida y de 1.44 plg de diámetro. ¿Sería segura la flecha si el par de torsión se aplica con golpe y si está hecha de acero AISI 4140 OQT 1300?
- 5-8.I Repita el problema 5-7 suponiendo que la flecha contiene un cuñero de perfil.
- 5-9.I La figura 5-19 muestra el extremo de la flecha vertical de una podadora de pasto rotatoria. Calcule el esfuerzo cortante torsional máximo en la flecha si tiene que transmitir 7.5 hp a las cuchillas cuando gira a 2200 rpm. Especifique un acero adecuado para la flecha.
- 5-10.I La figura 5-20 muestra una flecha escalonada sometida a torsión. La sección de mayor diámetro tiene un agujero que la atraviesa de lado a lado.
- (a) Calcule el esfuerzo cortante máximo en el escalón cuando se le aplica un momento de torsión de 7500 lb·plg.
  - (b) Determine el agujero de mayor diámetro que se podría perforar en la flecha de modo que continúe con el esfuerzo cerca del agujero a un valor igual o menor que el que se produce en el escalón.

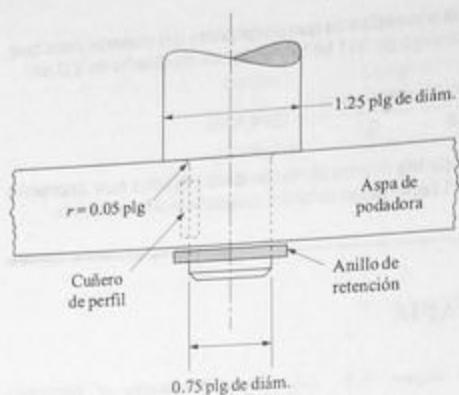


FIGURA 5-19 Flecha del problema 5-9.

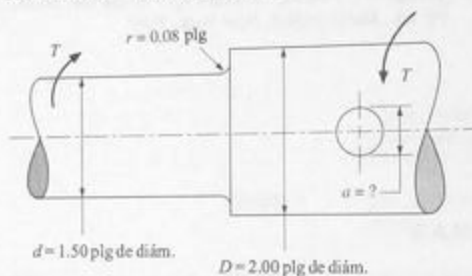


FIGURA 5-20 Flecha del problema 5-10.

- 5-11.M Calcule el esfuerzo cortante torsional y el ángulo de torsión en grados en un tubo de aluminio, de 600 mm de largo, 60 mm de diámetro interno y 80 mm de diámetro externo cuando se somete a un par de torsión constante de 4500 N·m. A continuación especifique una aleación de aluminio propia para el tubo.
- 5-12.M Se tienen en mente dos diseños para una flecha. Ambos son de 50 mm de diámetro externo y 600 mm de largo. Uno es una barra sólida y el otro es una barra hueca de 40 mm de diámetro interno. Las dos barras son de acero. Compare el esfuerzo cortante torsional, el ángulo de torsión y la masa de los dos diseños cuando se someten a un par de torsión de 850 N·m.
- 5-13.M Determine los diámetros interno y externo que se requieren para que una flecha hueca transmita un par de torsión de 1200 N·m con un esfuerzo cortante torsional máximo de 45 MPa. Haga que la relación del diámetro externo al diámetro interno sea aproximadamente de 1.25.
- 5-14.I El eje de una fresadora impulsado por engranes transmite 7.5 hp a una velocidad de 240 rpm. Calcule

el esfuerzo cortante torsional en el eje sólido de 0.860 plg de diámetro.

- 5-15.I La flecha de entrada del mando de engranes descrita en el problema 5-14 también transmite 7.5 hp, sólo que ahora gira a 1140 rpm. Determine el diámetro que se necesita en la flecha de entrada para que soporte el mismo esfuerzo que la flecha de salida.
- 5-16.I Determine el esfuerzo que se produciría en una llave de 1/2 plg en un tubo de acero cédula 40 cuando unplomero aplica una fuerza de 80 lb en el extremo de una llave de tuercas de 18 plg de largo.
- 5-17.I Un anuncio giratorio completa 1 revolución cada 5 segundos. Cuando el viento sopla con fuerza, se requiere un par de torsión de 30 lb·pie para mantener la velocidad de rotación. Calcule la fuerza que se requiere para impulsar el anuncio. Calcule también el esfuerzo en la flecha motriz final si su diámetro es de 0.60 plg. Especifique un acero adecuado para la flecha para estipular un factor de diseño de 4 basado en la resistencia a la cedencia a cortante.
- 5-18.M Se suelda una barra cilíndrica corta en un extremo de una placa rígida, y en seguida se aplica un par de torsión en el otro. Si la barra tiene un diámetro de 15 mm y es de acero AISI 1020 estirado en frío, calcule el par de torsión que se le debe aplicar para someterla a un esfuerzo igual a su resistencia a la cedencia a cortante. Use  $s_{xy} = s_x/2$ .
- 5-19.I Una flecha propulsora de hélice en un barco debe transmitir 2500 hp a 75 rpm. Se tiene que fabricar de acero AISI 1040 WQT 1300. Use un factor de diseño de 6 que se base en la resistencia a la cedencia a cortante. La flecha tiene que ser hueca, con su diámetro interno igual a 0.80 veces su diámetro externo. Determine el diámetro requerido de la flecha.
- 5-20.I Si la flecha propulsora del problema 5-19 tuviera que ser sólida en lugar de hueca, determine el diámetro que se requiere. A continuación calcule la relación del peso de la flecha sólida al de la flecha hueca.
- 5-21.M El vástago de un potente destornillador tiene un diámetro de 5.0 mm. ¿Qué par de torsión se puede aplicar al destornillador si el esfuerzo limitante que causa la torsión es de 80 MPa?
- 5-22.M Una extensión de una llave de dado similar a la expuesta en la figura 5-1 tiene un diámetro de 6.0 mm y una longitud de 250 mm. Calcule el esfuerzo y el ángulo de torsión en la extensión cuando se le aplica un par de torsión de 5.5 N·m. La extensión es de acero.
- 5-23.M Calcule el ángulo de torsión en una flecha de acero de 15 mm de diámetro y 250 mm de largo cuando se le aplica un par de torsión de 240 N·m.



- 5-24.M Calcule el ángulo de torsión en un tubo de aluminio cuyos diámetros externo e interno son de 80 mm y 60 mm, respectivamente, cuando se somete a un par de torsión de 2250 N·m. El tubo es de 1200 mm de largo.
- 5-25.I Una varilla de acero de 8.0 pies de largo y 0.625 plg de diámetro se usa como llave para desatornillar un tapón en el fondo de un estanque. Si se requieren 40 lb·pie de par de torsión para aflojarlo, calcule el ángulo de torsión de la varilla.
- 5-26.I ¿Qué diámetro debe tener la varilla del problema 5-25 si se desea que experimente solamente 2.0 grados de torsión cuando se somete a 40 lb·pie de par de torsión?
- 5-27.M Calcule el ángulo de torsión del extremo libre con respecto al extremo fijo de la barra de acero que ilustra la figura 5-21.

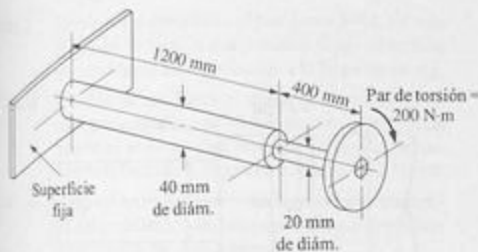


FIGURA 5-21 Barra del problema 5-27.

- 5-28.M Un calibrador de par de torsión se vale del ángulo de torsión de una flecha para medir el par de torsión. La flecha tiene que ser de aleación de aluminio 6061-T6 y de 150 mm de longitud. Determine el diámetro requerido de la flecha si se desea que experimente un ángulo de torsión de 10.0 grados cuando se aplica un par de torsión de 5.0 N·m al calibrador. Para la flecha con este diseño, calcule el esfuerzo cortante torsional y luego calcule el factor de diseño resultante para la misma. ¿Es satisfactorio? Si no lo es, ¿qué haría usted?
- 5-29.M Un alambre de cobre al berilio de 1.50 mm de diámetro y 40 mm de largo se usa sometiéndolo a torsión en un instrumento. Determine el ángulo de torsión que se produce en el alambre cuando se somete a un esfuerzo de 250 MPa.
- 5-30.M Un tubo de combustible de un avión es de aleación de titanio. El tubo tiene un diámetro externo de 18 mm y un diámetro interno de 16 mm. Calcule el esfuerzo en el tubo si un tramo de éste de 1.65 m se debe torcer en un ángulo de 40 grados durante su instalación. Determine el factor de diseño con

base en la resistencia a la codencia a cortante del tubo si el tubo es de aleación Ti-6Al-4V, vieja.

- 5-31.M Para la flecha en la figura 5-22 calcule el ángulo de torsión de las poleas B y C con respecto a la A. El diámetro de la flecha de acero es de 35 mm a todo lo largo de ésta. Los pares de torsión son  $T_1 = 1500$  N·m,  $T_2 = 1000$  N·m,  $T_3 = 500$  N·m. Las longitudes son  $L_1 = 500$  mm y  $L_2 = 800$  mm.

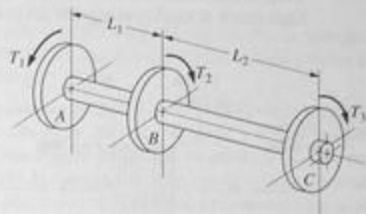


FIGURA 5-22 Flecha del problema 5-31.

- 5-32.M Una barra de torsión de una suspensión de camión tiene que ser de acero y de 820 mm de largo. Se somete a un par de torsión de 1360 N·m y debe limitarse a 2.2 grados de torsión. Determine el diámetro necesario de la barra circular sólida. En seguida calcule el esfuerzo en la barra.
- 5-33.M La flecha motriz de acero de un automóvil es un tubo hueco de 1525 mm de largo. Su diámetro externo es de 75 mm y su diámetro interno de 55 mm. Si la flecha transmite 120 kW de potencia a una velocidad de 225 rad/s, calcule el esfuerzo cortante torsional en ella y el ángulo de torsión de uno de sus extremos con respecto al otro.
- 5-34.M El eje trasero de un automóvil es una flecha sólida de acero cuya configuración es la expuesta en la figura 5-23.

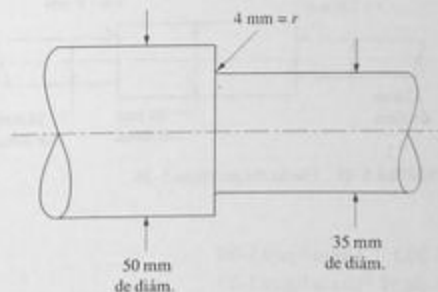


FIGURA 5-23 Eje del problema 5-34.

Al considerar la concentración de esfuerzo que causa el escalón, calcule el esfuerzo cortante torsional en el eje cuando gira a 70.0 rad/s y transmite 60 kW de potencia.

- 5-35.M La flecha de salida de una transmisión automotriz tiene la configuración que se muestra en la figura 5-24. Si transmite 105 kW a 220 rad/s, calcule el máximo esfuerzo cortante torsional en la flecha. Tenga en cuenta la concentración de esfuerzo en el lugar donde se localiza el engrane del velocímetro.

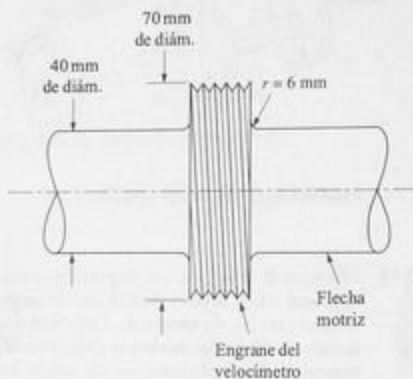


FIGURA 5-24 Flecha del problema 5-35.

Las figuras correspondientes a los problemas del 5-36 al 5-39 muestran segmentos de flechas de un equipo transmisor de potencia. Calcule el par de torsión cíclico máximo que se podría aplicar con seguridad a cada flecha si tienen que ser de acero AISI 1141 OQT 1100.

- 5-36.M Use la figura 5.25.

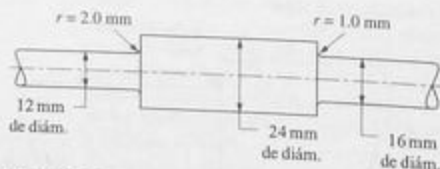


FIGURA 5-25 Flecha del problema 5-36.

- 5-37.I Use la figura 5-26.  
5-38.M Use la figura 5-27.  
5-39.I Use la figura 5-28.

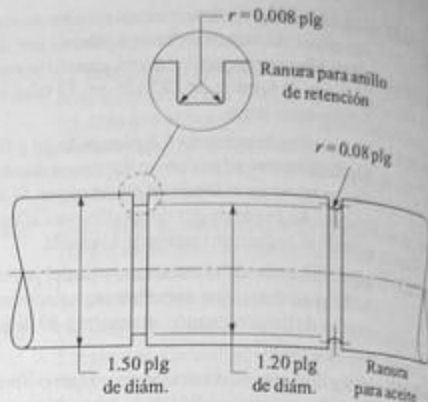


FIGURA 5-26 Flecha del problema 5-37.

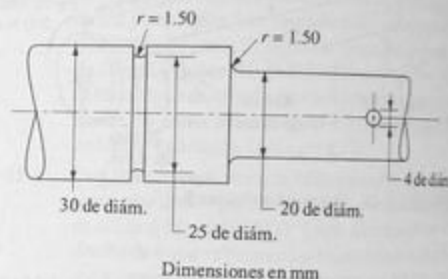


FIGURA 5-27 Flecha del problema 5-38.

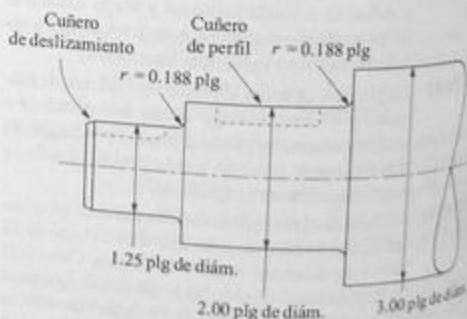


FIGURA 5-28 Flecha del problema 5-39.

### Secciones no circulares

- 5-40.M Calcule el par de torsión que produciría un esfuerzo cortante torsional de 50 MPa en una barra de acero cuadrada de 20 mm de lado.
- 5-41.M Para la varilla del problema 5-40 calcule el ángulo de torsión que produciría el par de torsión que se determina en el problema a lo largo de 1.80 m.
- 5-42.I Calcule el par de torsión que produce un esfuerzo cortante torsional de 7500 psi en una varilla de aluminio cuadrada, de 1.25 plg de lado.
- 5-43.I Para la varilla del problema 5-42 calcule el ángulo de torsión que produciría el par de torsión que se determina en el problema a lo largo de 48 plg.
- 5-44.I Calcule el par de torsión que produce un esfuerzo cortante torsional de 7500 psi en una varilla de aluminio rectangular de 1.25 plg de espesor por 3.0 plg de ancho.
- 5-45.I Para la barra descrita en el problema 5-44, calcule el ángulo de torsión que produce el par de torsión que se calculó en el problema a lo largo de 48 plg.
- 5-46.M El perfil de una barra extruida de aluminio es un triángulo equilátero de 30 mm de lado. ¿Qué par de torsión se requiere para producir un ángulo de torsión en la barra de 0.80 grados a lo largo de 2.60 m?
- 5-47.M ¿Qué esfuerzo se desarrollaría en la barra triangular del problema 5-46 si transmite el par de torsión determinado en el problema?
- 5-48.I El segmento de una flecha de acero que se muestra en la figura 5-29 tiene un rebaje plano maquinado en un lado. Calcule el esfuerzo cortante torsional tanto en la sección circular como en la rebajada cuando se aplica un par de torsión de 850 lb·plg.

- 5-49.I Para la flecha de acero expuesta en la figura 5-29, calcule el ángulo de torsión de un extremo con respecto al otro si se aplica de modo uniforme un par de torsión de 850 lb·plg uniformemente a todo lo largo de ésta.
- 5-50.I Repita el problema 5-48 con todos los datos iguales excepto que se maquinan dos rebajes en la flecha, que dan una medición total a través de ellos de 1.25 plg.
- 5-51.I Repita el problema 5-49 con una flecha que tiene dos rebajes, que dan una medición total a través de ellos de 1.25 plg.
- 5-52.M Se fabrica de titanio Ti-6Al-4V, viejo, un perno cuadrado de 200 mm de largo y 8 mm de lado. ¿Qué ángulo de torsión se produce cuando una llave de tuercas aplica un par de torsión puro que produce un esfuerzo igual a la resistencia a la cedencia del material a cortante?
- 5-53.I Un tubo de acero estructural cuadrado estándar tiene las dimensiones de sección transversal de  $4 \times 4 \times 1/4$  plg y es de 8.00 pies de longitud. Calcule el par de torsión que se necesita para torcerlo 3.00 grados.
- 5-54.I Calcule el esfuerzo cortante máximo en el tubo del problema 5-53 cuando se tuerce 3.00 grados. ¿Sería seguro este ángulo de torsión si el tubo es de acero estructural ASTM A501 y la carga fuera estática?
- 5-55.I Repita el problema 5-53 para un tubo rectangular de  $6 \times 4 \times 1/4$ .
- 5-56.I Repita el problema 5-54 para un tubo rectangular de  $6 \times 4 \times 1/4$ .
- 5-57.I Un tubo de acero cédula 40 de 6 plg estándar tiene aproximadamente la misma área de sección transversal que un tubo cuadrado de  $6 \times 6 \times 1/4$ , por lo que un segmento de ambos de una misma longitud pesaría lo mismo. Si se les aplicara el mismo par de torsión a ambos, compare el esfuerzo cortante torsional y el ángulo de torsión resultantes en los dos perfiles.

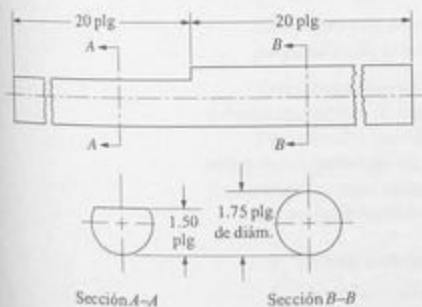


FIGURA 5-29 Problemas 5-48 y 5-49.

1. Se precisa diseñar una flecha circular sólida para un par de torsión dado, una resistencia a la cedencia del material dada y un factor de diseño dado; calcule el diámetro que se requiere para la flecha.

**Adiciones a la tarea 1**

- (a) Para una potencia transmitida y velocidad de rotación dadas, calcule el par de torsión aplicado.
  - (b) Incluya una tabla de materiales de entre los cuales el diseñador pueda seleccionar uno. En seguida y de manera automática busque la resistencia de cedencia.
  - (c) Incluya la tabla de factores de diseño, tabla 5-1. En seguida, pídale al diseñador que especifique el tipo de carga únicamente y que determine el factor de diseño apropiado con la tabla incluida en el programa.
2. Repita la tarea 1, pero ahora diseñe una flecha circular hueca. Existen tres posibles procedimientos de solución:
    - (a) Para un diámetro externo dado, calcule el diámetro interno que se requiere.
    - (b) Para un diámetro interno dado, calcule el diámetro externo que se requiere.
    - (c) Para una relación dada de  $D_i/D_o$ , determine tanto  $D_i$  como  $D_o$ .

**Adiciones a la tarea 2**

- (a) Calcule la masa del diseño resultante para una longitud y densidad del material dadas.
- (b) Si la computadora cuenta con tarjeta de gráficos, dibuje la sección transversal resultante y dimensiónela.

3. Introduzca las curvas del factor de concentración de esfuerzo en el programa y considere el cálculo automático de  $K$ , para factores dados tales como radio de rebaje, relación de diámetros, diámetro de agujero, etc. Se podrá usar cualquiera de los casos expuestos en los apéndices A-21-5, A-21-6 o A-21-7. Este programa puede ejecutarse por sí mismo o como anexo de otros programas de análisis de esfuerzo.

4. Calcule el ángulo de torsión con la ecuación (5-21) con  $T$ ,  $L$ ,  $G$  y  $J$  dados.

**Adiciones a la tarea 4**

- (a) Calcule  $J$  con dimensiones dadas de la flecha, ya sea sólida o hueca.
  - (b) Incluya una tabla de valores de  $G$ , tomados de la tabla 5-3 en el programa.
5. Calcule el diámetro que se requiere de una flecha circular sólida para limitar el ángulo de torsión a un valor específico.
  6. Calcule el ángulo de torsión de un extremo de una flecha de varias secciones con respecto al otro, como en el ejemplo 5-13. Considere longitudes, diámetros, materiales y pares de torsión diferentes en cada sección.
  7. Escriba un programa para calcular los valores del módulo de sección efectivo,  $Q$ , y la constante de rigidez torsional,  $K$ , con base en la figura 5-18 en uno o todos los casos.

**Adición a la tarea 7**

Determine las ecuaciones para  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  en función de la relación  $h/r$ , para flechas con rebajes planos. Use una máquina de ajuste de curva.



# 6

## Fuerzas cortantes y momentos flexionantes en vigas

### 6-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

La mayor parte del planteamiento en los seis capítulos siguientes se ocupa de las vigas.

*Una viga es un miembro que se somete a cargas transversales, es decir, perpendiculares a lo largo de su eje.*

Tales cargas provocan *esfuerzos cortantes* en la viga y le imparten su figura característica de pandeo, lo que también da como consecuencia *esfuerzos flexionantes*.

Para calcular los esfuerzos cortantes y los momentos flexionantes, se precisa determinar la magnitud de las *fuerzas cortantes* internas y los *momentos flexionantes* que se desarrollan en vigas causados por una amplia variedad de cargas.

Después de terminar el estudio de este capítulo, el lector será capaz de:

1. Definir el término *viga* y reconocer cuándo un miembro de carga es una viga.
2. Describir varias clases de patrones de carga de vigas: *cargas concentradas*, *cargas uniformemente distribuidas*, *cargas distribuidas linealmente variables* y *momentos concentrados*.
3. Describir varias clases de vigas según el tipo de sus apoyos: *viga simple*, *viga saliente*, *viga en voladizo* y *viga compuesta* de más de un componente.
4. Dibujar diagramas de cuerpo libre de vigas y de sus componentes que muestren todas las fuerzas y reacciones externas.

5. Calcular la magnitud de las reacciones y los momentos y determinar sus direcciones.
6. Definir *fuerza cortante* y determinar su magnitud en cualquier parte de la viga.
7. Dibujar diagramas de cuerpo libre de *componentes* de vigas y mostrar las fuerzas cortantes internas.
8. Dibujar diagramas de fuerza cortante completos de vigas que soportan varios patrones de carga y con varias condiciones de apoyo.
9. Definir *momento flexionante* y determinar su magnitud en cualquier parte de una viga.
10. Dibujar diagramas de cuerpo libre de *componentes* de vigas y mostrar los momentos flexionantes internos.
11. Dibujar diagramas de momento flexionante completos de vigas sometidas a varios patrones de carga y con varias condiciones de apoyo.
12. Usar las *leyes de los diagramas de vigas* para relacionar los diagramas de carga, cortante y momento flexionante entre sí y dibujarlos.
13. Dibujar diagramas de cuerpo libre de elementos de vigas y estructuras compuestas y los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante correspondientes a cada uno.
14. Considerar con propiedad los *momentos concentrados* en el análisis de vigas.

## 6-2 CARGAS EN VIGAS, APOYOS Y TIPOS DE VIGAS

Recuérdese la definición de viga.

*Una viga es un miembro que se somete a cargas transversales, es decir, perpendiculares a lo largo de su eje.*

Cuando se analiza una viga para determinar las reacciones, las fuerzas cortantes internas y los momentos flexionantes internos, conviene clasificar el patrón de carga, el tipo de apoyos y el tipo de viga.

Las vigas se someten a varios patrones de carga, incluidas:

Cargas concentradas normales

Cargas concentradas con inclinación

Cargas uniformemente distribuidas

Cargas variables distribuidas

Momentos concentrados

Los tipos de apoyos incluyen:

Apoyo simple de rodillo

Apoyo de pasador

Apoyo fijo o empotrado

Los tipos de vigas incluyen:

Vigas simplemente apoyadas; o vigas simples

Vigas salientes

Vigas en voladizo; o voladizas

Vigas compuestas

Vigas continuas

La comprensión de todos estos términos sirve para comunicar las características sobresalientes de los diseños de vigas y para realizar los análisis que se requieren. A continuación se da una descripción de cada uno de ellos junto con ilustraciones que permiten visualizarlos.

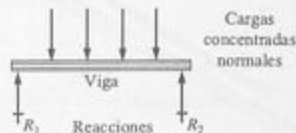
### Patrones de carga

En esta sección se demostrará que la naturaleza del patrón de carga determina la variación de la fuerza cortante y el momento flexionante a lo largo de la viga. Se definen los cinco patrones de carga más usuales y se dan ejemplos de cada uno. A menudo se pueden analizar patrones de carga más complejos considerándolos como combinaciones de dos o más de los tipos básicos.

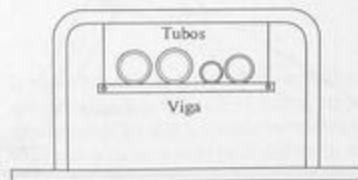
#### *Cargas concentradas normales*

**Una carga normal concentrada es la que actúa perpendicular (normal) al eje mayor de la viga en un solo punto o a lo largo de un segmento muy pequeño de la viga.**

La figura 6-1(a) muestra la forma característica de representar una viga que se somete a cargas concentradas normales. Cada una de las cargas se muestra como un vector que



(a) Representación esquemática de una viga con cargas y reacciones



(b) Representación pictórica de una viga con cargas

FIGURA 6-1 Viga simple con cargas concentradas normales.

actúa en la viga perpendicular a su eje mayor. La parte (b) ilustra una situación que produce cargas concentradas. El peso de los tubos y su contenido determinan las magnitudes de las cargas. Si bien con frecuencia se visualizan cargas que actúan con dirección hacia abajo debido a la gravedad, las cargas reales pueden actuar en cualquier dirección. Sobre todo en la maquinaria mecánica, las fuerzas que se producen por los enlaces, actuadores, resortes, mordazas y otros mecanismos pueden actuar en cualquier dirección. La figura 6-2 muestra un ejemplo simple.

Las cargas concentradas normales tienden a provocar flexión pura en las vigas. La mayoría de los problemas de este capítulo incluyen este tipo de carga. El análisis de los esfuerzos flexionantes que se originan se presenta en el capítulo 8.

### *Cargas concentradas con inclinación*

**Una carga concentrada inclinada es la que actúa efectivamente en un punto, pero cuya línea de acción forma un ángulo con el eje principal de la viga.**

La figura 6-3 muestra un ejemplo. La carga con inclinación y que ejerce el resorte provoca una combinación de esfuerzos flexionantes y axiales en la viga. El capítulo 11 presenta las técnicas de análisis de este patrón de carga.

### *Cargas uniformemente distribuidas*

Las cargas de magnitud constante que actúan perpendiculares al eje de una viga a lo largo del segmento significativo de la viga se llaman cargas uniformemente distribuidas.

Un ejemplo de este tipo de carga sería el peso de la nieve de espesor uniforme sobre un techo soportado por vigas horizontales planas. Asimismo, los materiales que componen

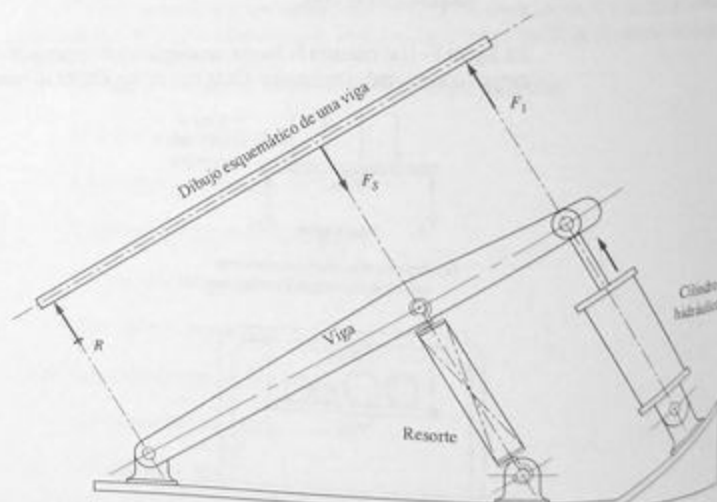


FIGURA 6-2 Palanca de una máquina que se comporta como una viga simple sometida a cargas concentradas normales.



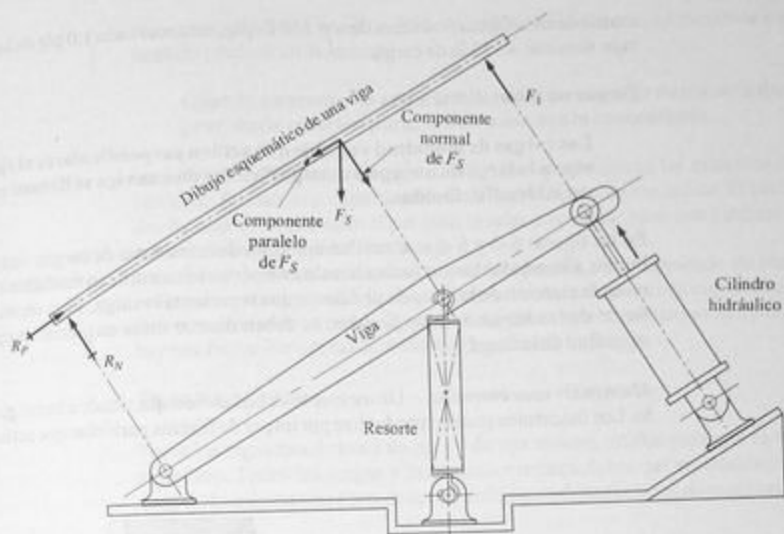


FIGURA 6-3 Palanca de una máquina que se comporta como una viga simple sometida a cargas concentradas normales.

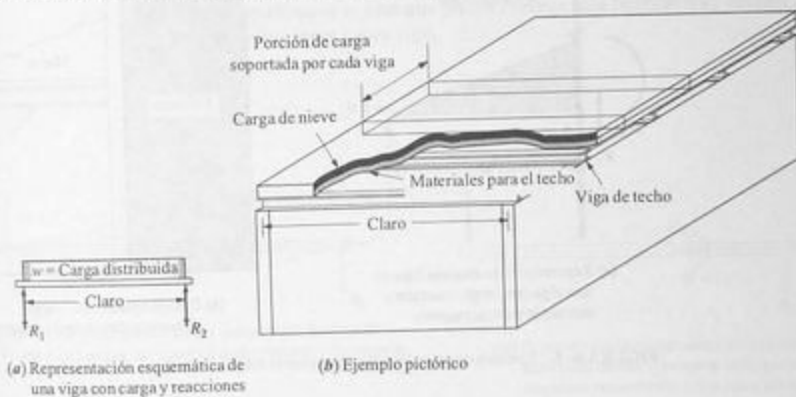


FIGURA 6-4 Viga simple sometida a una carga uniformemente distribuida.

la estructura de techo, propiamente dicha, con frecuencia se instalan uniformemente distribuidos. La figura 6-4 ilustra un patrón de carga de ese tipo y muestra cómo se representan las cargas uniformemente distribuidas en los problemas de este libro. El área rectangular sombreada define la extensión de la carga a lo largo de la viga. La magnitud de la carga se indica por medio de una "razón" de carga  $w$ , en unidades de fuerza por unidad de longitud. Las unidades representativas serían lb/plg, kN/m o K/pie. Recuérdese que  $1 \text{ K} = 1 \text{ kip} = 1000 \text{ lb}$ . Por ejemplo, si la carga que actúa en la viga

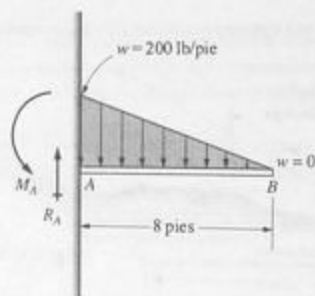
mostrada en la figura 6-4 fuera de  $w = 150 \text{ lb/plg}$ , entonces cada 1.0 plg de longitud de la viga soportaría 150 lb de carga.

### Cargas variables distribuidas

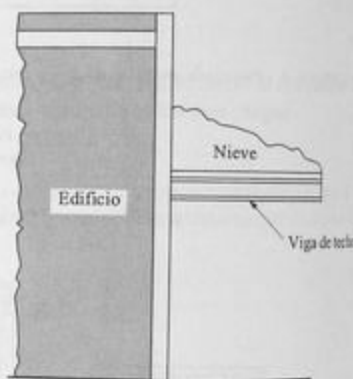
Las cargas de magnitud variable que actúan perpendiculares al eje de una viga a lo largo de un segmento significativo de una viga se llaman cargas variables distribuidas.

En las figuras 6-5 y 6-6 se muestran ejemplos de estructuras de cargas variables distribuidas. Cuando las cargas varían linealmente, éstas se cuantifican mediante el valor de  $w$  en cada extremo de la línea de pendiente que representa la carga. Para un análisis más a fondo de las variaciones no lineales, se deben diseñar otros esquemas para obtener la magnitud de la carga.

**Momentos concentrados.** Un momento es una acción que tiende a hacer girar un objeto. Los momentos pueden producirse por un par de fuerzas paralelas que actúan en direcciones opuestas.

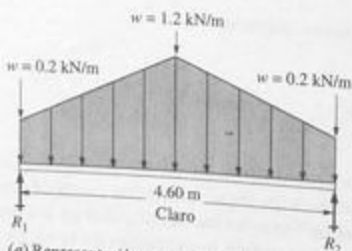


(a) Representación esquemática de una viga con carga, reacción y momento y datos muestra



(b) Ejemplo pictórico - carga de nieve sobre un techo saliente

FIGURA 6-5 Ejemplo de carga linealmente variable sobre un voladizo.



(a) Representación esquemática de una viga con carga, reacciones y datos muestra



(b) Ejemplo pictórico - grava sobre una plataforma

FIGURA 6-6 Ejemplo de una carga linealmente variable sobre una viga simple.

ciones opuestas; esta acción se llama *par*. La acción contra una manivela o una palanca también produce un momento.

**Cuando un momento actúa en un punto de una viga de manera que tiende a provocarle rotación pura, se llama momento concentrado.**

La figura 6-7 muestra un ejemplo. Las fuerzas que actúan en los extremos de los brazos verticales forman un par que tiende a flexionar la viga como se indica. El hecho de que las dos fuerzas que componen el par sean iguales y opuestas hace que ninguna fuerza horizontal neta resulte aplicada en la viga.

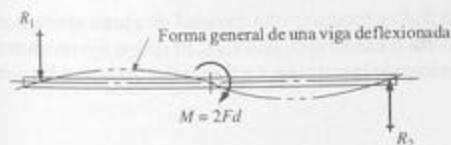
Los momentos concentrados también pueden ser el resultado de una fuerza que actúa sobre una viga paralela a su eje con su línea de acción a una cierta distancia de éste. Esta situación se ilustra en la figura 6-8. La diferencia en este caso radica en que también hay una fuerza horizontal desbalanceada aplicada en la viga.

### Tipos de apoyos

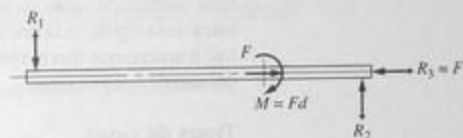
Todas las vigas han de tener un apoyo de una manera estable para que se mantengan en equilibrio. Todas las cargas y momentos externos deben ser resistidos por uno o más apoyos. Los diferentes tipos de apoyos ofrecen diferentes tipos de reacciones.

#### Apoyo simple o de rodillo

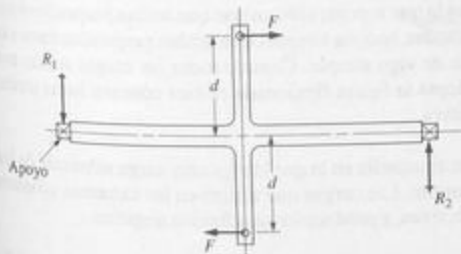
**Un apoyo simple es uno que puede resistir sólo fuerzas que actúan perpendiculares a una viga.**



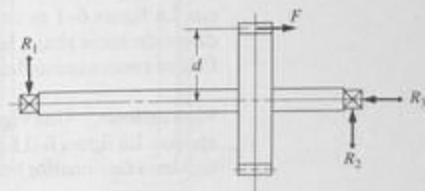
(a) Representación esquemática del componente horizontal de una viga compuesta sometida a un momento concentrado



(a) Representación esquemática del componente horizontal de una viga compuesta que muestra un momento concentrado y una reacción horizontal



(b) Viga compuesta



(b) Viga compuesta

FIGURA 6-7 Momento concentrado en una viga compuesta.

FIGURA 6-8 Momento concentrado en una viga compuesta.



FIGURA 6-9 Ejemplos de apoyos simples.

Una de las mejores ilustraciones de los apoyos simples es el par de rodillos teóricamente libres de fricción en los extremos de la viga según la figura 6-9(a). Generan apoyo dirigido hacia arriba contra la acción dirigida hacia abajo de la carga que actúa en la viga. Conforme la viga tiende a flexionarse por la influencia de la carga aplicada y de las reacciones, la flexión no la resistirían los rodillos. Pero si hubiera componentes horizontales de la carga, los rodillos rodarían y la viga estaría suelta. Por consiguiente, el uso de los dos rodillos solos no es conveniente.

**Apoyo de pasador.** Un ejemplo de un apoyo de pasador es una bisagra que puede resistir fuerzas en dos direcciones pero que permite rotación con respecto al eje de su pasador. La figura 6-9(b) muestra la misma viga de la figura 6-9(a) con el rodillo del extremo izquierdo que se reemplazó por un apoyo de pasador. Este sistema produce un apoyo adecuado al mismo tiempo que deja que la viga se flexione. Cualquier fuerza horizontal la resistiría la junta de pasador.

#### Apoyo fijo o empotrado

**Un apoyo fijo es el que se mantiene sujeto con firmeza de tal manera que resiste fuerzas en cualquier dirección y también impide la rotación de la viga en el apoyo.**

Una manera de crear un apoyo fijo es producir una cavidad de ajuste apretado en una estructura rígida en la que se inserta el extremo de una viga. El apoyo fijo resiste momentos lo mismo que fuerzas porque impide la rotación. La figura 6-10 muestra dos ejemplos del uso de apoyos fijos.

#### Tipos de vigas

El tipo de viga se determina por los tipos de apoyos y su colocación.

**Viga simple.** Una viga simple es la que soporta sólo cargas que actúan perpendiculares a su eje y que tiene sus extremos sobre apoyos simples que actúan perpendiculares a su eje. La figura 6-1 es un ejemplo de viga simple. Cuando todas las cargas actúan con dirección hacia abajo, la viga adopta la figura flexionada clásica cóncava hacia arriba. Ésta se conoce como flexión positiva.

**Viga saliente.** Una viga saliente es aquella en la que la viga con carga sobresale de los apoyos. La figura 6-11 da un ejemplo. Las cargas que actúan en los extremos salientes tienden a flexionarlos hacia abajo, o sea, a producirles una flexión negativa.

**Viga en voladizo.** Una viga en voladizo sólo tiene un extremo con apoyo, como se ve en la figura 6-12, que tiene una pluma de grúa firmemente unida a una columna vertical rígida. Es esencial que el apoyo esté fijo porque debe servir de apoyo vertical para las

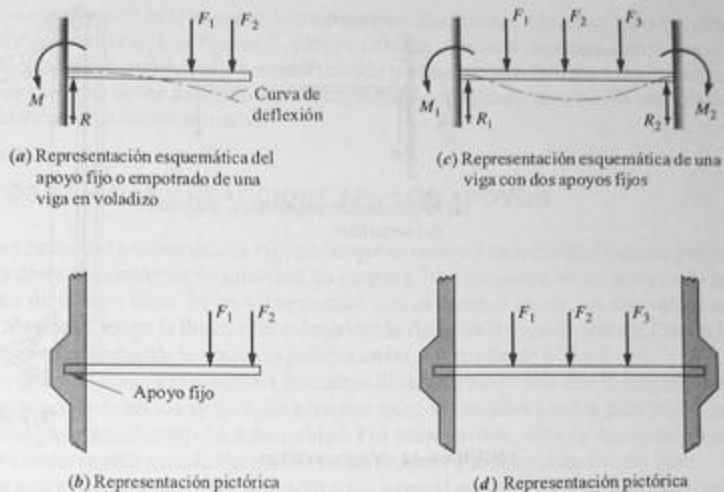


FIGURA 6-10 Vigas con apoyos fijos.

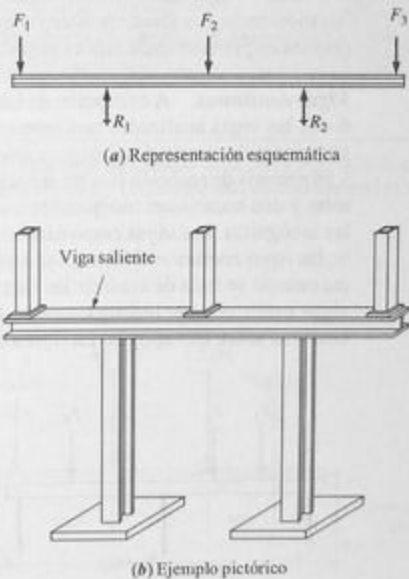
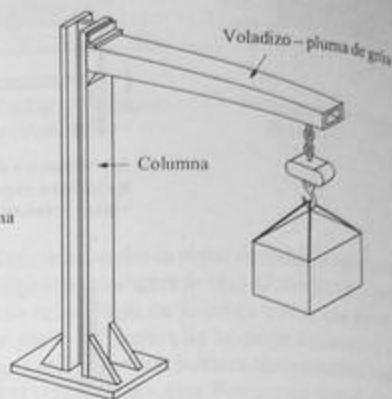
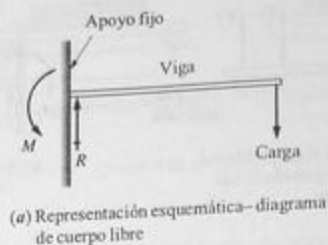


FIGURA 6-11 Viga saliente.



(b) Ejemplo pictórico

FIGURA 6-12 Viga en voladizo.

cargas que externamente se aplicaron junto con un momento de reacción opuesto al momento que se produjo por las cargas. Las figuras 6-5 y 6-10(a) son otros ejemplos de vigas en voladizo.

**Viga compuesta.** Si bien las vigas expuestas hasta ahora eran miembros rectos simples, se empleará el término *viga compuesta* para referirse a una integrada por dos o más piezas que se extienden en diferentes direcciones. Las figuras 6-7 y 6-8 son ejemplos. Las vigas de ese tipo, por lo general, se analizan por partes para determinar las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes internos que actúan a lo largo de ellas. A menudo, el lugar donde una pieza se une a otra es un punto crítico de interés.

**Vigas continuas.** A excepción de las vigas que exhiben las partes (c) y (d) de la figura 6-10, las vigas analizadas con anterioridad contaban con uno o dos apoyos y sólo dos reacciones desconocidas. Los principios de la estática permiten calcular todas las fuerzas y momentos de reacción con las ecuaciones de equilibrio clásicas porque hay dos incógnitas y dos ecuaciones independientes disponibles con las cuales se pueden determinar las incógnitas. Las vigas como éstas se llaman *estáticamente determinadas*. En contraste, las vigas continuas tienen apoyos adicionales, por lo que requieren enfoques diferentes cuando se trata de analizar las fuerzas y los momentos de reacción. Éstas se llaman *vigas estáticamente indeterminadas*. La figura 6-13 muestra un ejemplo de una viga continua sobre tres apoyos. La figura 6-14 muestra una viga con un extremo fijo y otro

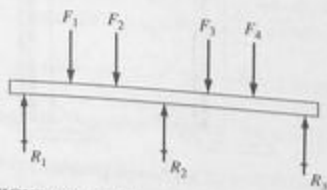


FIGURA 6-13 Viga continua sobre tres apoyos.

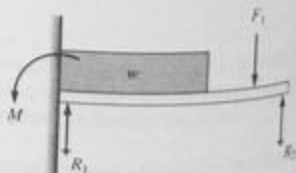


FIGURA 6-14 Voladizo con apoyo.

simplemente apoyado en el extremo. Nótese que hay dos fuerzas que no se conocen y un momento desconocido. Las figuras 6-10(c) y (d) muestran una viga con dos extremos fijos que también es estáticamente indeterminada porque hay dos fuerzas y dos momentos de reacción que deben determinarse. El capítulo 13 presenta las técnicas de análisis de vigas estáticamente indeterminadas.

### 6-3 APOYOS DE VIGAS Y REACCIONES EN LOS APOYOS

El primer paso en el análisis de una viga por lo que se refiere a su seguridad bajo un patrón de carga dado es mostrar en su totalidad las cargas y las reacciones en los apoyos en un diagrama de cuerpo libre. Es muy importante que se puedan trazar los diagramas de cuerpo libre con base en la ilustración o descripción física de la viga con carga. Esto es lo que se hizo en cada uno de los casos expuestos en las figuras desde 6-1 a 6-14.

Después de dibujar el diagrama de cuerpo libre, es preciso calcular la magnitud de todas las reacciones en los apoyos. Se presume que los métodos usados para hallar las reacciones ya se estudiaron con anterioridad. Por consiguiente, sólo se dan unos pocos ejemplos como repaso y como ilustración de las técnicas que se aplican en este libro.

Se recomienda el siguiente procedimiento general para determinar las reacciones en vigas simples o salientes.

Indicaciones para determinar las reacciones

1. Dibuje el diagrama de cuerpo libre.
2. Use la ecuación de equilibrio  $\Sigma M = 0$  sumando momentos con respecto al punto de aplicación de una de las reacciones de apoyo. La ecuación resultante entonces se puede resolver para la otra reacción.
3. Use  $\Sigma M = 0$  sumando los momentos con respecto al punto de aplicación de la segunda reacción para determinar la primera.
4. Use  $\Sigma F = 0$  para comprobar la exactitud de los cálculos.

**Ejemplo 6-1** La figura 6-15 muestra el diagrama de cuerpo libre de la viga que soporta tubos, y que en su forma original ilustra la figura 6-1. Calcule las reacciones en las varillas de apoyo.

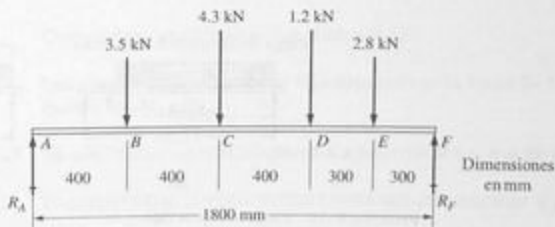


FIGURA 6-15 Cargas sobre una viga.

Solución Objetivo

Calcular las fuerzas de reacción en los extremos de la viga.

Datos

Ilustración de la viga mostrada en la figura 6-1. El diagrama de cuerpo libre que muestra la carga es la figura 6-15. Las cargas actúan en los puntos B, C, D y E. Las reacciones actúan en los puntos A y F, y se designan  $R_A$  y  $R_F$ .

Análisis

Se emplearán las indicaciones para determinar las reacciones. La figura 6-15 es el diagrama de cuerpo libre, así que se comenzará con el paso 2.

Resultados

Para determinar la reacción  $R_F$ , sume los momentos con respecto al punto A.

$$\sum M_A = 0 = 3.5(400) + 4.3(800) + 1.2(1200) + 2.8(1500) - R_F(1800)$$

Observe que todas las fuerzas están en kilonewtons y las distancias en milímetros. Ahora resuelva para  $R_F$ .

$$R_F = \frac{3.5(400) + 4.3(800) + 1.2(1200) + 2.8(1500)}{1800} = 5.82 \text{ kN}$$

Ahora para determinar  $R_A$ , sume los momentos con respecto al punto F.

$$\sum M_F = 0 = 2.8(300) + 1.2(600) + 4.3(1000) + 3.5(1400) - R_A(1800)$$

$$R_A = \frac{2.8(300) + 1.2(600) + 4.3(1000) + 3.5(1400)}{1800} = 5.98 \text{ kN}$$

Ahora aplique  $\Sigma F = 0$  en la dirección vertical como comprobación.

Fuerzas con dirección hacia abajo:  $(3.5 + 4.3 + 1.2 + 2.8) \text{ kN} = 11.8 \text{ kN}$

Reacciones con dirección hacia arriba:  $(5.82 + 5.98) \text{ kN} = 11.8 \text{ kN}$   
(comprobación)

Comentario

Muestre las fuerzas de las reacciones  $R_A$  y  $R_F$  en los puntos de la viga donde actúan.

Ejemplo 6-2

Calcule las reacciones en la viga que se ilustra en la figura 6-16(a).

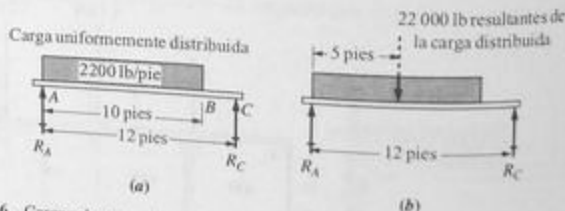


FIGURA 6-16 Carga sobre una viga.

Solución Objetivo

Calcular las fuerzas de reacción en los extremos de la viga.



**Datos** La viga que aparece en la figura 6-16(a). La carga distribuida de 2200 lb/pie se aplica a lo largo de 10 pies a partir del extremo izquierdo de la viga. Las reacciones actúan en los puntos A y C y se designan  $R_A$  y  $R_C$ .

**Análisis** Se emplearán las indicaciones para determinar las reacciones. La figura 6-16(b) es un diagrama de cuerpo libre equivalente con la resultante de la carga distribuida que muestra su actuación en el centroide de la carga.

**Resultados**  $\sum M_A = 0 = 22\,000 \text{ lb (5 pies)} - R_C(12 \text{ pies})$

$$R_C = \frac{22\,000 \text{ lb (5 pies)}}{12 \text{ pies}} = 9167 \text{ lb}$$

$$\sum M_C = 0 = 22\,000 \text{ lb (7 pies)} - R_A(12 \text{ pies})$$

$$R_A = \frac{22\,000 \text{ lb (7 pies)}}{12 \text{ pies}} = 12\,833 \text{ lb}$$

Por último, como comprobación, en la dirección vertical:

$$\sum F = 0$$

Fuerzas con dirección hacia abajo: 22 000 lb

Fuerzas con dirección hacia arriba:  $R_A + R_C = 12\,833 + 9167 = 22\,000 \text{ lb}$   
(comprobación)

**Comentario** Observe que la resultante se usa sólo para determinar las reacciones. Más adelante, cuando se determinen fuerzas cortantes y momentos flectionantes, se debe usar la misma carga distribuida.

**Ejemplo 6-3** Calcule las reacciones en la viga saliente de la figura 6-17.

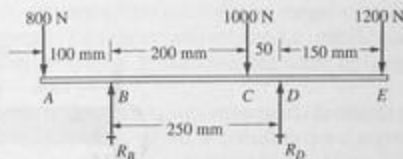


FIGURA 6-17 Cargas sobre una viga.

**Solución** **Objetivo** Calcular las reacciones en los puntos B y D.

**Datos** Las cargas que actúan en la viga expuesta en la figura 6-17. Las reacciones son  $R_A$  y  $R_C$ .

**Análisis** Se emplearán las indicaciones para determinar las reacciones.

**Resultados** En primer lugar, si se suman los momentos con respecto al punto B:

$$\sum M_B = 0 = 1000(200) - R_D(250) + 1200(400) - 800(100)$$

Observe que las fuerzas que tienden a producir momentos en el sentido de las manecillas del reloj con respecto a  $B$  se consideran positivos en este cálculo. Ahora, si resuelve para  $R_D$  se obtiene:

$$R_D = \frac{1000(200) + 1200(400) - 800(100)}{250} = 2400 \text{ N}$$

La suma de los momentos con respecto a  $D$  permite calcular  $R_B$ .

$$\sum M_D = 0 = 1000(50) - R_B(250) + 800(350) - 1200(150)$$

$$R_B = \frac{1000(50) + 800(350) - 1200(150)}{250} = 600 \text{ N}$$

Compruebe con  $\Sigma F = 0$  en la dirección vertical:

Fuerzas con dirección hacia abajo:  $(800 + 1000 + 1200) \text{ N} = 3000 \text{ N}$

Fuerzas con dirección hacia arriba:  $R_B + R_D = (600 + 2400) \text{ N} = 3000 \text{ N}$   
(comprobación)

**Ejemplo 6-4** Calcule las reacciones en la viga voladiza que se muestra en la figura 6-18.

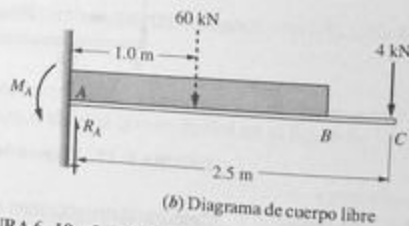
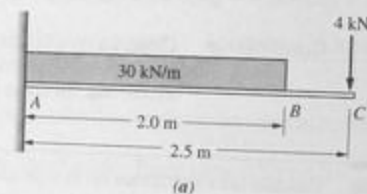


FIGURA 6-18 Carga sobre una viga.

- |                 |                 |   |
|-----------------|-----------------|---|
| <b>Solución</b> | <b>Objetivo</b> | Calcular las reacciones en el punto A del muro.                 |
|                 | <b>Datos</b>    | Las cargas que actúan en la viga mostrada en la figura 6-18(a). |
|                 | <b>Análisis</b> | Se usarán las indicaciones para determinar las reacciones.      |

En el caso de vigas voladizas, las reacciones en el muro se componen de una fuerza con dirección hacia arriba  $R_A$  la cual debe equilibrar todas las fuerzas con dirección hacia abajo que actúan en la viga y un momento de reacción  $M_A$  que debe oponerse a la tendencia que tienen las cargas aplicadas a girar la viga. En la figura 6-18(b) se muestran las reacciones. También se muestra la resultante, 60 kN, de la carga distribuida.

**Resultados** Por tanto, al sumar las fuerzas en la dirección vertical, se obtiene:

$$R_A = 60 \text{ kN} + 4 \text{ kN} = 64 \text{ kN}$$

Al sumar los momentos con respecto al punto A se obtiene:

$$M_A = 60 \text{ kN} (1.0 \text{ m}) + 4 \text{ kN} (2.5 \text{ m}) = 70 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

## 6-4 FUERZAS CORTANTES

Más adelante se verá que las dos clases de esfuerzos que se desarrollan en una viga son esfuerzos cortantes y esfuerzos flexionantes. Para calcularlos, se requiere conocer la magnitud de las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en todos los puntos de la viga. Por consiguiente, aunque posiblemente aún no se comprenda el uso final de estos factores, es necesario aprender cómo se determina la variación de las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en vigas con muchos tipos de cargas y combinaciones de apoyos.

Las fuerzas cortantes se definen como sigue:

*Las fuerzas cortantes son fuerzas internas que se generan en el material de una viga para equilibrar las fuerzas aplicadas externamente y para garantizar el equilibrio en todas sus partes.*

La presencia de fuerzas cortantes se puede visualizar considerando cualquier segmento de la viga como un cuerpo libre con todas las cargas externas aplicadas. La figura 6-19 muestra un ejemplo. La viga en conjunto está en equilibrio bajo la acción de las reacciones de 500 N en los apoyos. Y, cualquier segmento de la viga también debe estar en equilibrio.

Un segmento se forma al cortar la viga en un punto de interés y al considerar la parte de la viga a un lado del corte. Normalmente, se considera que el segmento de interés es el de la izquierda del corte, como se muestra en la figura 6-19(a) cuya longitud es de 0.5 m. Por tanto, para que el segmento esté en equilibrio, en general, debe haber una fuerza *interna* que actúa perpendicular al eje de la viga en el corte. En este caso, la fuerza interna debe ser de 500 N con dirección hacia abajo. Ésta es la fuerza cortante y se usará el símbolo  $V$  para denotarla. Es decir,  $V = 500 \text{ N}$ . Este proceso para determinar fuerzas cortantes se puede generalizar enunciando la regla siguiente:

La magnitud de la fuerza cortante en cualquier parte de una viga es igual a la suma algebraica de todas las fuerzas externas que actúan a la izquierda de la sección de interés.

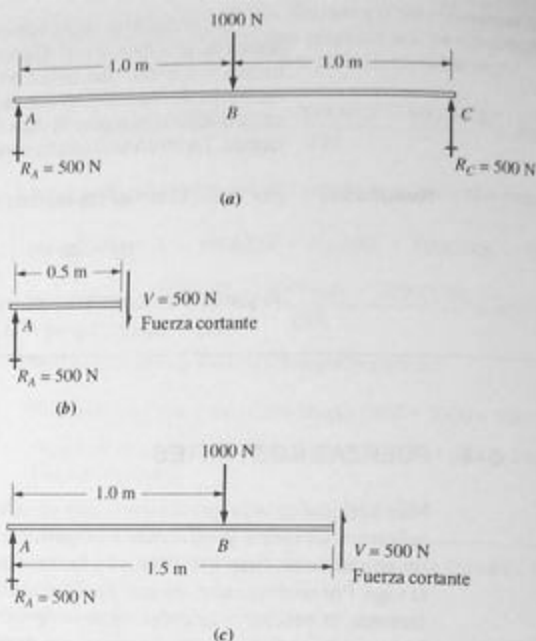


FIGURA 6-19 Uso de diagramas de cuerpo libre para determinar fuerzas cortantes en vigas.

Nótese que, aunque el diagrama de cuerpo libre, figura 6-19(b) está en equilibrio con respecto a fuerzas verticales, *aún no* está en equilibrio con respecto a rotación. La reacción  $R_A$  y la fuerza cortante  $V$  forman un par que tiende a girar el segmento en sentido de las manecillas del reloj. En la siguiente sección se demostrará que allí también debe haber un momento interno, llamado *momento flexionante*, para mantener el equilibrio.

Continuando con el análisis de las fuerzas cortantes, nótese que para cualquier segmento de la viga que ilustra la figura 6-19 desde la reacción izquierda en  $A$  hasta el punto de aplicación de la carga de 1000 N en  $B$ , el diagrama de cuerpo libre sería como el de la parte (b) de la figura. Por lo tanto, la fuerza cortante en cualquier punto de la viga entre  $A$  y  $B$  sería de 1000 N.

Ahora considérese un segmento de la viga de 1.5 m de largo, como se muestra en la figura 6-19(c). Para que este segmento esté en equilibrio, en la viga debe existir una fuerza cortante interna de 500 N con dirección hacia arriba. Esta situación sería la misma si la viga se cortara en cualquier punto entre  $B$  y  $C$ .

**Diagramas de fuerza cortante.** Conviene graficar los valores de la fuerza cortante contra su posición en la viga como se muestra en la figura 6-20. Tal gráfica se llama *diagrama de fuerza cortante* y lo que sigue es un análisis del método para crearlo. También se establecen las reglas generales para trazar el diagrama de cualquier viga que sólo se somete a cargas concentradas normales.

- El diagrama de fuerza cortante es una gráfica donde la vertical representa el valor de la fuerza cortante en cualquier sección de la viga. Este eje se debe

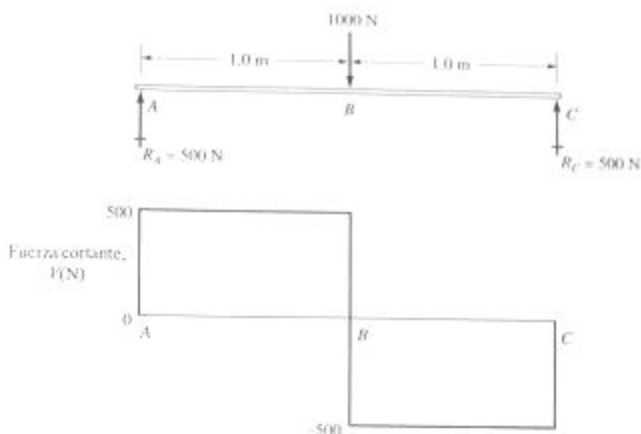


FIGURA 6-20 Diagrama de fuerza cortante.

rotular como se muestra en la figura 6-20, con el nombre de la cantidad que se va a graficar, la fuerza cortante, su símbolo  $V$  y las unidades, en este caso newtons (N). El eje horizontal da la posición en la viga y se acostumbra a dibujar paralelo al dibujo de la viga de modo que se pueda visualizar la correspondencia entre la carga real que actúa en la viga y las fuerzas cortantes.

- Si cualquier segmento de la viga se prolonga hacia la izquierda de la reacción en  $A$ , la fuerza cortante sería cero porque no habría ninguna fuerza externa. Lo mismo se puede afirmar con respecto a puntos a la derecha del punto  $C$  en el extremo derecho de la viga. Por consiguiente, una regla general es:

Los diagramas de fuerza cortante comienzan y terminan en cero en los extremos de la viga.

- Luego, en  $A$ , donde actúa la reacción izquierda, la fuerza cortante izquierda cambia de modo abrupto a 500 N con dirección hacia abajo para equilibrar la reacción con dirección hacia arriba. Se adoptará la siguiente convención de signos para fuerzas cortantes:

Las fuerzas cortantes internas que actúan con dirección hacia abajo se consideran positivas. Las que lo hacen hacia arriba se consideran negativas.

En seguida el diagrama de fuerza cortante se eleva de repente desde cero hasta 500 N en  $A$ . Esto se puede enunciar matemáticamente como:

$$V_A = 0 + 500 \text{ N} = 500 \text{ N}$$

Una regla general es:

Una carga concentrada o reacción dirigida hacia abajo provoca un incremento repentino igual al valor de la fuerza cortante.

- Tal como se muestra en la figura 6-19(b), la fuerza cortante permanece en el valor de 500 N en cualquier punto entre  $A$  y  $B$ . La razón de esto es que no hay cargas externas adicionales aplicadas. Esta observación se puede expresar en la forma:

$$V_{A-B} = 500 \text{ N}$$

El subíndice,  $A-B$ , indica que el valor es para todo el segmento de la viga desde  $A$  hasta  $B$ . La regla general es:

En cualquier segmento de una viga donde no hay cargas aplicadas, el valor de la fuerza cortante se mantiene constante, lo que da por resultado una línea horizontal recta en el diagrama de fuerza cortante.

- En el punto  $B$  donde actúa la carga de 1000 N, en la figura 6-19(c) se demostró que la fuerza cortante interna cambió de manera repentina de ser una fuerza de 500 N con dirección hacia abajo (positiva) a una fuerza de 500 N con dirección hacia arriba (negativa). El cambio total de la fuerza cortante es de 1000 N. Esto es:

$$V_B = 500 \text{ N} - 1000 \text{ N} = -500 \text{ N}$$

La regla general es:

Una carga concentrada en una viga provoca un cambio repentino de la fuerza cortante que actúa en la misma en una cantidad igual a la magnitud de la carga y en la dirección de ésta.

- Entre  $B$  y  $C$ , no hay cargas aplicadas, así que el diagrama de fuerza cortante es una línea recta horizontal en  $-500 \text{ N}$ . Es decir:

$$V_{B-C} = -500 \text{ N}$$

- En  $C$  la reacción con dirección hacia arriba de 500 N provoca un cambio repentino del valor de la fuerza cortante de la misma magnitud, lo que hace que la gráfica vuelva a cero. Es decir:

$$V_C = -500 \text{ N} + 500 \text{ N} = 0$$

Esto concuerda con la primera regla que se enunció con anterioridad.

De esta manera se termina el trazo del diagrama de fuerza cortante. Si bien la producción de diagramas de cuerpo libre de segmentos de la viga fue útil al desarrollar el concepto de fuerza cortante, en general, no es necesario hacerlo. Las reglas que se acaban de dar se pueden resumir como un conjunto de indicaciones generales para el trazo de diagramas de fuerza cortante.

Indicaciones para el trazo de diagramas de fuerza cortante de vigas sometidas a cargas concentradas normales

1. Trace los ejes vertical y horizontal del diagrama en relación con el diagrama de carga de la viga como se muestra en la figura 6-20.
2. Rotule el eje vertical como *fuerza cortante*,  $V$ , y déle las unidades de fuerza.
3. Prolongue las líneas de cada carga aplicada o reacción en la viga hacia abajo hasta el diagrama de fuerza cortante. Rotule los puntos de interés como referencia. Se rotularán con letras los puntos donde actúan cargas o reacciones, a partir del extremo izquierdo de la viga.
4. Construya la gráfica de fuerza cortante e inicie desde el extremo izquierdo de la viga prosiguiendo hacia la derecha, y aplique las reglas siguientes.
5. *Los diagramas de fuerza cortante comienzan y terminan en cero en los extremos de la viga.*
6. *Una carga concentrada o reacción con dirección hacia arriba provoca un incremento repentino igual al valor de la fuerza cortante.*
7. *En cualquier segmento de la viga donde no hay cargas aplicadas, el valor de la fuerza cortante permanece constante, lo que da por resultado una línea recta horizontal en el diagrama de fuerza cortante.*
8. *Una carga concentrada en una viga provoca un cambio repentino de la fuerza cortante que actúa en la misma en una cantidad igual a la magnitud de la carga y en la dirección de ésta.*
9. Muestre el valor de la fuerza cortante correspondiente a puntos estratégicos en el diagrama, por lo general, en los puntos donde actúan fuerzas o reacciones.

Al examinar el diagrama de fuerza cortante completo de la figura 6-20, se ve que el valor máximo de la fuerza cortante es 500 N. Nótese que aun cuando hay una carga con aplicación de 1000 N, la fuerza cortante máxima en la viga es de sólo 500 N.

A continuación se considerará otra viga sometida a cargas concentradas en un ejemplo. El procedimiento general empleado con anterioridad es válido para cualquier viga que se somete a cargas concentradas.

**Ejemplo 6-5** Trace el diagrama de fuerza cortante completo de la viga expuesta en la figura 6-21.

**Solución** **Objetivo** Trazar el diagrama de fuerza cortante completo.

**Datos** Las cargas en la viga, incluidos los valores de las reacciones, como se muestra en la figura 6-21. Se trata de una viga simplemente apoyada sometida a cargas concentradas normales. Ésta es la misma viga del ejemplo 6-1 para la que se determinaron las reacciones.

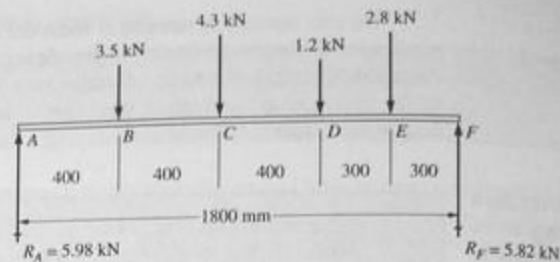


FIGURA 6-21 Cargas sobre una viga.

**Análisis**

Se utilizarán las indicaciones para trazar diagramas de fuerza cortante de vigas que se someten a cargas concentradas normales.

**Resultados**

En la figura 6-22 se muestra el diagrama terminado. El proceso que se utilizó para determinar cada una de las partes del diagrama se describe a continuación.

**Punto A:** La reacción  $R_A$  se determina de inmediato. Por lo tanto:

$$V_A = R_A = 5.98 \text{ kN}$$

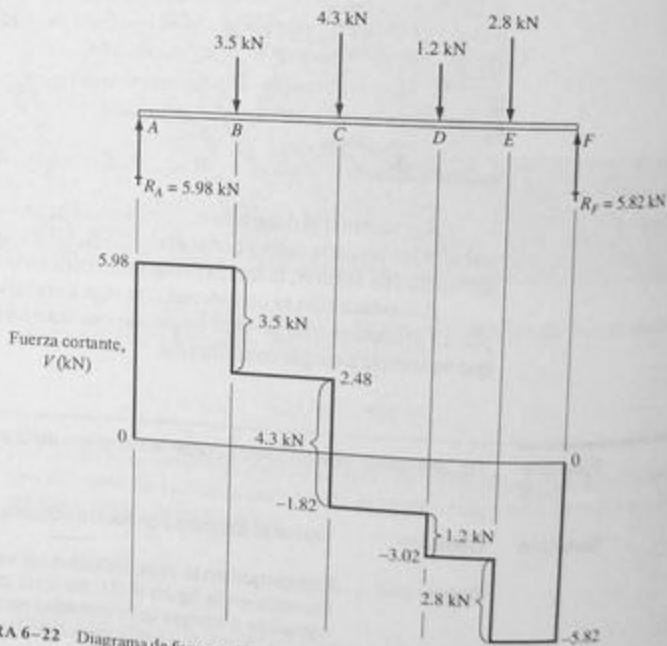


FIGURA 6-22 Diagrama de fuerza cortante.



**Entre A y B:** Como no hay cargas aplicadas, la fuerza cortante permanece constante. Es decir:

$$V_{A-B} = 5.98 \text{ kN}$$

**Punto B:** La carga aplicada de 3.5 kN provoca una disminución repentina en  $V$ .

$$V_B = 5.98 \text{ kN} - 3.5 \text{ kN} = 2.48 \text{ kN}$$

**Entre B y C:** La fuerza cortante permanece constante.

$$V_{B-C} = 2.48 \text{ kN}$$

**Punto C:** La carga aplicada de 4.3 kN provoca una disminución repentina en  $V$ .

$$V_C = 2.48 \text{ kN} - 4.3 \text{ kN} = -1.82 \text{ kN}$$

**Entre C y D:** La fuerza cortante permanece constante.

$$V_{C-D} = -1.82 \text{ kN}$$

**Punto D:** La carga aplicada de 1.2 kN provoca una disminución repentina en  $V$ .

$$V_D = -1.82 \text{ kN} - 1.2 \text{ kN} = -3.02 \text{ kN}$$

**Entre D y E:** La fuerza cortante permanece constante.

$$V_{D-E} = -3.02 \text{ kN}$$

**Punto E:** La carga aplicada de 2.8 kN provoca una disminución repentina en  $V$ .

$$V_E = -3.02 \text{ kN} - 2.8 \text{ kN} = -5.82 \text{ kN}$$

**Entre E y F:** La fuerza cortante permanece constante.

$$V_{E-F} = -5.82 \text{ kN}$$

**Punto F:** La fuerza de reacción de 5.82 kN provoca un aumento repentina en  $V$ .

$$V_F = -5.82 \text{ kN} + 5.82 \text{ kN} = 0$$

**Comentario** Observe que los valores de las fuerzas cortantes en puntos estratégicos se muestran justo en el diagrama en dichos puntos.

**Diagramas de fuerza cortante para cargas distribuidas.** La variación de la fuerza cortante con la posición en la viga que se somete a cargas distribuidas es diferente de la de vigas sometidas a cargas concentradas. El método del diagrama de cuerpo libre sirve para visualizar tales variaciones.

Considérese la viga que aparece en la figura 6-23, sometida a una carga distribuida uniformemente de 1500 N/m en una parte de su longitud. Se desea determinar la magnitud de la fuerza cortante en varios puntos de la viga para dibujar un diagrama de fuerza

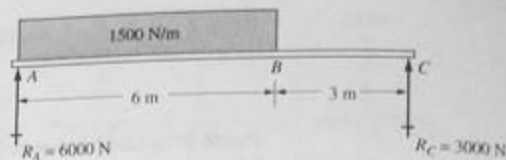


FIGURA 6-23 Carga sobre una viga.

cortante. Se seleccionan puntos a intervalos de 2 m de un lado a otro de la viga, incluyendo sus dos extremos. En el extremo izquierdo de la viga, justo a la derecha del punto A, la fuerza cortante en la viga debe ser de 6000 N para equilibrar la reacción  $R_A$ . Ahora bien, si se considera un segmento de 2 m de separación del resto de la viga, se obtendría el diagrama de cuerpo libre expuesto en la figura 6-24(a). Debe haber una fuerza cortante en la viga que equilibre las fuerzas externas para que el segmento permanezca en equilibrio. La reacción  $R_A$  de 6000 N actúa hacia arriba, mientras que la carga distribuida total de 3000 N lo hace hacia abajo. La fuerza cortante  $V$  debe ser de 3000 N, con dirección hacia abajo.

Al analizar un segmento de 4 m de largo de la misma manera se produciría el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 6-24(b). En este caso  $V = 0$ , puesto que las cargas externas están en equilibrio.

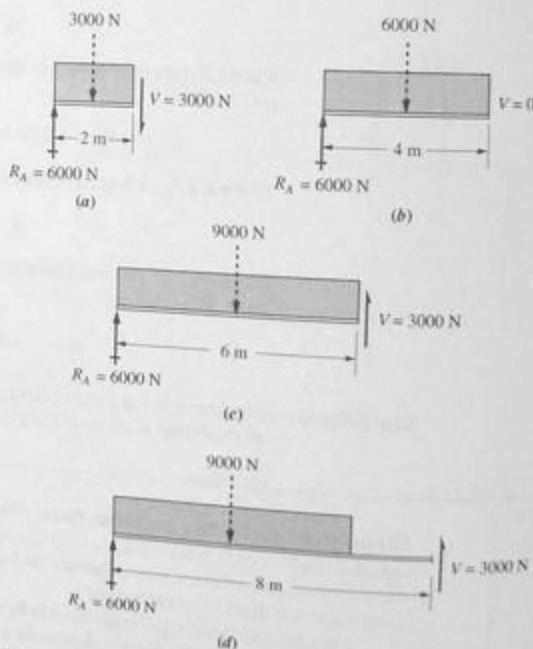


FIGURA 6-24 Diagramas de cuerpo libre utilizados para determinar fuerzas cortantes.

Para un segmento de 6 m de largo, la figura 6-24(c) sería el diagrama de cuerpo libre. Luego debe haber una fuerza cortante  $V$  de 3000 N con dirección hacia arriba. En el punto correspondiente a 8 m, la figura 6-24(d) muestra otra vez la fuerza  $V=3000$  N con dirección hacia arriba. Esta situación se mantiene en los últimos 3 m de la viga, puesto que no hay cargas externas aplicadas en este segmento.

En suma, las fuerzas cortantes que se calcularon fueron:

En el punto  $A$ :  $V=6000$  N con dirección hacia abajo

A 2 m:  $V=3000$  N con dirección hacia abajo

A 4 m:  $V=0$

A 6 m:  $V=3000$  N con dirección hacia arriba

Entre  $B$  y  $C$ :  $V=3000$  N con dirección hacia arriba

Por convención, las fuerzas cortantes con dirección hacia abajo se consideran positivas, y las que tienen dirección hacia arriba negativas. Si estos valores se marcan en una gráfica de fuerza cortante contra posición en la viga, se produciría el diagrama de fuerza cortante que ilustra la figura 6-25. Nótese que en la porción de la viga que soporta la carga uniformemente distribuida, la curva de la fuerza cortante es una línea recta. Ésta es una característica representativa de tales cargas. De este ejemplo se derivan las reglas generales siguientes. Para la parte de una viga que se somete a una carga uniformemente distribuida:

1. A lo largo del segmento de una viga que soporta una carga uniformemente distribuida, el diagrama de fuerza cortante es una línea recta.
2. El cambio de la fuerza cortante entre dos puntos cualesquiera es igual al área bajo el diagrama de carga entre dichos puntos.
3. La pendiente de la recta que representa la fuerza cortante es igual a la razón de la carga sobre la viga, es decir, carga por unidad de longitud.

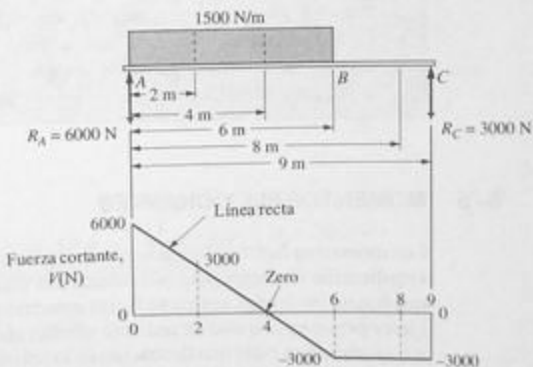


FIGURA 6-25 Diagrama de fuerza cortante.

En este ejemplo, la regla 2 queda ejemplificada por el hecho de que entre los puntos  $A$  y  $B$  la fuerza cortante disminuye 9000 N desde un valor positivo de 6000 N hasta un valor negativo de 3000 N. Ésta es el área bajo la curva de carga calculada como sigue:

$$(1500 \text{ N/m})(6 \text{ m}) = 9000 \text{ N}$$

La regla 3 establece que la fuerza cortante disminuye 1500 N por cada metro de longitud de la viga.

Los principios generales derivados tanto para cargas concentradas como para cargas distribuidas deben aplicarse en la solución de algunos problemas. Se deben aplicar los siguientes pasos:

#### Indicaciones para el trazo de diagramas de fuerza cortante

1. Determine las fuerzas de las reacciones en los apoyos.
2. Haga un bosquejo de la viga. Conviene trazarlo con aproximación a escala.
3. Trace líneas verticales hacia abajo de los puntos clave de la viga cargada hasta donde se dibujará el diagrama de fuerza cortante.
4. Dibuje el eje horizontal del diagrama de fuerza cortante con una longitud igual a la de la viga. Rotule el eje vertical con el símbolo y las unidades de las fuerzas cortantes que se van a graficar.
5. Si se parte del extremo izquierdo de la viga, grafique la variación de la fuerza cortante de extremo a extremo de la misma. Recuerde que:
  - a. La fuerza cortante cambia de manera repentina en los puntos donde actúa una carga concentrada. El cambio de la fuerza cortante es igual a la carga.
  - b. La curva de la fuerza cortante es una línea recta horizontal entre los puntos donde no hay cargas aplicadas.
  - c. La curva de la fuerza cortante es una línea recta que tiene inclinación entre los puntos donde se aplican uniformemente cargas distribuidas. La pendiente de la línea es igual a la razón de la carga.
  - d. El cambio de la fuerza cortante entre puntos es igual al área bajo la curva de la carga entre dichos puntos.
6. Muestre el valor de la fuerza cortante en los puntos donde ocurren cambios importantes, tales como cargas concentradas y al principio y al final de cargas distribuidas.

## 6-5 MOMENTOS FLEXIONANTES

Los momentos flexionantes, además de las fuerzas cortantes, se desarrollan en vigas por la aplicación de cargas perpendiculares a la viga. Estos momentos flexionantes son los que hacen que la viga asuma su figura característica curvada o "flexionada". Cuando se ejerce presión a la mitad de una vara esbelta, como por ejemplo una regla con apoyo en sus extremos, se tiene una ilustración de lo anterior.

La determinación de la magnitud de los momentos flexionantes en una viga es una aplicación del principio de equilibrio estático. En la sección anterior, se analizaron las

fuerzas en la dirección vertical con el objeto de determinar las fuerzas cortantes en la viga que han de desarrollarse para mantener todas las partes de la viga en equilibrio. Para ello, se consideraron todas las partes de la viga como diagramas de cuerpo libre para visualizar lo que sucede en el interior de la misma. Un procedimiento similar sirve para ilustrar los momentos flexionantes.

La figura 6-26 muestra una viga simplemente apoyada con una carga concentrada en el centro. Toda la viga está en equilibrio lo mismo que cualquier parte de ella. Examine los diagramas de cuerpo libre que se muestran en las partes (b), (c), (d) y (e) de la figura 6-26. Con la suma de momentos con respecto al punto donde se cortó la viga se obtiene la magnitud del momento flexionante interno necesario para mantener al segmento en equilibrio. En la figura 6-26(b) se muestra el primer segmento de 0.5 m. La suma de momentos con respecto al punto B da:

$$M_B = 500 \text{ N} (0.5 \text{ m}) = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

La fuerza cortante, que se dio con anterioridad en la figura 6-19, también se muestra.

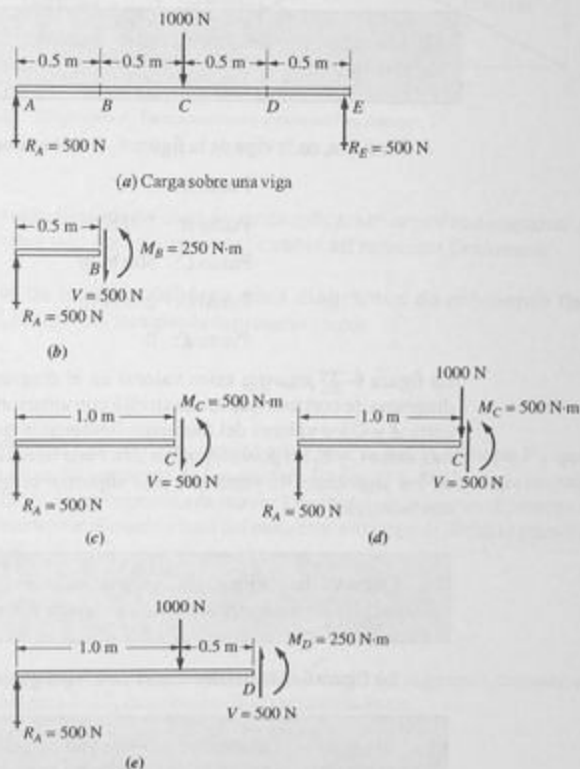


FIGURA 6-26 Diagramas de cuerpo libre utilizados para determinar momentos flexionantes.

En la figura 6-26(c), un segmento de 1.0 m de longitud, el cual incluye la mitad izquierda de la viga pero *no* la carga de 1000 N, se dibujó como cuerpo libre. La suma de momentos con respecto a *C* da:

$$M_C = 500 \text{ N} (1.0 \text{ m}) = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Si se hubiera tomado en cuenta la carga de 1000 N como se indica en la figura 6-26(d), el resultado sería el mismo, puesto que la carga actúa justo en el punto *C* y, por consiguiente, no hay momento con respecto a dicho punto.

La figura 6-26(e) muestra un segmento de 1.5 m de la viga aislado como cuerpo libre. Al sumar los momentos con respecto al punto *D* se obtiene:

$$M_D = 500 \text{ N} (1.5 \text{ m}) - 1000 \text{ N} (0.5 \text{ m}) = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Si se considera toda la viga como cuerpo libre y se suman los momentos con respecto al punto *E* en el extremo derecho de la viga, se obtiene:

$$M_E = 500 \text{ N} (2.0 \text{ m}) - 1000 \text{ N} (1.0 \text{ m}) = 0$$

Un resultado similar se obtendría para el punto *A* en el extremo izquierdo. De hecho, una regla general es:

Los momentos flexionantes en los extremos de una viga simplemente apoyada son cero.

En suma, en la viga de la figura 6-26, los momentos flexionantes son:

Punto *A*: 0

Punto *B*: 250 N·m

Punto *C*: 500 N·m

Punto *D*: 250 N·m

Punto *E*: 0

La figura 6-27 muestra estos valores en el diagrama de momento flexionante bajo el diagrama de cortante que se desarrolló con anterioridad para la misma viga. Nótese que entre *A* y *C* los valores del momento flexionante quedan sobre una línea recta. Asimismo, entre *C* y *E*, los puntos quedan sobre una línea recta. Ésta es una característica propia de los segmentos de vigas que sólo soportan cargas concentradas. Una regla general, entonces, es:

La curva del momento flexionante será una línea recta a lo largo de los segmentos donde la curva de fuerza cortante tiene un valor constante.

La figura 6-27 también ilustra otra regla general:

El cambio del momento entre dos puntos de una viga es igual al área bajo la curva de la fuerza cortante entre los mismos dos puntos.

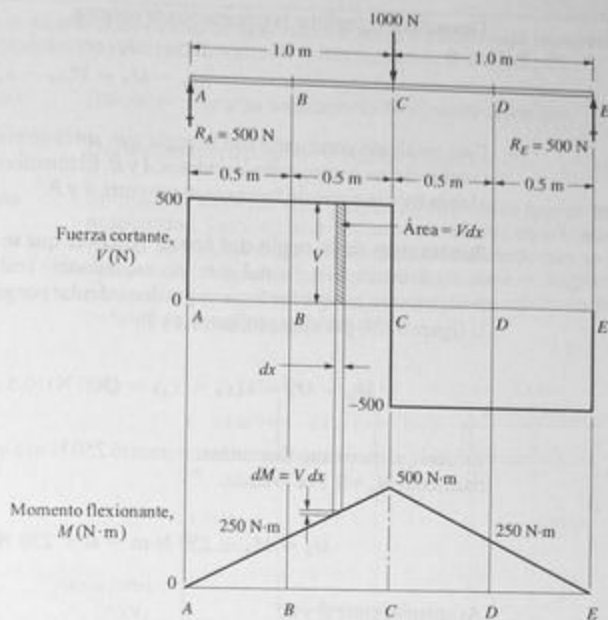


FIGURA 6-27 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

Esta regla, llamada *del área*, se puede aplicar a lo largo de un segmento de cualquier longitud en una viga para determinar el cambio del momento flexionante.

**Desarrollo de la regla del área para diagramas de momento flexionante.**  
En general, la regla del área puede expresarse como:

$$dM = V dx \quad (6-1)$$

en donde  $dM$  es el cambio del momento que causa la fuerza cortante  $V$  y que actúa a lo largo de un pequeño segmento de longitud  $dx$ . La figura 6-27 ilustra la ecuación (6-1).

A lo largo de un segmento de mayor longitud, puede usarse el proceso de integración para determinar el cambio total del momento a lo largo de dicho segmento. Entre dos puntos,  $A$  y  $B$ :

$$\int_{M_A}^{M_B} dM = \int_{x_A}^{x_B} V dx \quad (6-2)$$

Si la fuerza cortante  $V$  se mantiene constante a lo largo del segmento, como en el segmento  $A-B$  de la figura 6-27, la ecuación (6-2) se convierte en:

$$\int_{M_A}^{M_B} dM = V \int_{x_A}^{x_B} dx \quad (6-3)$$

Después de completar la integración se obtiene

$$M_B - M_A = V(x_B - x_A)$$

(6-4)

Este resultado concuerda con la regla que antes se enunció. Nótese que  $M_B - M_A$  es el cambio del momento entre los puntos  $A$  y  $B$ . El miembro derecho de la ecuación (6-4) es el área bajo la curva de fuerza cortante entre  $A$  y  $B$ .

**Ilustración de la regla del área.** Una vez que se comprende el principio en el que se fundamenta la regla del área, no es necesario realizar la integración para resolver problemas en los que las áreas se pueden calcular por geometría simple. Con los datos de la figura 6-27, por ejemplo, entre  $A$  y  $B$ :

$$M_B - M_A = V(x_B - x_A) = (500 \text{ N})(0.5 \text{ m} - 0) = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Es decir, el momento flexionante aumentó  $250 \text{ N}\cdot\text{m}$  a lo largo del claro  $A-B$ . Pero en  $A$  el momento  $M_A = 0$ . Por lo tanto:

$$M_B = M_A + 250 \text{ N}\cdot\text{m} = 0 + 250 \text{ N}\cdot\text{m} = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Asimismo, entre  $B$  y  $C$ :

$$M_C - M_B = V(x_C - x_B) = (500 \text{ N})(1.0 \text{ m} - 0.5 \text{ m}) = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Entonces:

$$M_C = M_B + 250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Pero  $M_B = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Por lo tanto:

$$M_C = 250 \text{ N}\cdot\text{m} + 250 \text{ N}\cdot\text{m} = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Entre  $C$  y  $D$ ,  $V = -500 \text{ N}$ . Por consiguiente:

$$M_D - M_C = V(x_D - x_C) = (-500 \text{ N})(1.5 \text{ m} - 1.0 \text{ m}) = -250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = M_C - 250 \text{ N}\cdot\text{m} = 500 \text{ N}\cdot\text{m} - 250 \text{ N}\cdot\text{m} = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Entre  $D$  y  $E$ :

$$M_E - M_D = V(x_E - x_D) = (-500 \text{ N})(2.0 \text{ m} - 1.5 \text{ m}) = -250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E = M_D - 250 \text{ N}\cdot\text{m} = 250 \text{ N}\cdot\text{m} - 250 \text{ N}\cdot\text{m} = 0$$

Estos resultados son idénticos a los que se determinaron con el método del diagrama de cuerpo libre. Se utilizará la regla del área para generar el diagrama de momento flexionante con el diagrama de fuerza cortante y que ya se conoce en los problemas restantes de esta sección y siempre que los cálculos del área se puedan hacer de forma simple.



**Ejemplo 6-6**

Dibuje el diagrama de momento flexionante completo para la viga expuesta en la figura 6-21. Muestre los valores del momento en los puntos *A, B, C, D, E* y *F*.

**Solución****Objetivo**

Dibujar el diagrama de momento flexionante completo.

**Datos**

Las cargas que actúan en la viga de la figura 6-21.

**Análisis**

Se usará la *regla del área* y las otras dos reglas que se definieron con anterioridad. Esto requiere que se trace la curva de la fuerza cortante, lo que ya se hizo en el ejemplo 6-5 con el resultado que se mostró en la figura 6-22. Ahora bien, la figura 6-28 incluye el diagrama de fuerza cortante y los resultados del diagrama de momento de flexión, cuyos detalles se describen a continuación.

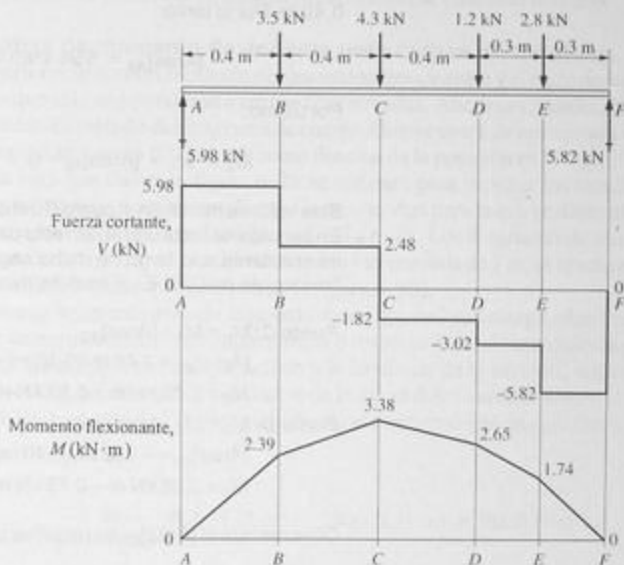


FIGURA 6-28 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

**Resultados**

El diagrama de momento flexionante se dibuja de modo directo debajo del diagrama de fuerza cortante de tal modo que la relación entre los puntos del diagrama de carga de la viga se puedan relacionar con ambos. Conviene prolongar las líneas verticales desde los puntos de interés en la viga (puntos *A* y *F* en este ejemplo) hacia abajo hasta el eje horizontal del diagrama de momento flexionante.

Es muy conveniente que se comience a dibujar el diagrama del momento flexionante en el extremo izquierdo de la viga y se prosiga hacia la derecha, al tomar en cuenta cada segmento por separado. En vigas como la de este ejemplo en la que todas las cargas son concentradas, se deben seleccionar los segmentos en los que la fuerza cortante sea constante. En este caso, los segmentos son *AB, BC, CD, DE* y *EF*.

**En el punto A:** Se usa la regla que establece que el momento flexionante es cero en los extremos de una viga simplemente apoyada. Es decir,  $M_A = 0$ .

**Punto B:** Para éste y cada uno de los puntos subsecuentes, se aplica la regla del área. El patrón general es:

$$M_B = M_A + [\text{Área}]_{AB}$$

en donde  $[\text{Área}]_{AB}$  = área bajo la curva de fuerza cortante entre A y B. Con los datos de la curva de fuerza cortante:

$$[\text{Área}]_{AB} = V_{AB} \times \text{ancho del segmento AB}$$

Pero,  $V_{AB} = 5.98$  kN a lo largo del segmento AB cuya longitud es de 0.40 m. Por lo tanto:

$$[\text{Área}]_{AB} = 5.98 \text{ kN}(0.40 \text{ m}) = 2.39 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Por último:

$$M_B = M_A + [\text{Área}]_{AB} = 0 + 2.39 \text{ kN}\cdot\text{m} = 2.39 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Este valor se marca en el punto B del diagrama de momento flexionante. En seguida se traza una línea recta de  $M_A$  a  $M_B$  porque la fuerza cortante es constante a lo largo de dicho segmento. Los valores del momento flexionante en C, D, E y F se determinan de la misma manera.

**Punto C:**  $M_C = M_B + [\text{Área}]_{BC}$

$$[\text{Área}]_{BC} = 2.48 \text{ kN}(0.40 \text{ m}) = 0.99 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_C = 2.39 \text{ kN}\cdot\text{m} + 0.99 \text{ kN}\cdot\text{m} = 3.38 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

**Punto D:**  $M_D = M_C + [\text{Área}]_{CD}$

$$[\text{Área}]_{CD} = -1.82 \text{ kN}(0.40 \text{ m}) = -0.73 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_D = 3.38 \text{ kN}\cdot\text{m} - 0.73 \text{ kN}\cdot\text{m} = 2.65 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Observe que el  $[\text{Área}]_{CD}$  es negativa porque está debajo del eje.

**Punto E:**  $M_E = M_D + [\text{Área}]_{DE}$

$$[\text{Área}]_{DE} = -3.02 \text{ kN}(0.30 \text{ m}) = -0.91 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_E = 2.65 \text{ kN}\cdot\text{m} - 0.91 \text{ kN}\cdot\text{m} = 1.74 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

**Punto F:**  $M_F = M_E + [\text{Área}]_{EF}$

$$[\text{Área}]_{EF} = -5.82 \text{ kN}(0.30 \text{ m}) = -1.74 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_F = 1.74 \text{ kN}\cdot\text{m} - 1.74 \text{ kN}\cdot\text{m} = 0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

**Resumen y comentarios** Los valores del momento flexionante se muestran en el diagrama en sus puntos respectivos de modo que los usuarios del diagrama puedan ver los valores relativos. El hecho de que  $M_F = 0$  comprueba los cálculos porque la regla para vigas simplemente apoyadas establece que el momento flexionante en F debe ser cero. El objetivo de dibujar el diagrama del momento flexionante con frecuencia es localizar el punto donde ocurre el momento flexionante máximo. En este caso  $M_C = 3.38$  kN·m es el valor máximo.

**Regla del momento flexionante máximo.** El ejemplo 6-6 ilustró una útil regla que se puede enunciar como sigue:

El momento flexionante máximo ocurrirá en un punto donde la curva de la fuerza cortante corta el eje horizontal.

La regla del área conduce a esta regla. Para ilustrarla, en el ejemplo 6-6, las áreas bajo la curva de la fuerza cortante en los primeros dos segmentos son positivas (encima del eje) y, por consiguiente, el momento flexionante se *incrementa* hasta el punto C. Pero las áreas a la derecha del punto C son negativas (debajo del eje) y el momento flexionante *disminuye*. Por consiguiente, el momento flexionante máximo ocurre en el punto C. En los casos en que la curva de la fuerza cortante corta el eje más de una vez, todos los puntos de intersección se tienen que investigar para determinar cuál es el máximo.

**Diagramas de momento flexionante para cargas distribuidas.** Los ejemplos anteriores ilustraron el cálculo de momentos flexionantes y el trazo de sus diagramas de vigas que sólo se sometieron a cargas concentradas. Ahora se considerarán las cargas distribuidas. El método del diagrama de cuerpo libre se usará de nuevo para visualizar la variación del momento flexionante como función de la posición en la viga.

La viga que ilustra la figura 6-29 se utilizará para mostrar los resultados representativos de cargas distribuidas. Ésta es la misma viga para la que se determinó la fuerza cortante, como se muestra en las figuras 6-23 a 6-25. Los diagramas de cuerpo libre de segmentos de la viga que se consideraron como incrementos de 2 m, se usarán para calcular los momentos flexionantes (recúrrase a la figura 6-30).

Para un segmento del lado izquierdo de la viga, de 2 m de largo, el momento flexionante se determina al sumar los momentos con respecto al extremo izquierdo provocados por todas las cargas externas que actúan a la izquierda de la sección, según muestra la figura 6-23(a). Nótese que la resultante de la carga distribuida se muestra actuando a la mitad del segmento de 2 m. Por tanto, como el segmento está en equilibrio:

$$M_2 = 6000 \text{ N} (2 \text{ m}) - 3000 \text{ N} (1 \text{ m}) = 9000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

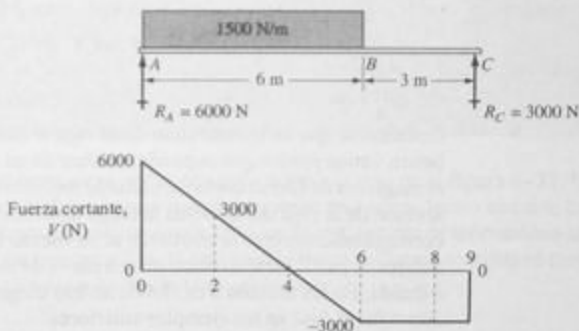


FIGURA 6-29 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

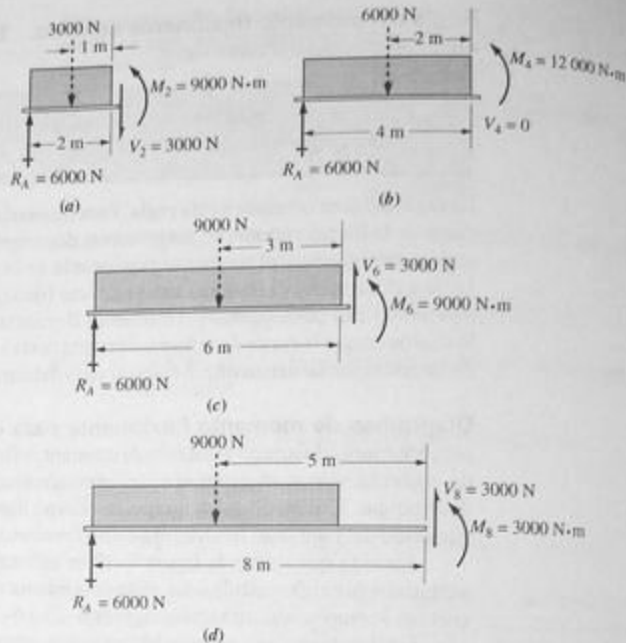


FIGURA 6-30 Diagramas de cuerpo libre utilizados para determinar momentos flexionantes.

El símbolo  $M_2$  indica el momento flexionante que actúa en el punto a 2 m del extremo izquierdo de la viga.

Con un método similar en los puntos a 4 m, 6 m y 8 m del extremo izquierdo de la viga, como se muestra en la figura 6-30(b), (c) y (d), se obtendría:

$$M_4 = 6000\text{ N} (4\text{ m}) - 6000\text{ N} (2\text{ m}) = 12\,000\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_6 = 6000\text{ N} (6\text{ m}) - 9000\text{ N} (3\text{ m}) = 9000\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_8 = 6000\text{ N} (8\text{ m}) - 9000\text{ N} (5\text{ m}) = 3000\text{ N}\cdot\text{m}$$

Recuérdese que en los extremos de la viga el momento flexionante es cero. Ahora ya se tienen varios puntos que se pueden marcar en un diagrama de momento flexionante bajo el diagrama de fuerza cortante, como se muestra en la figura 6-31. Primero examínese la sección de la viga donde actúa la carga distribuida, los primeros 6 m. Al unir los puntos correspondientes que se marcaron al momento flexionante con una curva uniforme, se obtiene el perfil característico de una curva de momento flexionante para una carga distribuida. En los últimos 3 m, donde no hay cargas aplicadas, la curva es una línea recta como fue el caso en los ejemplos anteriores.

Con base en la figura 6-31 se pueden hacer observaciones importantes, las cuales se pueden generalizar como reglas para el trazo de diagramas de momento flexionante.

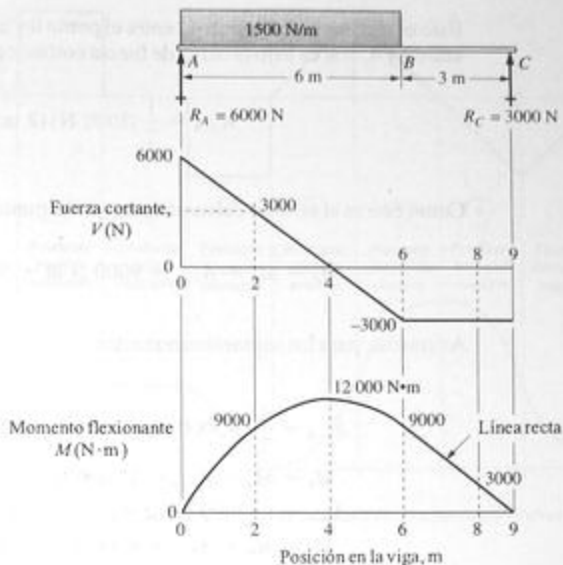


FIGURA 6-31 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento de flexión completos.

Reglas para dibujar diagramas de momento flexionante

1. En los extremos de una viga simplemente apoyada, el momento flexionante es cero.
2. El *cambio del momento flexionante* entre dos puntos de una viga es igual al área bajo la curva de fuerza cortante entre dichos puntos. Así pues, cuando el área bajo la curva de fuerza cortante es positiva (encima del eje), el momento flexionante se incrementa y viceversa.
3. El máximo momento flexionante ocurre en un punto donde la curva de la fuerza cortante corta su eje cero.
4. En una sección de la viga donde actúan cargas distribuidas, el diagrama de momento flexionante será curvo.
5. En una sección de la viga donde no hay cargas aplicadas, el diagrama del momento flexionante será una línea recta.
6. La *pendiente* de la curva de momento flexionante en un punto cualquiera es igual a la magnitud de la fuerza cortante en dicho punto.

Considérense estas reglas con aplicación a la viga de la figura 6-31. Es obvio que la *regla 1* se satisface, puesto que el momento en cada extremo es cero. La *regla 2* se puede usar para verificar los puntos trazados en el diagrama de momentos a los intervalos de 2 m. Para los primeros 2 m, el área bajo la curva de fuerza cortante se compone de un rectángulo y un triángulo. Por lo tanto, el área es:

$$A_{0-2} = 3000 \text{ N} (2 \text{ m}) + \frac{1}{2} (3000 \text{ N}) (2 \text{ m}) = 9000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Éste es el cambio del momento entre el punto 0 y el punto 2 en la viga. Para el segmento entre 2 y 4, el área bajo la curva de fuerza cortante es un triángulo. Luego:

$$A_{2-4} = \frac{1}{2} (3000 \text{ N}) (2 \text{ m}) = 3000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Como éste es el cambio del momento entre el punto 2 y el punto 4:

$$M_4 = M_2 + A_{2-4} = 9000 \text{ N}\cdot\text{m} + 3000 \text{ N}\cdot\text{m} = 12000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Asimismo, para los segmentos restantes:

$$A_{4-6} = \frac{1}{2} (-3000 \text{ N}) (2 \text{ m}) = -3000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_6 = M_4 + A_{4-6} = 12000 \text{ N}\cdot\text{m} - 3000 \text{ N}\cdot\text{m} = 9000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$A_{6-8} = (-3000 \text{ N}) (2 \text{ m}) = -6000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_8 = M_6 + A_{6-8} = 9000 \text{ N}\cdot\text{m} - 6000 \text{ N}\cdot\text{m} = 3000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$A_{8-9} = (-3000 \text{ N}) (1 \text{ m}) = -3000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_9 = M_8 + A_{8-9} = 3000 \text{ N}\cdot\text{m} - 3000 \text{ N}\cdot\text{m} = 0$$

En este caso el hecho de que  $M_9 = 0$  comprueba el proceso por el que la regla 1 se debe satisfacer.

La regla 3 se ilustra en el punto 4. En el punto donde ocurre el máximo momento flexionante, la curva de la fuerza cortante corta el eje cero.

Para dominar la regla 6 se requiere algo de práctica, la cual es en extremo útil cuando se trata de bosquejar diagramas de momento. Por lo general, el bosquejar es suficiente. El uso de las seis reglas que se enunciaron permite bosquejar con rapidez el perfil del diagrama y calcular los valores clave.

Al aplicar la regla 6, recuérdense los conceptos básicos con respecto a la pendiente de una curva o línea, como se ilustra en la figura 6-32. Se muestran siete segmentos diferentes, con curvas del diagrama de fuerza cortante y del diagrama de momento, en las que se incluye las más usuales en el trazo de tales diagramas. Por consiguiente, al dibujar una parte de un diagrama, en el que la curva de la fuerza cortante tiene una forma particular, la forma correspondiente de la curva de momento debe ser como se ilustra en la figura 6-33. Al aplicar este método al diagrama de momento de la figura 6-31, nótese que la curva del punto 0 al punto 4 es como la de tipo 5 de la figura 6-32. Entre los puntos 4 y 6, la curva es como la 6. Entre los puntos 6 y 9, se usa la línea recta de pendiente negativa, curva 3.

## 6-6 FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES EN VIGAS EN VOLADIZO

El tipo de apoyo de una viga en voladizo hace que el análisis de sus fuerzas cortantes y momentos flexionantes sea algo diferente del de vigas simplemente apoyadas. La diferencia más notable es que el apoyo de la viga es fijo y, por tanto, puede resistir momentos. Por eso, en el extremo fijo de la viga, el momento flexionante no es cero, como en el caso

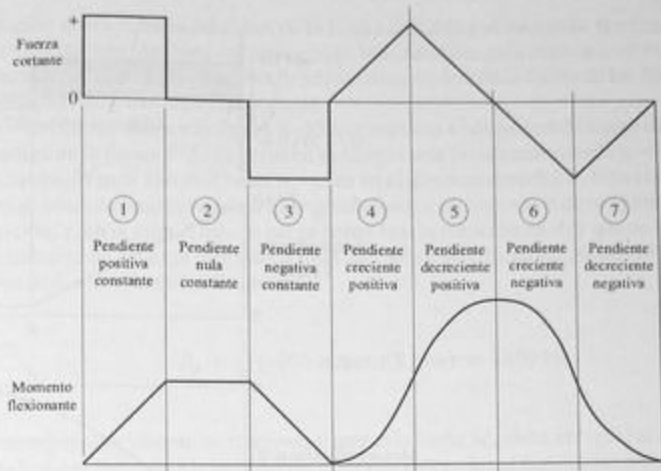


FIGURA 6-32 Formas generales de las curvas de momento en relación con las curvas de fuerza cortante correspondientes.

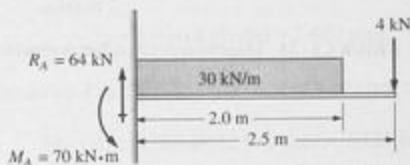


FIGURA 6-33 Carga y reacciones en una viga.

de vigas simplemente apoyadas. De hecho, el momento flexionante en el extremo fijo de la viga por lo general es el *máximo*.

Considérese la viga en voladizo que muestra la figura 6-33. En el ejemplo 6-4, se demostró que las reacciones en el apoyo  $A$  son una fuerza vertical  $R_A = 64 \text{ kN}$  y un momento  $M_A = 70 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Estos valores son los valores de la fuerza cortante y el momento flexionante en el extremo izquierdo de la viga. De acuerdo con la convención de signos adoptada, la fuerza de reacción  $R_A$  es positiva y el momento  $M_A$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj es negativo y dan los valores iniciales de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que muestra la figura 6-34. Las reglas que con anterioridad se desarrollaron para el trazo de diagramas de fuerza cortante y momento flexionante se pueden usar entonces para completar los diagramas.

La fuerza cortante disminuye en forma de línea recta de  $64 \text{ kN}$  a  $4 \text{ kN}$  en el intervalo entre  $A$  y  $B$ . Nótese que el cambio de la fuerza cortante es igual a la magnitud de la carga distribuida,  $60 \text{ kN}$ . La fuerza cortante permanece constante entre  $B$  y  $C$ , donde no hay cargas aplicadas. La carga de  $4 \text{ kN}$  en  $C$  hace que la curva regrese a cero.

El diagrama de momento flexionante comienza en  $-70 \text{ kN}\cdot\text{m}$  debido al momento de reacción  $M_A$ . Entre los puntos  $A$  y  $B$ , la curva tiene una pendiente positiva decreciente

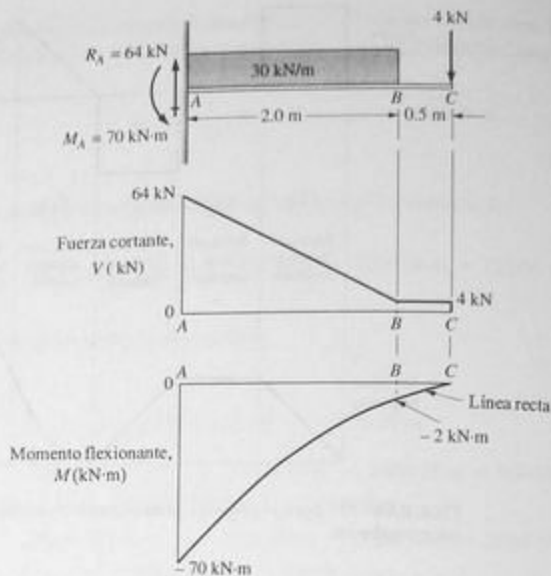


FIGURA 6-34 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante completos.

(curva 5 en la figura 6-32). El cambio del momento entre  $A$  y  $B$  es igual al área bajo la curva de la fuerza cortante entre  $A$  y  $B$ . El área es:

$$A_{A-B} = 4 \text{ kN} (2 \text{ m}) + \frac{1}{2} (60 \text{ kN}) (2 \text{ m}) = 68 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Por tanto, el momento en  $B$  es:

$$M_B = M_A + A_{A-B} = -70 \text{ kN}\cdot\text{m} + 68 \text{ kN}\cdot\text{m} = -2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Por último, entre  $B$  y  $C$ :

$$M_C = M_B + A_{B-C} = -2 \text{ kN}\cdot\text{m} + 4 \text{ kN} (0.5 \text{ m}) = 0$$

Como el punto  $C$  es el extremo libre de la viga, el momento debe ser cero.

## 6-7 VIGAS CON CARGAS DISTRIBUIDAS LINEALMENTE VARIABLES

Las figuras 6-5 y 6-6 de la sección 6-2 ilustran dos ejemplos de vigas que se someten a cargas distribuidas linealmente variables. A continuación se demostrará el método para dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de tales vigas y la deter-



minación de los valores máximos de la fuerza cortante y el momento flexionante. En la práctica éstos son los objetivos principales. Más adelante, en la sección 6-9, se plantea un método matemático que da una definición más completa de la forma de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

Recúrrase ahora a la figura 6-35 que muestra el diagrama de carga de la viga en voladizo de la figura 6-5. El régimen de carga varía linealmente desde  $w = -200$  lb/pie (hacia abajo) en el apoyo  $A$  hasta  $w =$  cero en el extremo derecho  $B$ . Esta curva de línea recta se conoce como *curva de primer grado* porque la carga varía de modo directo con la posición,  $x$ , en la viga. Con una carga como ésta, la reacción en  $A$ , y que se llama  $R_A$ , es la resultante de la carga distribuida total, la cual se determina al calcular el área bajo la curva de forma triangular. Es decir:

$$R_A = \frac{1}{2} (-200 \text{ lb/pies})(8 \text{ pies}) = -800 \text{ lb}$$

El momento flexionante en el apoyo, al que se le llama  $M_A$ , debe ser igual al momento de toda la carga aplicada a la derecha de  $A$ . Este se determina al considerar que la resultante actúa en el centroide de la carga distribuida. En la curva de carga de forma triangular, el centroide está a  $1/3$  de la longitud de la viga a partir del punto  $A$ . Si esta distancia se designa como  $x$ , entonces:

$$x = L/3 = (8 \text{ pies})/3 = 2.667 \text{ pies}$$

Por tanto, el momento en  $A$  es el producto de la resultante por  $x$ . Es decir,

$$M_A = R_A x = (800 \text{ lb})(2.667 \text{ pies}) = 2133 \text{ lb-pie}$$

Los valores  $R_A = 800$  lb y  $M_A = 2133$  lb-pie son los valores máximos de la fuerza cortante y el momento flexionante, respectivamente. En la mayoría de los casos, éste es el objetivo del análisis. De ser así, el análisis se puede dar por terminado.

Pero, si se desean los diagramas de fuerza cortante y el momento flexionante, se pueden trazar con base en los principios que se plantearon con anterioridad en este capítulo. La figura 6-36 muestra los resultados. El diagrama de fuerza cortante parte de  $A$  con el valor de 800 lb, igual a la reacción  $R_A$ . El valor de la fuerza cortante disminuye entonces en puntos a la derecha de  $A$  conforme se aplican cargas adicionales. Nótese que la curva

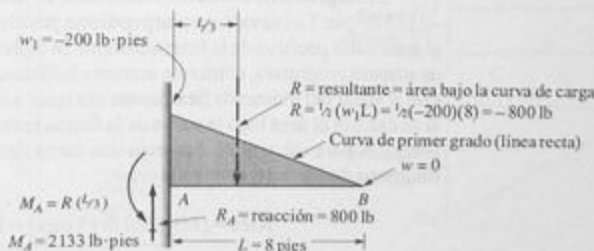


FIGURA 6-35 Diagrama de carga, reacción y momento de una viga en voladizo sometida a una carga distribuida linealmente variable.

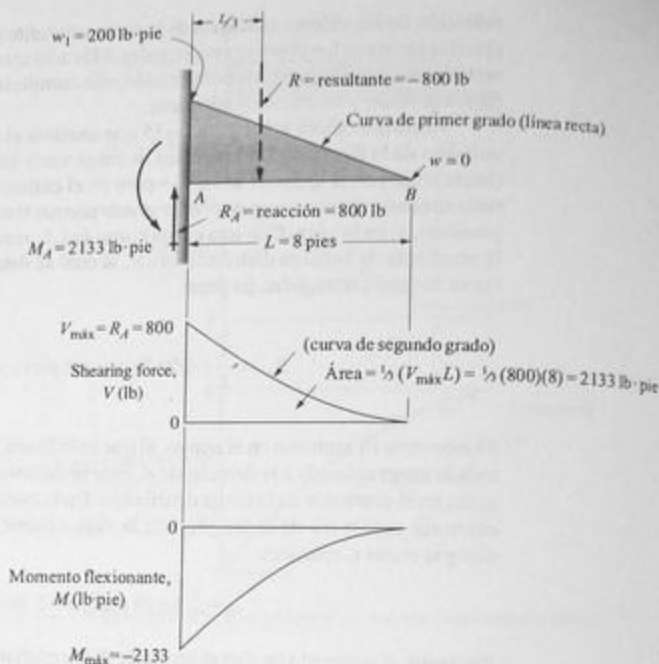


FIGURA 6-36 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante correspondientes a la carga aplicada a la viga de la figura 6-35.

de la fuerza cortante no es una línea recta porque el régimen de carga disminuye de  $A$  hacia  $B$ . En  $B$  el régimen de carga es cero, por lo que el valor de la fuerza cortante en  $B$  es cero. La pendiente de la curva de fuerza cortante en cualquier punto es igual al régimen de carga en el punto correspondiente del diagrama de carga. Así pues, la curva de la fuerza cortante comienza en  $A$  con una pendiente negativa relativamente grande, la cual disminuye de manera progresiva a medida que la curva se aproxima a  $B$ . Esta curva por lo general se llama *curva de segundo grado* porque su valor varía con el cuadrado de la distancia  $x$ .

El diagrama de momento flexionante se traza al observar en primer lugar que  $M_A = -2133 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ . La curva tiene una pendiente positiva digamos un tanto grande en  $A$  debido al gran valor positivo de la fuerza cortante en dicho punto. Luego, la pendiente disminuye de manera progresiva, conforme aumenta la distancia hasta cero en el punto  $B$ . El hecho de que el valor del momento flexionante sea igual a cero en  $B$  se puede demostrar, también, si se calcula el área bajo la curva de la fuerza cortante de  $A$  a  $B$ . El apéndice A-1 incluye fórmulas para calcular el área bajo una curva de segundo grado del tipo expuesto en el diagrama de fuerza cortante. Es decir:

$$\text{Área} = (1/3)(800 \text{ lb})(8 \text{ pies}) = 2133 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Éste es el *cambio* del momento flexionante de  $A$  a  $B$ , que hace que la curva del momento flexionante sea cero en  $B$ .

Los ejemplos que hasta ahora se consideraron fueron de vigas generalmente rectas con todas las cargas transversales, es decir, cargas que actúan perpendiculares al eje principal de la viga. Muchos elementos de máquinas y estructuras son más complejos, con componentes alejados de la parte principal en forma de viga.

Por ejemplo, considérese el poste simple con un brazo extendido como el que se muestra en la figura 6-37 que consta de un componente vertical y uno horizontal. El poste vertical tiene su base firmemente sujeta. En el extremo del brazo horizontal extendido, se aplica una carga con dirección hacia abajo. Un ejemplo de semejante carga es un sistema de sustentación de una señal de carretera. Otro sería el poste de sustentación de una canasta de baloncesto en el que la fuerza con dirección hacia abajo podría ser un jugador colgado del aro después de una clavada. Una aplicación en el diseño mecánico es una ménsula que soporta piezas de máquina durante el procesamiento.

En esas condiciones, conviene analizar el elemento de una estructura o máquina al considerarse cada elemento aparte y al trazar un diagrama de cuerpo libre de cada uno. En las juntas entre piezas, una pieza ejerce fuerzas y momentos en la otra. Con este método, se puede diseñar cada pieza con base en su patrón de carga, si se utilizan los principios básicos del análisis de vigas de este capítulo y de los restantes.

**Poste con un brazo extendido.** El objetivo del análisis es dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos de los componentes horizontal y vertical de la estructura poste/brazo expuesta en la figura 6-37. El primer paso consiste en "desprender" el brazo del poste en el codo a  $90^\circ$ .

La figura 6-38 muestra el brazo horizontal como diagrama de cuerpo libre con la carga  $F$ , aplicada en su extremo derecho. El resultado es similar al de la viga en voladizo

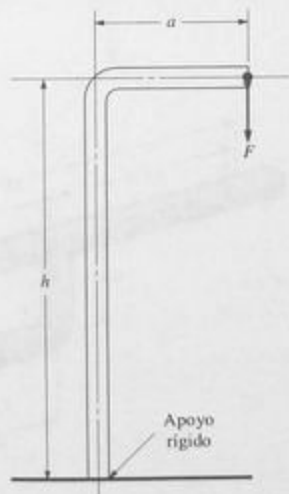


FIGURA 6-37 Poste con un brazo extendido.

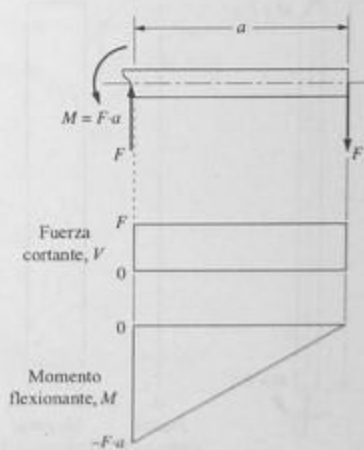


FIGURA 6-38 Diagramas de cuerpo libre, fuerza cortante y momento flexionante del brazo horizontal.

que con anterioridad se explicó en este capítulo. Se sabe que el brazo está en equilibrio como parte de la estructura completa y, por consiguiente, debe estarlo cuando se considera solo. Por lo tanto, en el extremo izquierdo, donde se une al poste vertical, debe haber una fuerza igual a  $F$  que actúa de modo vertical con dirección hacia arriba para mantener la suma de las fuerzas verticales igual a cero. Pero las dos fuerzas verticales forman un par que tiende a girar el brazo en el sentido de las manecillas del reloj. Para mantener el equilibrio rotacional, en el extremo izquierdo del brazo debe haber un momento que actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj de magnitud  $M = F \cdot a$ , donde  $a$  es la longitud del brazo. Con el diagrama de cuerpo libre completo, se trazan los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante como se indica en la figura 6-38. La fuerza cortante es igual a  $F$  a todo lo largo del brazo. El momento máximo flexionante ocurre en el extremo izquierdo del brazo donde  $M = F \cdot a$ .

En la figura 6-39 se muestra el diagrama de cuerpo libre del poste vertical. En el extremo superior del poste se muestran una fuerza con dirección hacia abajo y un momento que actúa en sentido de las manecillas del reloj, ejercidos en el poste vertical por el brazo horizontal. Nótese el par de acción-reacción que existe en las juntas entre las piezas. En las dos piezas actúan cargas iguales pero opuestas. Para completar el diagrama de cuerpo libre del poste se requiere una fuerza con dirección hacia arriba y un momento en sentido contrario al de las manecillas del reloj en su extremo inferior, provocados por el mecanismo de fijación de la base. Por último, la figura 6-39 muestra los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del poste, dibujados en posición vertical para relacionar los valores con las posiciones en él. No hay fuerza cortante porque no hay fuerzas transversales que actúen en el poste. Donde no existe fuerza cortante, el momento flexionante no cambia y éste se mantiene constante a lo largo del poste.

**Viga con un brazo en forma de L.** La figura 6-40 muestra un brazo en forma de L que se extiende bajo la viga principal que soporta una fuerza inclinada. La viga principal

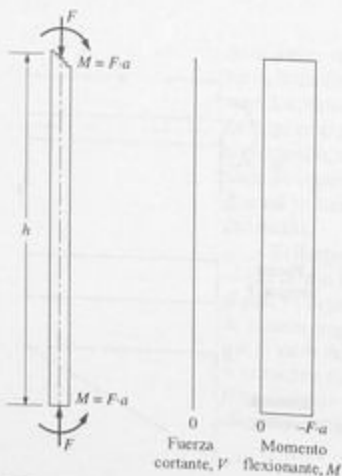


FIGURA 6-39 Diagramas de cuerpo libre, fuerza cortante y momento flexionante del poste vertical.

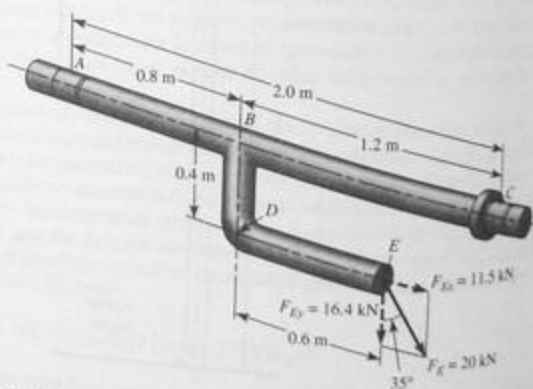


FIGURA 6-40 Viga con un brazo en forma de L.

tan sólo se apoya en  $A$  y  $C$ . El apoyo  $C$  tiene un diseño para que reaccione a cualquier fuerza horizontal en desequilibrio. El objetivo es dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos de la viga principal y los diagramas de cuerpo libre de todas las partes del brazo.

En este caso conviene usar tres diagramas de cuerpo libre: uno para la parte horizontal del brazo, uno para la parte vertical del brazo y uno para la viga principal. Pero primero conviene descomponer la fuerza aplicada en sus componentes vertical y horizontal, como se indica por medio de los vectores de puntos en el extremo del brazo.

La figura 6-41 muestra los tres diagramas de cuerpo libre. Si se comienza con la parte  $DE$  expuesta en (a), las fuerzas aplicadas en  $E$  deben estar equilibradas por las fuerzas que actúan en  $D$  en dirección opuesta para que haya equilibrio en las direcciones vertical y horizontal. Pero el equilibrio rotacional debe originarse por un momento interno en  $D$ . Al sumar los momentos con respecto al punto  $D$  se demuestra que:

$$M_D = F_{Ey}d = (16.4 \text{ kN})(0.6 \text{ m}) = 9.84 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

En la figura 6-41(b) las fuerzas y los momentos que actúan en  $D$  tienen los mismos valores pero direcciones opuestas a los que actúan en  $D$  en la parte (a) de la figura. Las condiciones de equilibrio vertical y horizontal muestran las fuerzas que actúan en  $B$  igual-

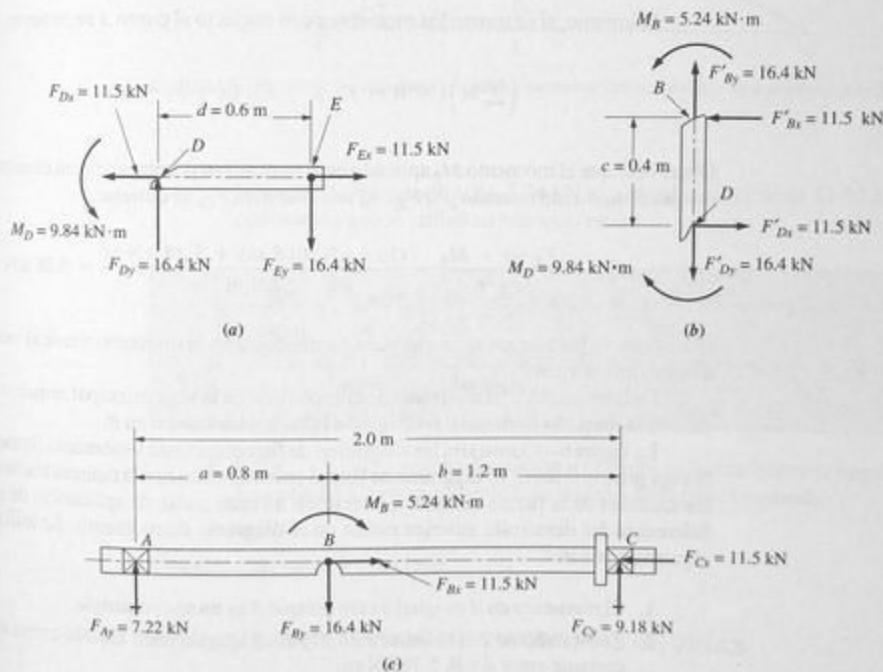


FIGURA 6-41 Diagramas de cuerpo libre. (a) Diagrama de cuerpo libre de la pieza  $DE$ . (b) Diagrama de cuerpo libre de la pieza  $BD$ . (c) Diagrama de cuerpo libre de la pieza  $ABC$ , la viga principal.

les a las que actúan en  $D$ . El momento que actúa en  $B$  se determina mediante la suma de los momentos con respecto a  $B$  como sigue:

$$\left(\sum M\right)_B = 0 = M_D - F_{Dx}c - M_B$$

Por tanto:

$$M_B = M_D - F_{Dx}c = 9.84 \text{ kN}\cdot\text{m} - (11.5 \text{ kN})(0.4 \text{ m}) = 5.24 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Ahora se analiza la viga principal  $ABC$ . Las fuerzas y el momento se muestran aplicados en  $B$  con los valores que se tomaron del punto  $B$  de la parte  $BD$ . Para determinar las reacciones en  $A$  y  $C$  primero se suman los momentos con respecto al punto  $C$  como sigue:

$$\left(\sum M\right)_C = 0 = F_{By}b - F_{Ay}(a+b) - M_B$$

Nótese que se incluye el momento  $M_B$  aplicado en  $B$ . Si se resuelve para  $F_{Ay}$  se obtiene:

$$F_{Ay} = \frac{(F_{By}b) - M_B}{a+b} = \frac{(16.4 \text{ kN})(1.2 \text{ m}) - 5.24 \text{ kN}\cdot\text{m}}{2.0 \text{ m}} = 7.22 \text{ kN}$$

Asimismo, si se suman los momentos con respecto al punto  $A$  se obtiene:

$$\left(\sum M\right)_A = 0 = F_{By}a - F_{Cy}(a+b) + M_B$$

Obsérvese que el momento  $M_B$  aplicado en  $B$  es positivo porque actúa en el mismo sentido que el momento causado por  $F_{By}$ . Al resolver para  $F_{Cy}$  se obtiene:

$$F_{Cy} = \frac{(F_{By}a) + M_B}{a+b} = \frac{(16.4 \text{ kN})(0.8 \text{ m}) + 5.24 \text{ kN}\cdot\text{m}}{2.0 \text{ m}} = 9.18 \text{ kN}$$

El cálculo de las fuerzas se comprueba sumándolas en la dirección vertical verificando que la suma sea cero.

La terminación del diagrama de cuerpo libre de la viga principal requiere la inclusión de la reacción horizontal en  $C$  igual a la fuerza horizontal en  $B$ .

La figura 6-42 muestra los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga principal  $ABC$ . El diagrama de fuerza cortante se traza a la manera tradicional con los cambios de la fuerza cortante que ocurren en cada punto de aplicación de carga. La diferencia del desarrollo anterior radica en el diagrama de momento. Se utilizaron los siguientes pasos:

1. El momento en  $A$  es igual a cero porque  $A$  es un apoyo simple.
2. El incremento del momento en  $A$  y  $B$  es igual al área bajo la curva de fuerza cortante entre  $A$  y  $B$ ,  $5.78 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .
3. En el punto  $B$  el momento  $M_B$  se considera que es un momento concentrado el cual produce un cambio repentino del valor del momento flexionante igual al

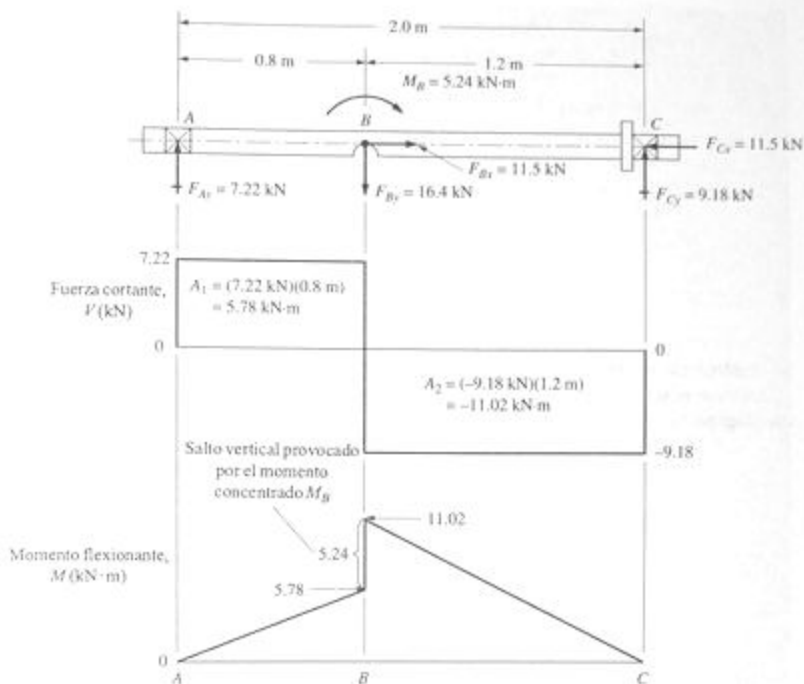


FIGURA 6-42 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga principal de la figura 6-40.

valor del momento aplicado, 5.24 kN·m y el valor máximo de 11.02 kN·m. La convención que se utilizó en este caso es:

- Cuando un momento concentrado actúa en sentido *de las manecillas del reloj*, su diagrama *sube*.
- Cuando un momento concentrado actúa en sentido *contrario al de las manecillas del reloj*, su diagrama *cae*.

- Entre B y C, el momento disminuye a cero por la fuerza cortante negativa y el área negativa correspondiente bajo la curva de la fuerza cortante.

Con esto, este ejemplo concluye.

## 6-9 ANÁLISIS MATEMÁTICO DE DIAGRAMAS DE VIGAS

En la mayoría de los problemas prácticos, la preparación de los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante con las técnicas expuestas con anterioridad en

este capítulo son propias y convenientes. Se puede analizar una amplia variedad de tipos de vigas y cargas con suficiente detalle para lograr un diseño lógico de las vigas que garantice la seguridad y que limite las deflexiones a valores aceptables. Los métodos para alcanzar estos objetivos se presentan en los capítulos 8–12.

Sin embargo existen algunos tipos de carga y de técnicas de diseño que pueden sacar provecho de la representación de los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante mediante ecuaciones matemáticas. Esta sección presenta los métodos de crear tales ecuaciones.

Lo que sigue es una serie de instrucciones sobre cómo derivar ecuaciones que definan por completo la carga, la fuerza cortante y el momento flexionante como función de la posición en la viga.

### Instrucciones para derivar ecuaciones de diagramas de vigas

1. Trace el diagrama de carga con todas las cargas externas aplicadas y las reacciones.
2. Calcule los valores de todas las reacciones.
3. Marque los puntos a lo largo de la viga donde actúan cargas concentradas o donde comienzan y terminan cargas distribuidas.
4. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante valiéndose de las técnicas expuestas con anterioridad en este capítulo y señale los valores en los puntos críticos que se definen en el paso 3.
5. Establezca convenciones para denotar las posiciones en la viga y los signos de las fuerzas cortantes y el momento flexionante. En la mayoría de los casos, se utilizarán las siguientes convenciones:
  - a. La posición en la viga se denotará por la variable  $x$  medida con respecto al extremo izquierdo de la viga.
  - b. Las cargas con dirección hacia abajo serán negativas.
  - c. Una carga cortante positiva es aquella que actúa hacia abajo dentro de una sección dada de una viga. Un método alterno para determinar el signo de la carga consiste en analizar la fuerza vertical externa neta que actúa en la parte de la viga a la izquierda de la sección de interés. Si la siguiente fuerza externa actúa hacia arriba, la fuerza cortante interna en la viga es positiva. Véanse las figuras 6–19 a 6–25.
  - d. Un momento flexionante positivo es aquel que actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj dentro de una sección dada de una viga. Véanse las figuras 6–26 a 6–31. Un momento flexionante positivo tenderá a flexionar una viga en una forma cóncava hacia arriba, propia de una viga simplemente apoyada que soporta cargas con dirección hacia abajo entre los apoyos.
6. Considere por separado cada segmento de la viga entre los puntos que se definen en el paso 3. La curva de la fuerza cortante debe ser continua dentro de cada segmento.
7. Si el diagrama de fuerza cortante se compone de líneas rectas debido a cargas concentradas o uniformemente distribuidas, se pueden usar los principios fundamentales de la geometría analítica para escribir las ecuaciones de la fuerza cortante *contra* la posición en cada segmento de la viga. Las ecuaciones resultantes tendrán la forma:



$$V_{AB} = \text{Constante (ecuación de grado cero)}$$

$$V_{BC} = ax + b \text{ (ecuación de primer grado)}$$

Los subíndices definen el comienzo y el final del segmento de interés.

- Si el diagrama de fuerza cortante contiene segmentos curvos causados por cargas distribuidas variables, primero escriba ecuaciones para la carga *versus* posición de la viga. Luego derive las ecuaciones para la fuerza cortante *versus* la posición en la viga como sigue:

$$V_{AB} = \int w_{AB} dx + C$$

donde  $w_{AB}$  es la ecuación para la carga que actúa en el segmento  $AB$  como función de  $x$  y  $C$  es una constante de integración. La ecuación de la fuerza cortante resultante será de segundo grado o mayor, según la complejidad del patrón de carga. Calcule el valor de las constantes de integración por medio de valores conocidos de  $V$  en puntos dados  $x$ .

- Derive ecuaciones para el momento flexionante como función de la posición en cada segmento de la viga, por medio del método:

$$M_{AB} = \int V_{AB} dx + C$$

Éste es el equivalente matemático de la *regla del área* para el trazo de diagramas de vigas que se utilizó con anterioridad porque el proceso de integración determina el área bajo la curva de la fuerza cortante. Calcule el valor de las constantes de integración por medio de valores conocidos de  $M$  en  $x$  puntos dados.

- El resultado es un conjunto de ecuaciones para fuerza cortante y momento flexionante en cada segmento de la viga. Convendría comprobarlas en cuanto a exactitud sustituyendo los valores clave de  $x$  para los que se conoce la fuerza cortante y el momento flexionante en las ecuaciones para garantizar que se obtendrán los valores correctos para  $V$  y  $M$ .
- Determine los valores máximos de la fuerza cortante y el momento flexionante si aún no se conocen sustituyendo valores de  $x$  en las ecuaciones apropiadas donde se esperan los máximos valores. Recuerde la regla con respecto a que el momento máximo flexionante ocurrirá en el punto donde la curva de la fuerza cortante cruza el eje  $x$ , es decir, donde  $V=0$ .

Este procedimiento se ilustra con los cuatro ejemplos siguientes.

**Viga simplemente apoyada con una carga concentrada.** El objetivo es escribir las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga y patrón de carga como se muestran en la figura 6-43, siguiendo las instrucciones dadas en esta sección.

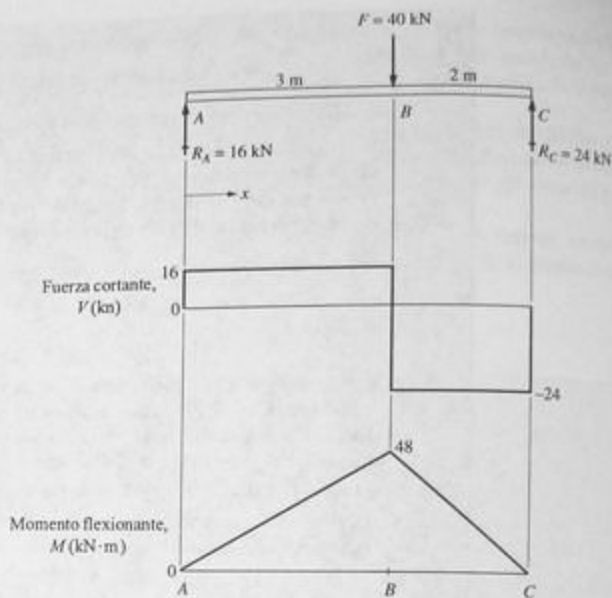


FIGURA 6-43 Viga simplemente apoyada con una carga concentrada.

Los pasos del 1 al 4 ya se completaron y se muestran en la figura 6-43. Los puntos de interés se designaron como  $A$  en el apoyo izquierdo,  $B$  en el punto de aplicación de la carga y  $C$  en el apoyo derecho. Las ecuaciones se desarrollarán para los dos segmentos,  $AB$  y  $BC$ , donde  $AB$  abarca desde  $x=0$  hasta  $x=3 \text{ m}$  y  $BC$  desde  $x=3 \text{ m}$  hasta  $x=5 \text{ m}$ . Los pasos 5 y 6 son los que se definen en las instrucciones.

El paso 7 se aplica para escribir las ecuaciones de la curva de fuerza cortante como sigue:

$$V_{AB} = 16$$

$$V_{BC} = -24$$

Las unidades de la fuerza cortante son kN.

El paso 8 no se aplica en este ejemplo.

Ahora se aplica el paso 9 para derivar las ecuaciones del momento flexionante en los dos segmentos.

$$M_{AB} = \int V_{AB} dx + C = \int 16 dx + C = 16x + C$$

Para evaluar la constante de integración  $C$ , se observa que en  $x=0$ ,  $M_{AB}=0$ . Si se sustituyen estos valores en la ecuación del momento se obtiene:

$$0 = 16(0) + C$$

Por tanto,  $C = 0$ . La ecuación final se escribe como:

$$M_{AB} = 16x$$

Como comprobación, se ve que en  $x = 3$  m, el momento flexionante  $M_B = 48$  kN·m, como se muestra en el diagrama de momento flexionante. A continuación se deriva la ecuación del momento flexionante en el segmento  $BC$ .

$$M_{BC} = \int V_{BC} dx + C = \int -24 dx + C = -24x + C$$

Para evaluar la constante  $C$  correspondiente a este segmento, se usa la condición de que en  $x = 5$ ,  $M_{BC} = 0$ . Por tanto:

$$0 = -24(5) + C$$

Por consiguiente,  $C = 120$ . La ecuación final es:

$$M_{BC} = -24x + 120$$

Para comprobarla, se sustituye  $x = 3$ .

$$M_{BC} = -24(3) + 120 = -72 + 120 = 48 \quad (\text{comprobación})$$

En suma, las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante son:

En el segmento  $AB$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 3$  m:

$$V_{AB} = 16$$

$$M_{AB} = 16x$$

En el segmento  $BC$  desde  $x = 3$  m hasta  $x = 5$  m:

$$V_{BC} = -24$$

$$M_{BC} = -24x + 120$$

Los valores máximos de la fuerza cortante y el momento flexionante se ven con claridad en los diagramas.

$$V_{\text{máx}} = -24 \text{ kN a través del segmento } BC$$

$$M_{\text{máx}} = 48 \text{ kN}\cdot\text{m en el punto } B (x = 3 \text{ m})$$

Con esto se termina el ejemplo.

**Viga simplemente apoyada con una carga parcial uniformemente distribuida.** El objetivo es escribir las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga y el patrón de carga que se muestran en la figura 6-44, siguiendo las instrucciones dadas en esta sección. Nótese que ésta es la misma viga y patrón de carga de la figura 6-31.

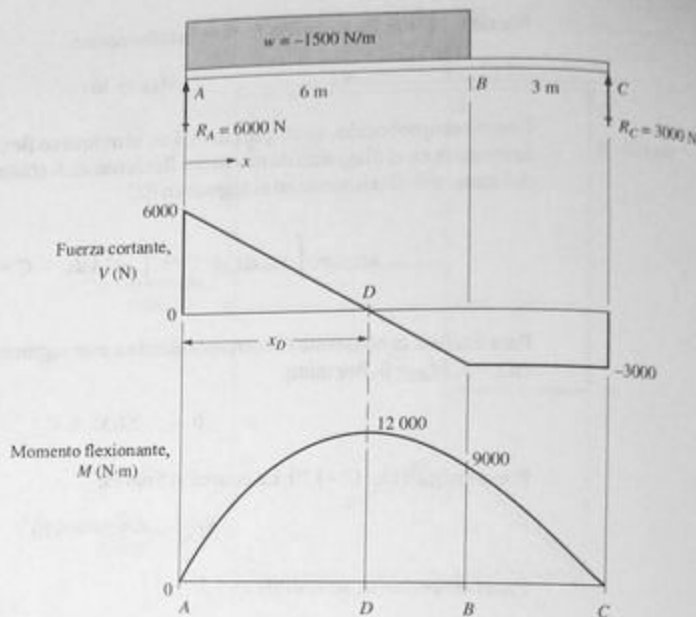


FIGURA 6-44 Viga simplemente apoyada con una carga parcial con distribución uniforme.

Ya se completaron los pasos del 1 al 4 los cuales se muestran en la figura 6-44. Los puntos de interés se designaron como  $A$  en el apoyo izquierdo,  $B$  en el punto donde termina la carga distribuida y  $C$  en el apoyo derecho. Se desarrollarán ecuaciones para los dos segmentos  $AB$  y  $BC$ , en donde  $AB$  comprende desde  $x = 0$  hasta  $x = 6$  m y  $BC$  desde  $x = 6$  m hasta  $x = 9$  m.

El paso 5(b) puede usarse para escribir una ecuación para la carga en el segmento  $AB$ :

$$w_{AB} = -1500 \text{ N/m}$$

El paso 7 se usa para escribir las ecuaciones de la curva de fuerza cortante. En el segmento  $AB$ , la curva es una línea recta, así que se escribe como sigue:

$$V_{AB} = ax + b$$

en donde  $a$  es la pendiente de la línea y  $b$  es la intersección de la línea con el eje  $V$  en  $x=0$ . Un método conveniente para determinar la pendiente consiste en observar que la pendiente es igual al régimen de carga en el caso de una carga distribuida. Es decir,  $a = -1500$  N/m. El valor de la intersección  $b$  se determina en el diagrama de fuerza cortante;  $b = 6000$  N. Por consiguiente la forma final de la ecuación de la fuerza cortante es:

$$V_{AB} = -1500x + 6000$$

La ecuación se comprueba sustituyendo  $x = 6$  m y calculando  $V_B$ .

$$V_{AB} = -1500(6) + 6000 = -3000$$

Este valor concuerda con el valor que ya se conoce de la fuerza cortante en el punto  $B$ .

Nótese que se pudo usar el paso 8 para determinar la ecuación de  $V_{AB}$ . Obsérvese que:

$$w_{AB} = -1500 \text{ N/m}$$

Por lo tanto:

$$V_{AB} = \int w_{AB} dx + C = \int -1500 dx + C = -1500x + C$$

El valor de  $C$  se determina al sustituir  $V_{AB} = 6000$  en  $x = 0$ .

$$6000 = -1500(0) + C$$

Luego,  $C = 6000$ . Por último:

$$V_{AB} = -1500x + 6000$$

Este valor es idéntico al resultado precedente.

En el segmento  $BC$  la fuerza cortante es un valor constante:

$$V_{BC} = -3000$$

Antes de proceder a determinar las ecuaciones del momento flexionante recuérdese que un punto crítico ocurre donde la fuerza cortante cruza el eje cero. Dicho punto corresponde al punto donde ocurre el momento máximo flexionante. Sea este punto  $D$  y determine el valor de  $x_D$  donde  $V = 0$  igualando la ecuación de  $V_{AB}$  a cero y resolviéndola para  $x_D$ .

$$V_{AB} = 0 = -1500x_D + 6000$$

$$x_D = 6000/1500 = 4.0 \text{ m}$$

Más adelante se usará este valor para determinar el momento flexionante en  $D$ .

El paso 9 de las instrucciones se usa para determinar las ecuaciones del diagrama del momento flexionante. Primero en el segmento  $AB$ :

$$M_{AB} = \int V_{AB} dx + C = \int (-1500x + 6000) dx + C$$

$$M_{AB} = -750x^2 + 6000x + C$$

Para evaluar  $C$ , nótese que en  $x = 0$ ,  $M_{AB} = 0$ . Por lo tanto,  $C = 0$ . Y:

$$M_{AB} = -750x^2 + 6000x$$

La ecuación se comprueba determinando  $M_B$  en  $x = 6$  m.

$$M_B = -750(6)^2 + 6000(6) = 9000 \quad (\text{comprobación})$$

Además, se requiere el valor del momento máximo en  $D$ , donde  $x = 4.0$  m.

$$M_D = -750(4)^2 + 6000(4) = 12000 \quad (\text{comprobación})$$

Para el segmento  $BC$ :

$$M_{BC} = \int V_{BC} dx + C = \int -3000 dx + C = -3000x + C$$

Pero, en  $x = 9$  m,  $M_{BC} = 0$ . Por lo tanto:

$$0 = -3000(9) + C$$

y  $C = 27000$ . Por último:

$$M_{BC} = -3000x + 27000$$

Se comprueba esta ecuación en el punto  $B$  para  $x = 6$  m.

$$M_B = -3000(6) + 27000 = -18000 + 27000 = 9000 \quad (\text{comprobación})$$

En suma, las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante son:  
En el segmento  $AB$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 6$  m:

$$V_{AB} = -1500x + 6000$$

$$M_{AB} = -750x^2 + 6000x$$

En el segmento  $BC$  desde  $x = 6$  m hasta  $x = 9$  m:

$$V_{BC} = -3000$$

$$M_{BC} = -3000x + 27000$$

Los valores máximos de la fuerza cortante y el momento flexionante son evidentes en los diagramas.

$$V_{\max} = 6000 \text{ N en el extremo izquierdo de } A$$

$$M_{\max} = 12000 \text{ N}\cdot\text{m en el punto } D (x = 4 \text{ m})$$

Con esto se concluye el ejemplo.

**Viga en voladizo con una carga distribuida variable.** El objetivo es escribir las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante correspondientes

a la viga y carga según la figura 6-45, siguiendo las instrucciones dadas en esta sección. Nótese que la viga y la carga son las mismas que se mostraron en la figura 6-36.

En este ejemplo habrá sólo un segmento, que comprende toda la longitud de la viga, porque las curvas de la carga, la fuerza cortante y el momento flexionante son continuas.

Primero se escribe una ecuación de la carga que varía linealmente desde una razón de  $-200$  lb/pie en el extremo izquierdo  $A$  hasta cero en el punto  $B$  donde  $x = 8$  pies. Es de hacerse notar que la carga se muestra al actuar sobre la viga con dirección hacia abajo conforme a la convención usual. Pero la carga con dirección hacia abajo es en realidad negativa. Como ayuda para escribir la ecuación, se podría dibujar el diagrama de carga como una *gráfica* de carga contra la posición  $x$ , como se muestra en la figura 6-46. Luego se escribe la ecuación de la línea recta:

$$w_{AB} = ax + b$$

La pendiente,  $a$ , se evalúa con la razón del cambio de  $w$  a lo largo de una distancia dada  $x$ . Si se usa toda la longitud de la viga se obtiene:

$$a = \frac{w_1 - w_2}{x_1 - x_2} = \frac{-200 - 0}{0 - 8} = 25$$

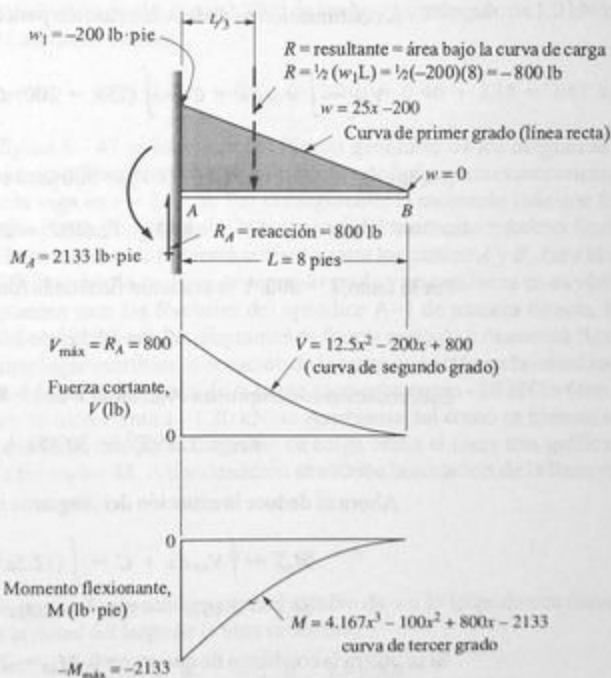


FIGURA 6-45 Viga en voladizo con una carga distribuida variable.

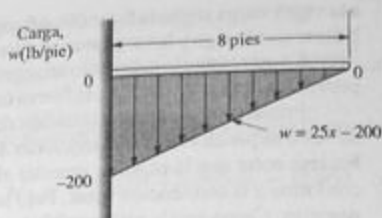


FIGURA 6-46 Representación alterna de la carga sobre la viga de la figura 6-45.

El valor de  $b = -200$  se observa en el diagrama de la figura 6-46. Entonces la ecuación final de la carga es:

$$w_{AB} = 25x - 200$$

Esta ecuación se comprueba al evaluar  $w$  en  $x = 8$  pies al final de la viga.

$$w_{AB} = 25(8) - 200 = 0 \quad (\text{comprobación})$$

A continuación se deduce la ecuación para el diagrama de fuerza cortante.

$$V_{AB} = \int w_{AB} dx + C = \int (25x - 200) dx + C = 12.5x^2 - 200x + C$$

Use la condición de que en  $x = 0$ ,  $V_{AB} = 800$  para evaluar  $C$ .

$$800 = 12.5(0)^2 - 200(0) + C$$

Por lo tanto,  $C = 800$ . Y la ecuación final de la fuerza cortante es:

$$V_{AB} = 12.5x^2 - 200x + 800$$

Esta ecuación se comprueba evaluando  $V$  en  $x = 8$  pies al final de la viga.

$$V_{AB} = 12.5(8)^2 - 200(8) + 800 = 0 \quad (\text{comprobación})$$

Ahora se deduce la ecuación del diagrama del momento flexionante.

$$M_{AB} = \int V_{AB} dx + C = \int (12.5x^2 - 200x + 800) dx + C$$

$$M_{AB} = 4.167x^3 - 100x^2 + 800x + C$$

Si se utiliza la condición de que en  $x = 0$ ,  $M_{AB} = -2133$ , se evalúa  $C$ .

$$-2133 = 4.167(0)^3 - 100(0)^2 + 800(0) + C$$



Por lo tanto,  $C = -2133$ . La ecuación final del momento flexionante es:

$$M_{AB} = 4.167x^3 - 100x^2 + 800x - 2133$$

Esta ecuación se comprueba evaluando  $M$  en  $x = 8$  pies al final de la viga.

$$M_{AB} = 4.167(8)^3 - 100(8)^2 + 800(8) - 2133 = 0 \quad (\text{comprobación})$$

En resumen, las ecuaciones de los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante de la viga que ilustra la figura 6-45 son:

$$w_{AB} = 25x - 200 \quad (\text{una curva de primer grado; una línea recta})$$

$$V_{AB} = 12.5x^2 - 200x + 800 \quad (\text{una curva de segundo grado})$$

$$M_{AB} = 4.167x^3 - 100x^2 + 800x - 2133 \quad (\text{una curva de tercer grado})$$

Con esto se concluye el ejemplo.

**Viga simplemente apoyada con una carga distribuida variable.** El objetivo es escribir las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga y carga como se muestran en la figura 6-47, siguiendo las instrucciones dadas en esta sección. La figura 6-6 ilustra cómo se crea este patrón de carga.

Por la simetría de la carga, las dos reacciones son de igual magnitud. Cada una es igual al área bajo una mitad del diagrama de carga. Si tal área se descompone en un rectángulo de  $0.2 \text{ kN/m}$  de altura por  $2.30 \text{ m}$  de ancho y un triángulo de  $1.0 \text{ kN/m}$  de altura por  $2.30 \text{ m}$  de ancho, se calcula:

$$R_A = R_C = (0.2)(2.30) + 0.5(1.0)(2.30) = 0.46 + 1.15 = 1.61 \text{ kN}$$

En la figura 6-47 se muestran las formas generales de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Se ve que la curva de la fuerza cortante cruza el eje cero a la mitad de la viga en  $x = 2.30 \text{ m}$ . Por consiguiente, el momento máximo flexionante ocurre en dicho punto. En principio, la magnitud del momento máximo flexionante es igual al área bajo la curva de la fuerza cortante entre los puntos  $A$  y  $B$ . Pero el cálculo de esa área es difícil porque la curva es de segundo grado y no comienza en su vértice. Por lo tanto no se pueden usar las fórmulas del apéndice A-1 de manera directa. Por eso se desarrollan las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

En primer lugar escribiremos la ecuación de la carga que actúa en la mitad izquierda de la viga desde  $A$  hasta  $B$ . La razón de la carga comienza como  $-20 \text{ kN/m}$  (con dirección hacia abajo) y se incrementa a  $-1.20 \text{ kN/m}$ . Asimismo, tal como se hizo en el ejemplo precedente, conviene dibujar el diagrama de carga como si fuera una gráfica, como se muestra en la figura 6-48. A continuación se escribe la ecuación de la línea recta como sigue:

$$w_{AB} = ax + b$$

La pendiente,  $a$ , se calcula con la razón del cambio de  $w$  a lo largo de una distancia dada  $x$ . Al utilizar la mitad del largo de la viga se obtiene:

$$a = \frac{w_1 - w_2}{x_1 - x_2} = \frac{-0.20 - (-1.20)}{0 - 2.30} = -0.4348$$

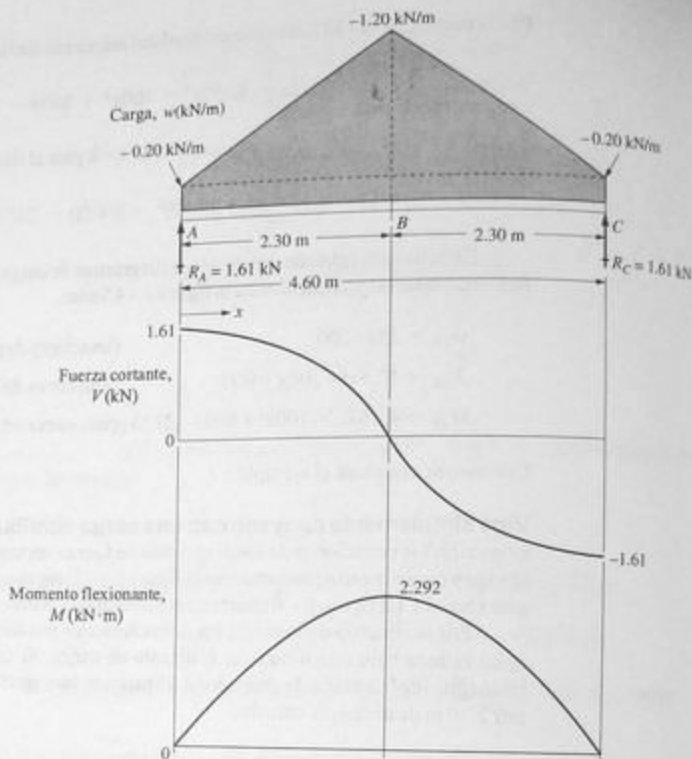


FIGURA 6-47 Viga simplemente apoyada con una carga distribuida variable.

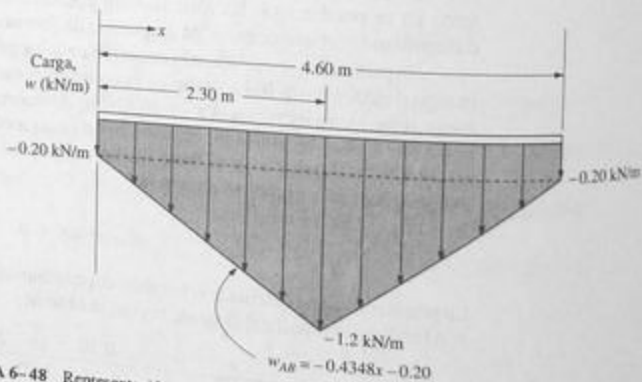


FIGURA 6-48 Representación alterna de la carga sobre la viga de la figura 6-47.

El valor de  $b = -0.20$  se obtiene del diagrama expuesto en la figura 6-47. Luego la ecuación final de la carga es:

$$w_{AB} = ax + b = -0.4348x - 0.20$$

Esta ecuación se comprueba en  $x = 2.30$  a la mitad de la viga.

$$w_{AB} = -0.4348x - 0.20 = 0.4348(2.30) - 0.20 = 1.20 \text{ kN/m (comprobación)}$$

A continuación se deriva la ecuación del diagrama de fuerza cortante correspondiente al segmento  $AB$ .

$$V_{AB} = \int w_{AB} dx + C = \int (-0.4348x - 0.20) dx + C = -0.2174x^2 - 0.20x + C$$

Para evaluar  $C$  use la condición de que en  $x = 0$ ,  $V_{AB} = 1.61$ . Por lo tanto,  $C = 1.61$  y la forma final de la ecuación es:

$$V_{AB} = -0.2174x^2 - 0.20x + 1.61$$

Esta ecuación se comprueba a la mitad de la viga sustituyendo  $x = 2.30$  m.

$$V_{AB} = -0.2174(2.30)^2 - 0.20(2.30) + 1.61 = 0 \text{ (comprobación)}$$

A continuación se deriva la ecuación para el diagrama del momento flexionante.

$$M_{AB} = \int V_{AB} dx + C = \int (-0.2174x^2 - 0.20x + 1.61) dx + C$$

$$M_{AB} = -0.07246x^3 - 0.10x^2 + 1.61x + C$$

Utilizando la condición de que en  $x = 0$ ,  $M_{AB} = 0$ , se evalúa  $C = 0$ . Y:

$$M_{AB} = -0.07246x^3 - 0.10x^2 + 1.61x$$

Con  $x = 2.30$  m se obtiene  $M_B = 2.292$  kN·m. La ecuación de los diagramas del lado derecho se derivan de la misma manera. Pero, por la simetría de los diagramas, las curvas del lado derecho son idénticas a las del lado izquierdo. En suma, las ecuaciones de la mitad izquierda de los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante son:

$$w_{AB} = -0.4348x - 0.20$$

$$V_{AB} = -0.2174x^2 - 0.20x + 1.61$$

$$M_{AB} = -0.07246x^3 - 0.10x^2 + 1.61x$$

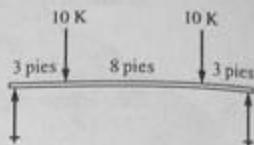
La fuerza cortante máxima es de 1.61 kN en cada uno de los apoyos y el momento máximo flexionante es de 2.292 kN·m a la mitad de la viga.

Con esto se concluye el ejemplo.

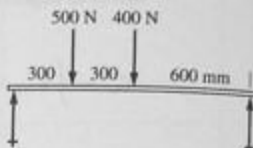
## PROBLEMAS

Las figuras de la P6-1 a la P6-76 muestran varios tipos de viga y condiciones de carga. Para la viga ilustrada en cada una de las figuras, se puede aplicar cualquiera o todos los enunciados de los problemas siguientes:

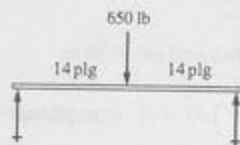
1. Calcule las reacciones en los apoyos utilizando la técnica que se plantea en la sección 6-3.
2. Dibuje los diagramas completos de fuerza cortante y momento flexionante, utilizando las técnicas que se presentan en las secciones 6-4 a 6-7.
3. Determine la magnitud y localización del valor máximo absoluto de la fuerza cortante y el momento flexionante.
4. Use el método del diagrama de cuerpo libre expuesto en las secciones 6-4 y 6-5 para determinar la fuerza cortante y el momento flexionante internos en un punto cualquiera que se especifica en una viga.
5. Escriba las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, correspondientes a todos los segmentos, siguiendo las instrucciones que se dan en la sección 6-9.



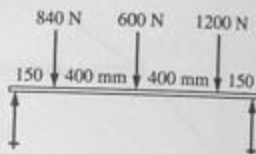
P6-4



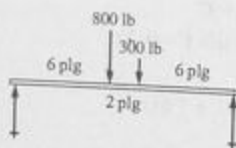
P6-5



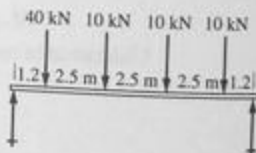
P6-1



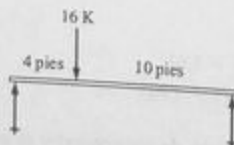
P6-6



P6-2



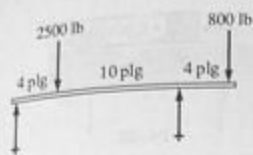
P6-7



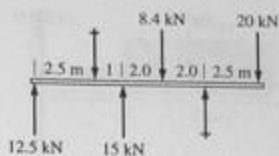
P6-3



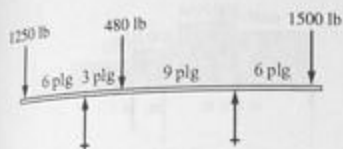
P6-8



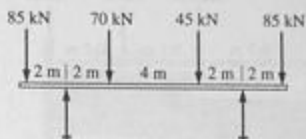
P6-9



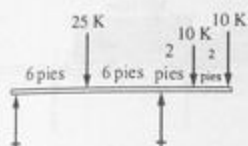
P6-15



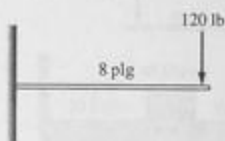
P6-10



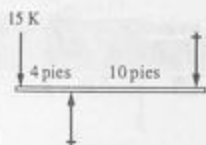
P6-16



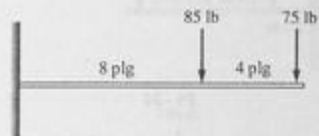
P6-11



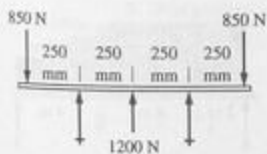
P6-17



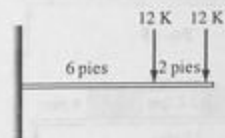
P6-12



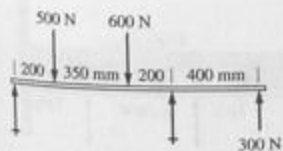
P6-18



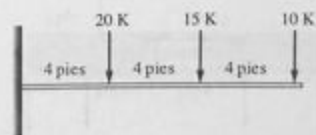
P6-13



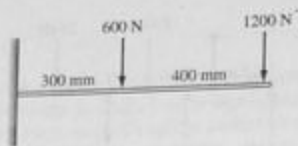
P6-19



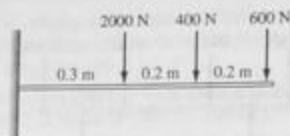
P6-14



P6-20



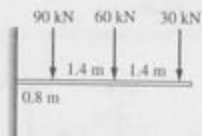
P6-21



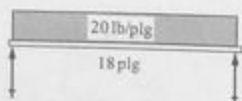
P6-22



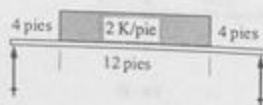
P6-23



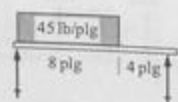
P6-24



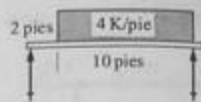
P6-25



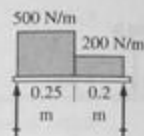
P6-26



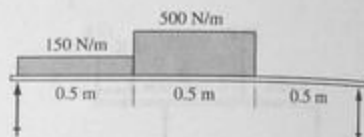
P6-27



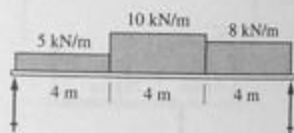
P6-28



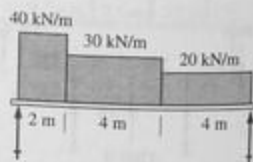
P6-29



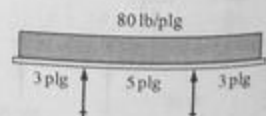
P6-30



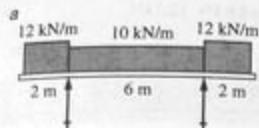
P6-31



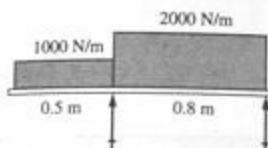
P6-32



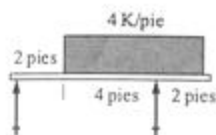
P6-33



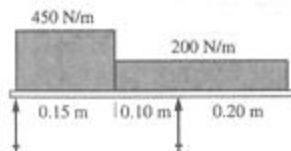
P6-34



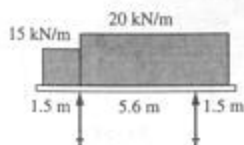
P6-35



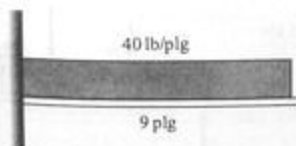
P6-36



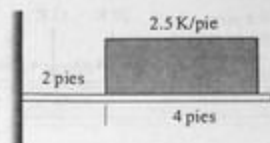
P6-37



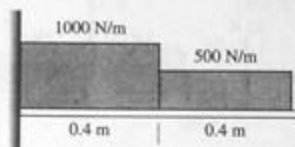
P6-38



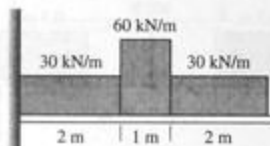
P6-39



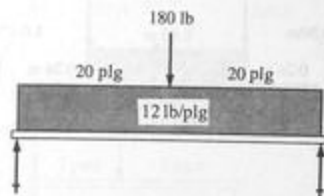
P6-40



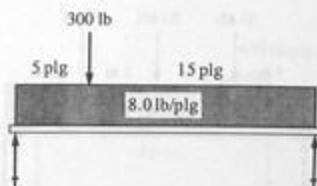
P6-41



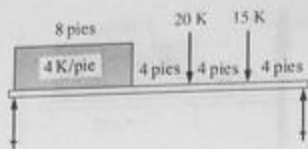
P6-42



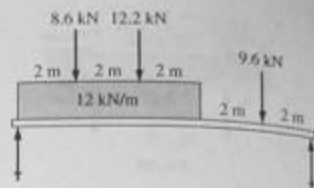
P6-43



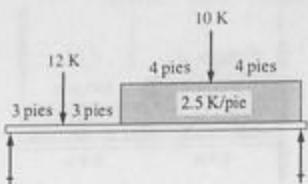
P6-44



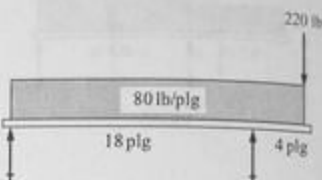
P6-45



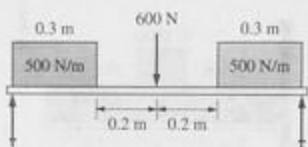
P6-50



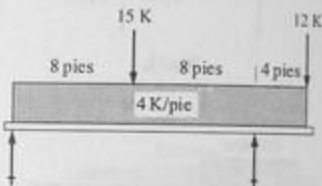
P6-46



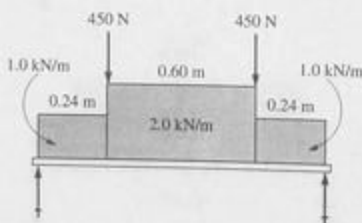
P6-51



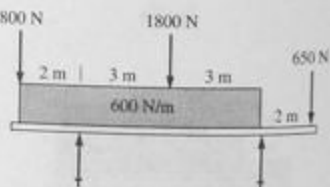
P6-47



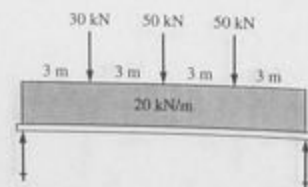
P6-52



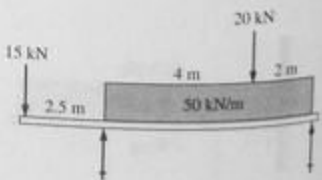
P6-48



P6-53

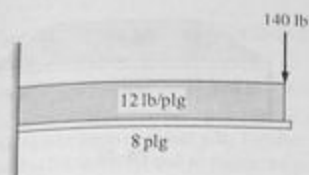


P6-49

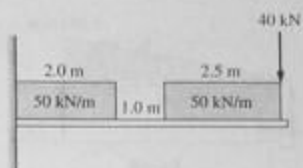


P6-54

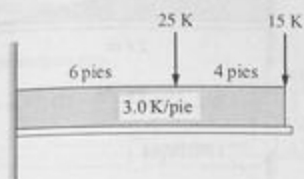




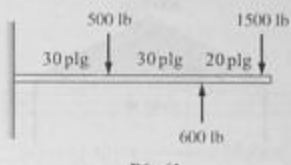
P6-55



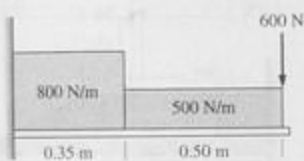
P6-60



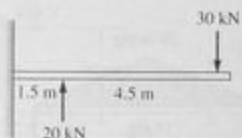
P6-56



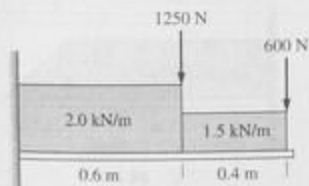
P6-61



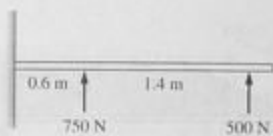
P6-57



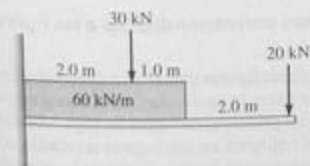
P6-62



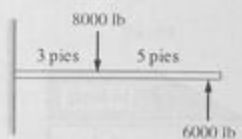
P6-58



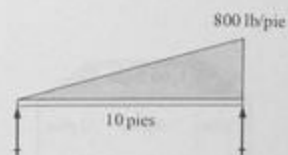
P6-63



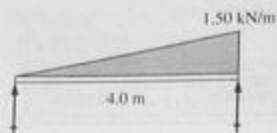
P6-59



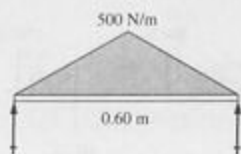
P6-64



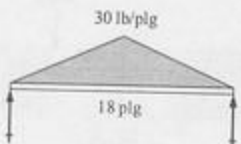
P6-65



P6-66



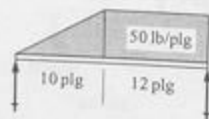
P6-67



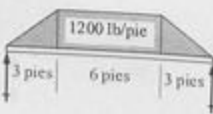
P6-68



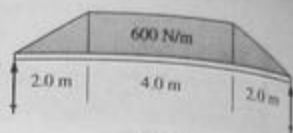
P6-69



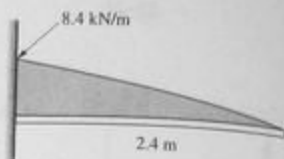
P6-70



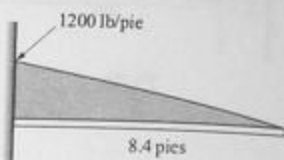
P6-71



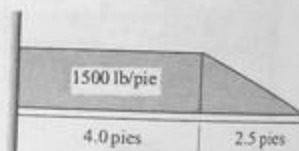
P6-72



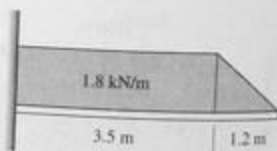
P6-73



P6-74



P6-75



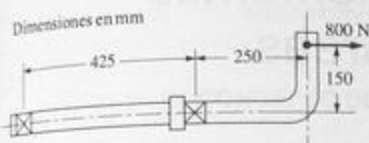
P6-76

**Problemas correspondientes a las figuras P6-77 a P6-84**

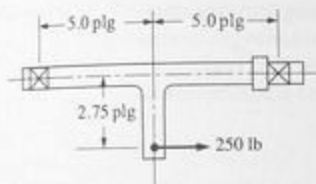
Cada una de las figuras muestra un dispositivo mecánico con una o más fuerzas aplicadas paralelas y alejadas del eje del miembro principal de forma de viga. Los dispositivos se apoyan en cojinetes en los lugares marcados con una  $x$  los cuales pueden crear fuerzas de reacción en cualquier dirección perpendicular al eje de la viga. Uno de los cojinetes es

capaz de resistir fuerzas horizontales. Para cada figura los objetivos son:

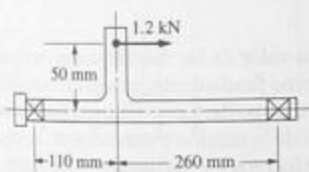
1. Descomponer la viga compuesta en piezas rectas.
2. Mostrar el diagrama de cuerpo libre de cada componente, incluidas todas las cargas externas y las fuerzas internas y los momentos flexionantes que se requieren para mantenerlo en equilibrio.
3. Para el componente principal horizontal, únicamente dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos. Recorra a la sección 6-8 por lo que se refiere a ejemplos.



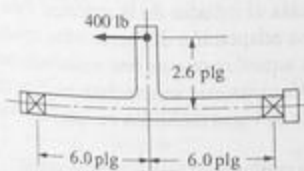
P6-77



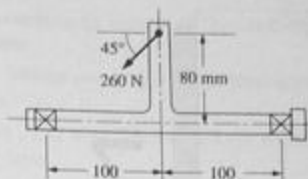
P6-78



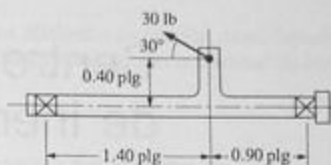
P6-79



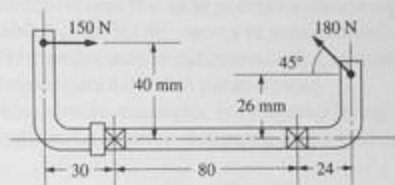
P6-80



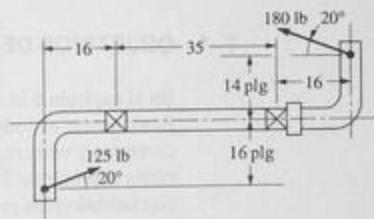
P6-81



P6-82



P6-83



P6-84



# 7

## Centroides y momentos de inercia de áreas

### 7-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En el capítulo 6 se aprendió a determinar el valor de las fuerzas cortantes y momentos flexionantes en todos los puntos de vigas como fundamento para el cálculo de esfuerzos cortantes y esfuerzos flexionantes de capítulos posteriores. Este capítulo continúa esta pauta al presentar las propiedades del perfil de la sección transversal de la viga, necesarias también para completar el análisis de esfuerzos y deformaciones de vigas.

Las propiedades del área de la sección transversal de vigas que son de interés en este caso son el *centroide* y el *momento de inercia con respecto al eje centroidal*. Algunos lectores ya han manejado estos temas gracias al estudio de la *estática*. Para ellos este capítulo constituirá un valioso repaso y una adaptación del tema a las aplicaciones de interés en la resistencia de materiales. Para aquellos que no han estudiado centroides y momentos de inercia, los conceptos y las técnicas que se exponen en este capítulo les permitirán resolver los problemas de análisis de vigas incluidos en este libro y en muchas situaciones reales de diseño.

Después de terminar el estudio de este capítulo, el lector será capaz de:

1. Definir el término *centroide*.
2. Localizar el centroide de formas simples por observación.
3. Calcular la localización del centroide de formas complejas tratándolas como compuestas por dos o más figuras simples.
4. Definir *momento de inercia* tal y como se aplica al área de la sección transversal de vigas.

- Utilizar fórmulas para calcular el momento de inercia de formas simples con respecto a los ejes centroidales del área.
- Calcular el momento de inercia de formas complejas tratándolas como compuestas de dos o más formas simples.
- Usar en forma adecuada el *teorema de la transferencia de eje* calculando el momento de inercia de formas complejas.
- Analizar perfiles de vigas compuestas integradas por dos o más perfiles estructurales estándar para determinar la localización del centroide y el momento de inercia resultantes.
- Reconocer qué tipos de perfiles son eficientes en función de su capacidad de producir un gran momento de inercia en relación con la cantidad de área de su sección transversal.

## 7-2 EL CONCEPTO DE CENTROIDE-FORMAS SIMPLES

El *centroide* de un área es el punto con respecto al cual el área se podría equilibrar suponiendo que se apoya en dicho punto. La palabra se deriva de *centro* y se puede considerar como el centro geométrico de un área. En el caso de cuerpos tridimensionales, el término *centro de gravedad* o *centro de masa* se emplea para definir un punto similar.

En el caso de áreas simples, tales como círculo, cuadrado, rectángulo y triángulo, la ubicación del centroide es fácil de visualizar. La figura 7-1 muestra las ubicaciones,

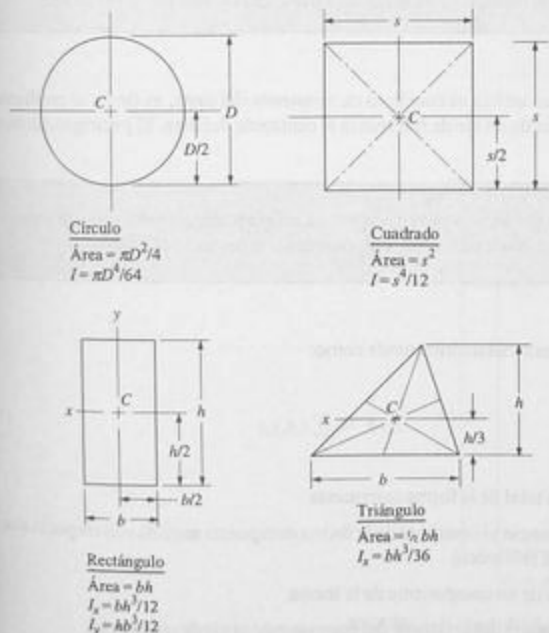


FIGURA 7-1 Propiedades de áreas simples. El centroide se denota como  $C$ .

denotadas por  $C$ . Si estos perfiles se fabricaran con esmero y se localizara el centroide con precisión, los perfiles se podrían equilibrar sobre la punta de un lápiz colocada en el centroide. Desde luego, se requiere una mano firme. ¿Está firme su mano?

El apéndice A-1 es una fuente más completa de datos en lo que se refiere a centroides y otras propiedades de áreas de diversos perfiles.

### 7-3 CENTROIDE DE FORMAS COMPLEJAS

Se puede considerar que la mayoría de las formas complejas están compuestas de varias formas simples. Esto facilita la localización del centroide, como más adelante se demostrará.

Otro concepto que ayuda en la localización de centroides es que si el área dispone de un eje de simetría, el centroide se localizará en dicho eje. Algunas figuras complejas cuentan con dos ejes de simetría y, por consiguiente, el centroide se localiza en la intersección de estos dos ejes. La figura 7-2 muestra ejemplos donde ocurre esto.

En los casos en que no hay dos ejes de simetría, se usa el *método de las áreas compuestas* para localizar el centroide. Por ejemplo, considérese el área que ilustra la figura 7-3. Tiene un eje vertical de simetría pero no uno horizontal. Se considera que tales áreas se componen de dos o más áreas simples en las cuales se puede localizar el centroide aplicando el siguiente principio:

El producto del área total por la distancia al centroide del área total es igual a la suma de los productos del área de cada componente por la distancia a su centroide, con las distancias medidas a partir del mismo eje de referencia.

Este principio utiliza el concepto de *momento del área*, es decir, el producto del área por la distancia de un eje de referencia al centroide del área. El principio establece:

El momento del área total con respecto a un eje particular es igual a la suma de los momentos de todos los componentes con respecto al mismo eje.

Éste se expresa matemáticamente como:

$$A_T \bar{Y} = \sum (A_i y_i) \quad (7-1)$$

en donde  $A_T$  = área total de la forma compuesta

$\bar{Y}$  = distancia al centroide de la forma compuesta medida con respecto a un eje de referencia

$A_i$  = área de un componente de la forma

$y_i$  = distancia del centroide del componente al eje de referencia.

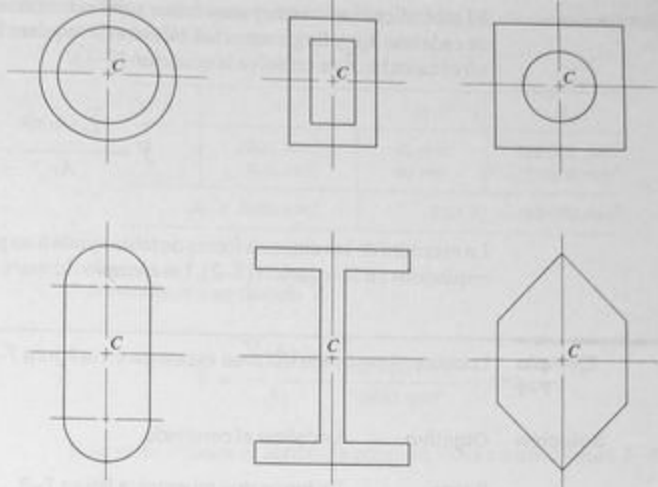


FIGURA 7-2 Formas compuestas que tienen dos ejes de simetría. El centroide se denota como  $C$ .

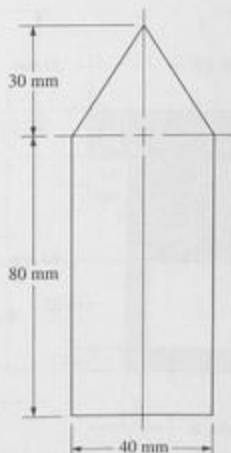


FIGURA 7-3 Perfil del ejemplo 7-1.

El subíndice  $i$  indica que puede haber varios componentes, y se debe formar el producto de cada uno  $A_i y_i$  y luego sumarlos, tal como lo requiere la ecuación (7-1). Como el objetivo es calcular  $\bar{Y}$ , se resuelve la ecuación (7-1):

$$\bar{Y} = \frac{\sum (A_i y_i)}{A_T} \quad (7-2)$$

La escritura de los datos en forma de tabla ayuda a no perder de vista los pasos del cálculo requeridos en la ecuación (7-2). Un ejemplo ilustrará el método.

**Ejemplo 7-1** Localice el centroide del área expuesta en la figura 7-3.

**Solución** **Objetivo** Localizar el centroide.

**Datos** La forma que muestra la figura 7-3.

**Análisis** Como la figura tiene un eje vertical de simetría, el centroide queda en dicha línea. La distancia vertical de la base de la figura al centroide se calcula con la ecuación (7-2). El área total se divide en un rectángulo (parte 1) y en un triángulo (parte 2), como se muestra en la figura 7-4. Cada una de las partes es una forma simple cuyo centroide se determina con los datos de la figura 7-1. Las distancias a los centroides con respecto a la base del área se muestran en la figura 7-4 como  $y_1$  y  $y_2$ .

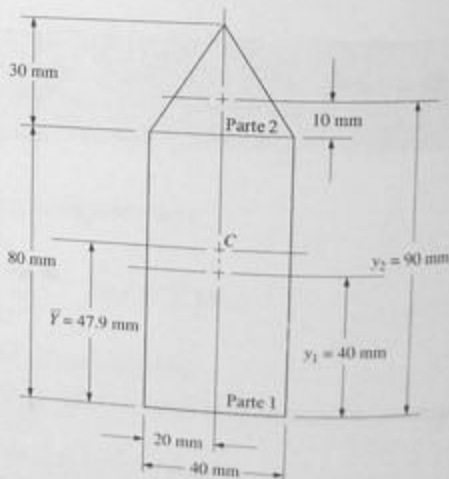


FIGURA 7-4 Datos utilizados en el ejemplo 7-1.



**Resultados** La tabla que sigue facilita los cálculos de los datos requeridos por la ecuación (7-2).

Parte	$A_i$	$y_i$	$A_i y_i$
1	3200 mm <sup>2</sup>	40 mm	128 000 mm <sup>3</sup>
2	600 mm <sup>2</sup>	90 mm	54 000 mm <sup>3</sup>
$A_T = 3800 \text{ mm}^2$		$\Sigma(A_i y_i) = 182\,000 \text{ mm}^3$	

A continuación se calcula  $\bar{Y}$ :

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma(A_i y_i)}{A_T} = \frac{182\,000 \text{ mm}^3}{3800 \text{ mm}^2} = 47.9 \text{ mm}$$

Este valor localiza el centroide como se muestra en la figura 7-4.

**Comentario** En suma, el centroide se localiza en el eje vertical de simetría a 47.9 mm hacia arriba de la base de la forma.

El método del área compuesta también sirve para secciones donde se agregan o quitan partes. En este caso el área que se quita se considera negativa. El ejemplo siguiente ilustra el método.

**Ejemplo 7-2** Localice el centroide del área que muestra la figura 7-5.

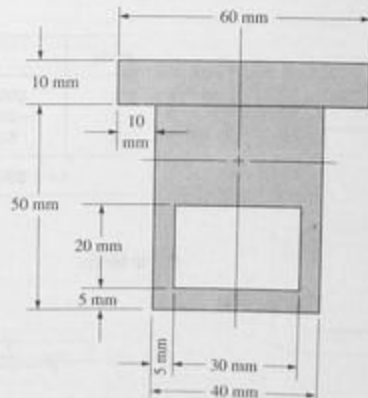


FIGURA 7-5 Perfil del ejemplo 7-2.

**Solución** **Objetivo** Determinar la localización del centroide.

**Datos** Forma que muestra la figura 7-5.

**Análisis** Como la forma tiene un eje vertical de simetría, el centroide queda en dicho eje. La distancia vertical de la base de la forma al centroide se calculará con la ecuación (7-2). El área total se divide en tres rectángulos, como se muestra en la figura 7-6. La parte 1 es el rectángulo grande,

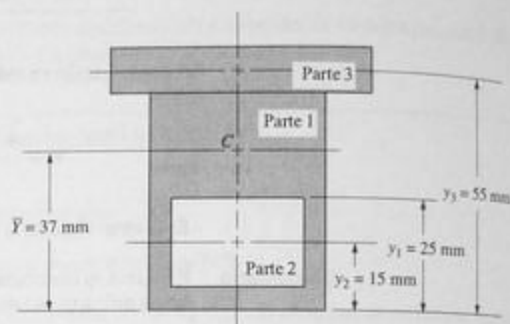


FIGURA 7-6 Datos utilizados en el ejemplo 7-2.

de 50 mm de altura y 40 mm de ancho. La parte 2 es el rectángulo de 20 mm  $\times$  30 mm que se quita del área compuesta y el área,  $A_2$ , se considerará negativa. La parte 3 es el rectángulo superior de 10 mm  $\times$  60 mm. Las distancias a los centroides desde la base, se muestran en la figura 7-6 como  $y_1$ ,  $y_2$  y  $y_3$ .

**Resultados** La tabla siguiente facilita los cálculos de los datos requeridos por la ecuación (7-2).

Parte	$A_i$	$y_i$	$A_i y_i$
1	2000 mm <sup>2</sup>	25 mm	50 000 mm <sup>3</sup>
2	-600 mm <sup>2</sup>	15 mm	-9000 mm <sup>3</sup>
3	600 mm <sup>2</sup>	55 mm	33 000 mm <sup>3</sup>
$A_T = 2000 \text{ mm}^2$		$\Sigma(A_i y_i) = 74 000 \text{ mm}^3$	

Por lo tanto:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma(A_i y_i)}{A_T} = \frac{74 000 \text{ mm}^3}{2000 \text{ mm}^2} = 37.0 \text{ mm}$$

**Comentario** En suma, el centroide se localiza en el eje vertical de simetría a una distancia de 37.0 mm hacia arriba de la base de la forma o figura.

## 7-4 CONCEPTO DE MOMENTO DE INERCIA

En el estudio de la resistencia de materiales, la propiedad de *momento de inercia* es una indicación de la rigidez de una viga, es decir, su resistencia a deflexionarse cuando se somete a cargas que tienden a flexionarla. La deflexión de una viga es inversamente proporcional al momento de inercia tal como se describe en el capítulo 12. El uso del momento de inercia en el cálculo de esfuerzo causado por la flexión se analiza en el capítulo 8 de este libro. Los esfuerzos causados por fuerzas cortantes verticales también dependen del momento de inercia y se analizan en el capítulo 9.

Es de interés el momento de inercia del perfil de la *sección transversal* de una viga. Por ejemplo, considérese la viga saliente expuesta en la figura 6-11 del capítulo 6. Su sección transversal tiene forma de "I", como la de la figura 7-7. Por esta forma, tal viga a menudo se designa como "viga en I".

En la figura 6-12 se muestra otro ejemplo, donde la pluma horizontal de la grúa es un voladizo cuya sección transversal es un rectángulo hueco, como se indica en la figura 7-8. Nótese en la figura original, que la dimensión vertical del rectángulo hueco disminuye en secciones distantes del extremo izquierdo donde la pluma está unida al poste de sustentación. El capítulo 8 describe el porqué.

Los dos ejemplos que se ilustran en las figuras 7-7 y 7-8 representan perfiles que son relativamente eficientes en el uso del material al mismo tiempo que producen valores elevados de momento de inercia. En los casos más importantes encontrados en el estudio de la resistencia de materiales, el momento de inercia de una figura, denotado por el símbolo  $I$ , es una función de la ubicación del área con respecto al *eje centroidal* del perfil, el eje que pasa por el centroide de ésta. Es más conveniente, desde el punto de vista del

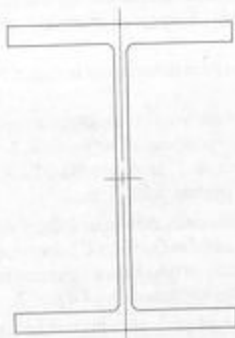


FIGURA 7-7 Perfil representativo de la sección transversal de una viga en forma de I.

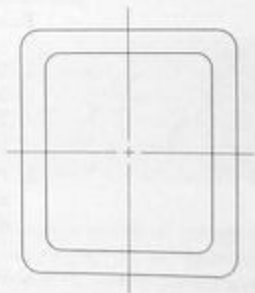


FIGURA 7-8 Perfil representativo de la sección transversal de un tubo rectangular hueco.

uso eficiente de material, colocar todo el material alejado del eje centroidal que resulta práctico. Esta observación se basa en la definición de momento de inercia que aquí se da.

*El momento de inercia de un área con respecto a un eje particular se define como la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada elemento infinitesimal de ella por el cuadrado de su distancia al eje.*

De este modo, el lector puede deducir que si la mayor parte del área se coloca lejos del eje centroidal, el momento de inercia tenderá a ser elevado.

La fórmula matemática del momento de inercia,  $I$ , se desprende de la definición. Un método que se aproxima implica el proceso de *sumatoria*, indicado por  $\Sigma$ .

$$I = \Sigma y^2(\Delta A) \quad (7-3)$$

Tal proceso requiere que el área total se divida en muchas partes pequeñas, las cuales se representan por  $\Delta A$ , y que la distancia  $y$  al centroide de cada una de las partes con respecto al eje de interés se determine. Por lo tanto, el producto de  $y^2(\Delta A)$  se calcula para cada parte pequeña, y a continuación se suman todos los productos. Éste es un proceso muy tedioso, y, por fortuna, uno que rara vez se utiliza.

Un refinamiento del método de la sumatoria y que señala la ecuación (7-3) es el proceso de *integración*, el cual consiste en la técnica matemática de sumar cantidades infinitesimales por toda un área. La definición matemática efectiva de momento de inercia requiere el uso de integración como sigue:

$$I = \int y^2 dA \quad (7-4)$$

Aquí, el término  $dA$  es un área de tamaño infinitesimalmente pequeño y  $y$ , como con anterioridad, es la distancia al centroide de  $dA$ . En una sección subsecuente se demostrará el uso de la ecuación (7-4). No obstante, en muchos problemas prácticos, no se requiere el proceso de integración.

Existen varios métodos para determinar la magnitud del momento de inercia.

1. Para formas simples conviene usar fórmulas estándar derivadas de la definición básica que ya se proporcionó. La figura 7-1 muestra las fórmulas de cuatro figuras y el apéndice A-1 da varias más. La referencia 2 incluye una tabla de fórmulas de  $I$  de 42 figuras diferentes.
2. Para perfiles estándar comercialmente disponibles tales como vigas de patín ancho (perfiles W), canales (perfiles C), ángulos (perfiles L) y tubos, los valores de momento de inercia se tabulan en referencias publicadas como la referencia 1. Véanse también los apéndices A-4 a A-12.
3. Para figuras más complejas y para las que no hay fórmulas estándar, a menudo conviene dividir las en componentes que son figuras simples. En las figuras de la 7-4 a 7-8 se proporcionan ejemplos. Los detalles del cálculo del momento de inercia de formas como éstas, llamadas *formas compuestas*, dependen de la

naturaleza de las formas y se demostrarán más adelante en este capítulo. A continuación se enuncian algunos conceptos importantes.

- a. Si todos los componentes de una forma compuesta tienen el mismo eje centroidal, su momento total de inercia se determina sumando o restando los momentos de inercia de sus componentes con respecto al eje centroidal. Véase la sección 7-5.
  - b. Si todos los componentes de una forma compuesta **no** tienen el mismo eje centroidal, se requiere el uso de un proceso llamado **teorema de la transferencia del eje**. Véase la sección 7-6.
4. La definición fundamental de momento de inercia, ecuación (7-4), se usa cuando la geometría de la figura se puede representar en términos matemáticos integrales. (Véase la sección 7-7.)
  5. Muchos sistemas de diseño de "software" con la ayuda de la computadora incluyen el cálculo automático de la localización del centroide y el momento de inercia de cualquier forma cerrada dibujada en el sistema.
  6. En el caso de un perfil que se puede representar como una combinación de rectángulos que tienen lados perpendiculares o paralelos al eje centroidal, se aplica una técnica de tabulación especial descrita en la última sección de este capítulo. Esta técnica, por sí misma, proporciona una buena solución valiéndose de una calculadora programable o un simple programa de computación.

## 7-5 MOMENTO DE INERCIA DE FORMAS COMPUESTAS CUYOS COMPONENTES TIENEN EL MISMO EJE CENTROIDAL

Un perfil compuesto es el integrado por dos o más componentes que por sí mismos son perfiles simples de los cuales hay fórmulas para calcular su momento de inercia,  $I$ . Un caso especial es cuando todas las partes tienen el mismo eje centroidal. En tal caso el momento de inercia del perfil compuesto se determina combinando los valores de  $I$  de todas las partes de acuerdo con la regla siguiente:

Si las partes de un área compuesta tienen el mismo eje centroidal, el momento total de inercia se determina sumando o restando los momentos de inercia de las partes con respecto al eje centroidal. El valor de  $I$  se suma cuando la parte es un área sólida positiva. Si la parte es hueca, el valor de  $I$  se resta.

La figura 7-9 muestra un ejemplo de un perfil, compuesto de un vástago central vertical, de 30 mm de ancho y 80 mm de altura, y dos partes laterales, de 30 mm de ancho y 40 mm de altura. Nótese que el eje centroidal de las partes coincide con el eje centroidal  $x-x$  de la sección compuesta. La regla que se acaba de enunciar se puede usar entonces para calcular el valor total de  $I$  para la cruz cuando se suman los valores de  $I$  de cada una de las tres partes. Véase el ejemplo 7-3.

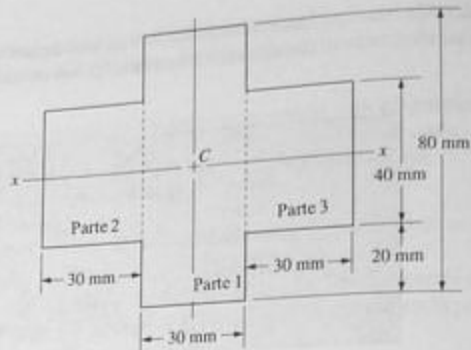


FIGURA 7-9 Perfil del ejemplo 7-3.

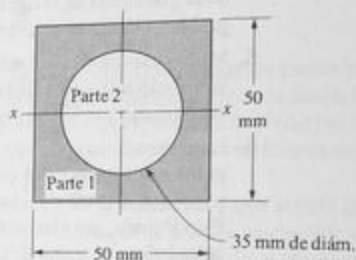


FIGURA 7-10 Perfil del ejemplo 7-4.

La figura 7-10 muestra un ejemplo donde hay un agujero circular de 35 mm de diámetro que se entresaca de un cuadrado cuyos lados miden 50 mm. El círculo y el cuadrado tienen el mismo eje centroidal  $x-x$ . Entonces, se puede usar la regla para calcular el valor de  $I$  del cuadrado y luego restar el valor de  $I$  del círculo para obtener el valor total de  $I$  del perfil compuesto. Véase el ejemplo 7-4.

<b>Ejemplo 7-3</b>	Calcule el momento de inercia del perfil en forma de cruz ilustrado en la figura 7-9 con respecto a su eje centroidal.
<b>Solución</b>	<p><b>Objetivo</b> Calcular el momento de inercia centroidal.</p> <p><b>Datos</b> El perfil que se ilustra en la figura 7-9.</p> <p><b>Análisis</b> El centroide del perfil en forma de cruz se localiza en la intersección de los ejes de simetría horizontal y vertical. Si se divide la cruz en las tres partes que muestra la figura resulta que cada una de las partes tiene el</p>

mismo eje centroidal  $x-x$  que la sección compuesta completa. Por consiguiente, se calcula el valor de  $I$  de cada una de las partes y luego se suman para obtener el valor total,  $I_T$ . Es decir:

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3$$

**Resultados** Recurriendo a la figura 7-1 en busca de la fórmula de  $I$  de un rectángulo se obtiene:

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} = \frac{30(80)^3}{12} = 1.28 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = I_3 = \frac{30(40)^3}{12} = 0.16 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Por tanto:

$$I_T = 1.28 \times 10^6 \text{ mm}^4 + 2(0.16 \times 10^6 \text{ mm}^4) = 1.60 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

**Ejemplo 7-4** Calcule el momento de inercia de la forma mostrada en la figura 7-10 con respecto a su eje centroidal.

**Solución** **Objetivo** Calcular el momento de inercia centroidal.

**Datos** Perfil expuesto en la figura 7-10.

**Análisis** El centroide de la forma compuesta se localiza en la intersección de los ejes de simetría horizontal y vertical. Éste coincide con el centroide del cuadrado y el círculo. El perfil compuesto se considera como el cuadrado con círculo quitado. Por consiguiente, el valor total de  $I_T$  se determina si se calcula el valor de  $I_1$  del cuadrado y al restarse el valor de  $I_2$  del círculo. Es decir:

$$I_T = I_1 - I_2$$

**Resultados**  $I_1 = \frac{s^4}{12} = \frac{(50)^4}{12} = 520.8 \times 10^3 \text{ mm}^4$

$$I_2 = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi(35)^4}{64} = 73.7 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

Para la sección compuesta:

$$I_x = I_1 - I_2 = 447.1 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

## 7-6 MOMENTO DE INERCIA DE FORMAS COMPUESTAS—CASO GENERAL—USO DEL TEOREMA DE LA TRANSFERENCIA DEL EJE

Cuando una sección compuesta consta de partes cuyos ejes centroidales no coinciden con el eje centroidal de la sección completa, el proceso simple de sumar los valores de  $I$  de las partes *no se puede* usar. Se tiene que aplicar el *teorema de la transferencia del eje*.

El momento de inercia de una forma con respecto a un cierto eje es igual a la suma del momento de inercia de la forma con respecto a su propio eje centroidal más una cantidad denominada **término de transferencia** que se calcula con  $Ad^2$ , en donde  $A$  es el área de la forma y  $d$  es la distancia del centroide de la forma al eje de interés.

Este teorema se puede aplicar para calcular el momento de inercia total de una forma compuesta general, siguiendo el procedimiento siguiente. En este caso, el eje de interés es el eje centroidal de la forma compuesta que se debe localizar con el método propuesto en la sección 7-3.

**Procedimiento general para calcular el momento de inercia de una forma compuesta**

1. Divida la forma compuesta en formas simples que dispongan de fórmulas para calcular su momento de inercia con respecto a su propio eje centroidal. Identifique las partes como 1, 2, 3, etcétera.
2. Localice la distancia del centroide de cada componente a algún eje de referencia conveniente, por lo general, la base de la sección compuesta. Designe estas distancias como  $y_1, y_2, y_3$ , etcétera.
3. Localice el centroide de la sección compuesta utilizando el método propuesto en la sección 7-3. Designe la distancia del eje de referencia del paso 2 al centroide, como  $\bar{Y}$ .
4. Calcule el momento de inercia de cada parte con respecto a su propio eje centroidal y designe estos valores como  $I_1, I_2, I_3$ , etcétera.
5. Determine la distancia del centroide de la forma compuesta al centroide de cada parte y designe estos valores como  $d_1, d_2, d_3$ , etc. Observe que  $d_1 = \bar{Y} - y_1, d_2 = \bar{Y} - y_2, d_3 = \bar{Y} - y_3$ , etc. Use el valor absoluto de cada distancia.
6. Calcule el *término de transferencia* de cada parte con  $A_i d_i^2$  en donde  $A_i$  es el área de la parte y  $d_i$  es la distancia calculada en el paso 5.
7. Calcule el momento total de inercia de la sección compuesta con respecto a su eje centroidal con:

$$I_T = I_1 + A_1 d_1^2 + I_2 + A_2 d_2^2 + I_3 + A_3 d_3^2 + \dots \quad (7-5)$$

La ecuación (7-5) se conoce como el teorema de la transferencia del eje porque define cómo transferir el momento de inercia de un área de un eje a cualquier eje paralelo. Tal como se aplica aquí, los dos ejes son el eje centroidal de la parte componente y el eje centroidal de la sección compuesta. Para cada una de las partes de una sección compuesta, la suma  $I + Ad^2$  es la medida de su contribución al momento total de inercia.

La ejecución del *Procedimiento general para calcular el momento de inercia de una forma compuesta* se facilita con la preparación de una tabla que puede ser una am-



pliación de la utilizada en la sección 7-3 para localizar el centroide de un perfil. El diseño general de esta tabla se da a continuación.

Parte	$A_i$	$y_i$	$A_i y_i$	$I_i$	$d_i = \bar{Y} - y_i$	$A_i d_i^2$	$I_i + A_i d_i^2$
1							
2							
3							
$A_T = \Sigma A_i =$		$\Sigma (A_i y_i) =$		$I_T = \Sigma (I_i + A_i d_i^2) =$			
Distancia al centroide $= \bar{Y} = \frac{\Sigma (A_i y_i)}{A_T} =$							

En los ejemplos 7-5, 7-6 y 7-7 se demuestra el uso de la tabla y las indicaciones generales. La ventaja de usar este tipo de tabla se vuelve mayor conforme los componentes aumentan. Asimismo, el uso de un programa de hoja de cálculo para realizar los cálculos idóneos es muy conveniente.

**Ejemplo 7-5** Calcule el momento de inercia de la forma T expuesta en la figura 7-11 con respecto a su eje centroidal.

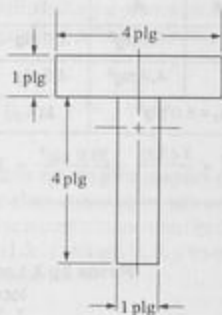


FIGURA 7-11 Perfil del ejemplo 7-5.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular el momento de inercia.
	<b>Datos</b>	Forma que ilustra la figura 7-11.
	<b>Análisis</b>	Se utiliza el <b>procedimiento general</b> presentado en esta sección. Como paso 1, divida la forma T en dos partes, como se muestra en la figura 7-12. La parte 1 es el vástago vertical y la 2 es el patín horizontal.

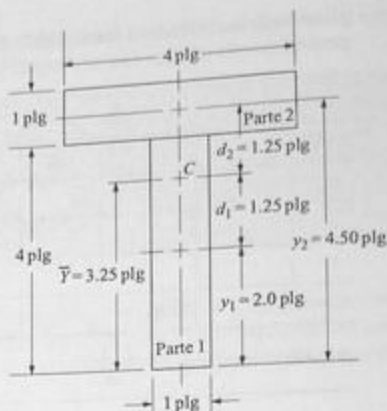


FIGURA 7-12 Datos utilizados en el ejemplo 7-5.

**Resultados** La tabla que se presenta a continuación resume el conjunto completo de datos necesarios para calcular el momento total de inercia con respecto al centroide de la forma T. Algunos de los datos aparecen también en la figura 7-12. Se comenta aquí sobre cómo se llegó a ciertos datos.

Parte	$A_i$	$y_i$	$A_i y_i$	$I_i$	$d_i$	$A_i d_i^2$	$I_i + A_i d_i^2$
1	$4.0 \text{ plg}^2$	$2.0 \text{ plg}$	$8.0 \text{ plg}^3$	$5.33 \text{ plg}^4$	$1.25 \text{ plg}$	$6.25 \text{ plg}^4$	$11.58 \text{ plg}^4$
2	$4.0 \text{ plg}^2$	$4.5 \text{ plg}$	$18.0 \text{ plg}^3$	$0.33 \text{ plg}^4$	$1.25 \text{ plg}$	$6.25 \text{ plg}^4$	$6.58 \text{ plg}^4$
$A_T = 8.0 \text{ plg}^2$		$\Sigma(A_i y_i) = 26.0 \text{ plg}^3$				$I_T = 18.16 \text{ plg}^4$	
$\bar{Y} = \frac{\Sigma(A_i y_i)}{A_T} = \frac{26.0 \text{ plg}^3}{8.00 \text{ plg}^2} = 3.25 \text{ plg}$							

**Pasos 2 y 3.** Las primeras tres columnas de la tabla contienen datos para localizar el centroide con la técnica mostrada en la sección 7-3. Las distancias se miden hacia arriba de la base del perfil T.  $\bar{Y} = 3.25 \text{ plg}$ .

**Paso 4.** Las dos partes son rectángulos simples. Por lo tanto, los valores de  $I$  son:

$$I_1 = bh^3/12 = (1.0)(4.0)^3/12 = 5.33 \text{ plg}^4$$

$$I_2 = bh^3/12 = (4.0)(1.0)^3/12 = 0.33 \text{ plg}^4$$

**Paso 5.** Distancia del centroide general al centroide de cada parte.

$$d_1 = \bar{Y} - y_1 = 3.25 \text{ plg} - 2.0 \text{ plg} = 1.25 \text{ plg}$$

$$d_2 = y_2 - \bar{Y} = 4.5 \text{ plg} - 3.25 \text{ plg} = 1.25 \text{ plg}$$

**Paso 6.** Término de transferencia de cada una de las partes:

$$A_1 d_1^2 = (4.0 \text{ plg}^2)(1.25 \text{ plg})^2 = 6.25 \text{ plg}^4$$

$$A_2 d_2^2 = (4.0 \text{ plg}^2)(1.25 \text{ plg})^2 = 6.25 \text{ plg}^4$$

Es mera coincidencia que los términos de transferencia de cada una de las partes sean iguales en este problema.

**Paso 7.** Momento total de inercia:

$$\begin{aligned} I_T &= I_1 + A_1 d_1^2 + I_2 + A_2 d_2^2 \\ &= 5.33 \text{ plg}^4 + 6.25 \text{ plg}^4 + 0.33 \text{ plg}^4 + 6.25 \text{ plg}^4 \\ &= 18.16 \text{ plg}^4 \end{aligned}$$

**Comentario** Nótese que los términos de transferencia contribuyen con casi 2/3 del valor total del momento de inercia.

## 7-7 DEFINICIÓN MATEMÁTICA DEL MOMENTO DE INERCIA

Según el planteamiento de la sección 7-4, el momento de inercia,  $I$ , se define como la suma de los productos que se obtienen al multiplicar cada elemento del área por el cuadrado de su distancia al eje de referencia. La fórmula matemática para el momento de inercia se desprende de esa definición y a continuación se da. Nótese que el proceso de sumar por toda el área se logra mediante integración.

$$I = \int y^2 dA \quad (7-4)$$

La figura 7-13 ilustra los términos de esta fórmula para el caso especial de un rectángulo, para el que se pretende calcular el momento de inercia con respecto a su eje centroidal. El elemento infinitesimal de área se muestra como una tira delgada paralela al eje centroidal donde su ancho es el ancho total del rectángulo,  $b$ , y su espesor es un valor infinitesimal,  $dy$ . Por lo tanto el área del elemento es:

$$dA = b \cdot dy$$

La distancia,  $y$ , es la distancia del eje centroidal al centroide del área elemental mostrada. La sustitución de estos valores en la ecuación (7-4) permite la derivación de la fórmula para el momento de inercia del rectángulo con respecto a su eje centroidal. Nótese que la integración por toda el área requiere que los límites de la integral vayan de  $-h/2$  a  $+h/2$ .

$$I = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 (b \cdot dy)$$

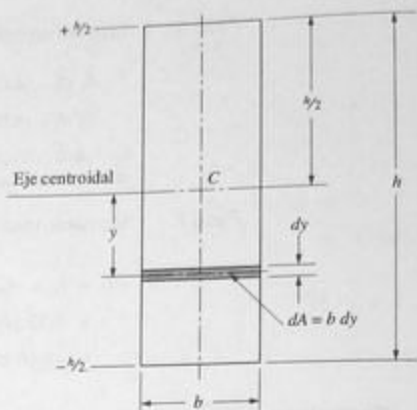


FIGURA 7-13 Datos utilizados en la derivación del momento de inercia de un rectángulo.

Como  $b$  es una constante, se puede sacar de la integral, como sigue:

$$I = b \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{+h/2}$$

Insertando los límites de la integral se obtiene:

$$I = b \left[ \frac{h^3}{24} - \frac{(-h)^3}{24} \right] = b \left[ \frac{2h^3}{24} \right] = \frac{bh^3}{12}$$

Ésta es la fórmula que dan las tablas. Se pueden usar procedimientos similares para desarrollar fórmulas para otras figuras.

## 7-8 SECCIONES COMPUESTAS HECHAS DE PERFILES COMERCIALMENTE DISPONIBLES

En la sección 1-16 se describieron perfiles estructurales de madera, acero y aluminio comercialmente disponibles. En las siguientes tablas de apéndices se dan propiedades de tamaños representativos de estos perfiles.

Apéndice A-4 para vigas de madera

Apéndice A-5 para ángulos estructurales de acero

Apéndice A-6 para canales estructurales de acero

Apéndice A-7 para perfiles estructurales de acero de patín ancho

Apéndice A-8 para vigas American Standard estructurales de acero

Apéndice A-9 para tubería estructural—cuadrada y rectangular

Apéndice A-10 para canales estándar de aluminio

Apéndice A-11 para vigas en I estándar de aluminio

Apéndice A-12 para tubo de acero estándar cédula 40

Además de ser excelentes para usarse como vigas, estos perfiles con frecuencia se combinan para formar perfiles compuestos especiales con propiedades mejoradas.

Cuando se utilizan por separado, las propiedades para diseñar se pueden leer directamente en las tablas de áreas, momentos de inercia y dimensiones pertinentes. Cuando se combinan para formar perfiles compuestos, se requiere el área y el momento de inercia de los perfiles componentes con respecto a sus propios ejes centroidales y estos datos se pueden leer en las tablas. Asimismo, las tablas dan la localización del centroide de perfiles a menudo requerido para las distancias necesarias para calcular el término de transferencia del eje,  $Ad^2$ , en el cálculo del momento de inercia. Los ejemplos siguientes ilustran estos procesos.

**Ejemplo 7-6**

Calcule el momento de inercia de la viga en I compuesta expuesta en la figura 7-14 con respecto a su eje centroidal. El perfil se formó soldando una placa de 0.50 plg de espesor por 6.00 plg de ancho a los patines superior e inferior para incrementar la rigidez de la viga en I de aluminio estándar.

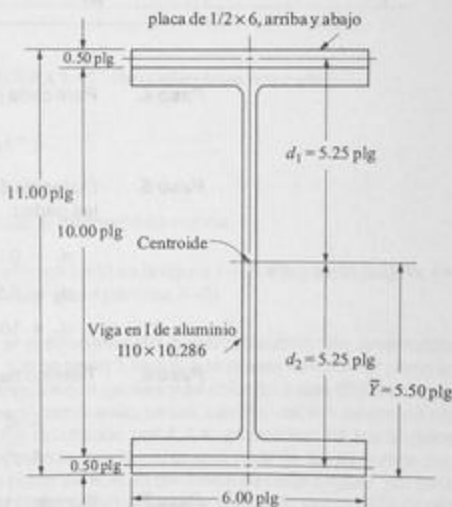


FIGURA 7-14 Datos aplicados en el ejemplo 7-6.

**Solución**    **Objetivo**    Calcular el momento de inercia.

**Datos**    El perfil expuesto en la figura 7-14. Para la viga en I 10 x 10.286:  $I = 155.79 \text{ pulg}^4$ ;  $A = 8.747 \text{ plg}^2$  (del Apéndice A-11)

**Análisis**

Use el **procedimiento general** descrito con anterioridad en este capítulo. Como **paso 1**, divida el perfil de la viga en tres partes. La parte 1 es la viga en I; la parte 2 es la placa inferior; la parte 3 es la placa superior. Como **pasos 2 y 3**, el centroide coincide con el centroide de la viga en I porque el perfil compuesto es simétrico. Por eso,  $\bar{Y} = 5.50$  plg, o la mitad de la altura total del perfil compuesto. No se requiere un cálculo aparte de  $\bar{Y}$ .

**Resultados**

La tabla siguiente resume el juego completo de datos utilizados en los pasos 4–7 para calcular el momento total de inercia con respecto al centroide de la viga en I. Algunos de los datos se muestran también en la figura 7–14. Se hacen comentarios aquí sobre cómo se obtuvieron ciertos datos.

Parte	$A_i$	$y_i$	$A_i y_i$	$I_i$	$d_i = \bar{Y} - y_i$	$A_i^2$	$I_i + A_i d_i^2$
1	8.747	5.50	—	155.79	0	0	155.79
2	3.00	0.25	—	0.063	5.25	82.69	82.75
3	3.00	10.75	—	0.063	5.25	82.69	82.75
$A_T = \Sigma A_i = 14.747$ plg <sup>2</sup>		$\Sigma(A_i y_i) =$		$I_T = \Sigma(I_i + A_i d_i^2) = 321.29$ plg <sup>4</sup>			
Distancia al centroide $= \bar{Y} = \frac{\Sigma(A_i y_i)}{A_T} = 5.50$ plg (por inspección)							

**Paso 4.** Para cada placa rectangular:

$$I_2 = I_3 = bh^3/12 = (6.0)(0.5)^3/12 = 0.063 \text{ plg}^4$$

**Paso 5.** Distancia del centroide general al centroide de cada una de las partes:

$$d_1 = 0.0 \text{ plg} \text{ debido a que los centroides coinciden}$$

$$d_2 = 5.50 - 0.25 = 5.25 \text{ plg}$$

$$d_3 = 10.75 - 5.50 = 5.25 \text{ plg}$$

**Paso 6.** Término de transferencia de cada una de las partes:

$$A_1 d_1^2 = 0.0 \text{ porque } d_1 = 0.0$$

$$A_2 d_2^2 = A_3 d_3^2 = (3.00)(5.25)^2 = 82.69 \text{ plg}^4$$

**Paso 7.** Momento total de inercia:

$$I_T = I_1 + I_2 + A_2 d_2^2 + I_3 + A_3 d_3^2$$

$$I_T = 155.79 + 0.063 + (3.0)(5.25)^2 + 0.063 + (3.0)(5.25)^2 = 321.29 \text{ plg}^4$$

**Comentario**

Nótese que las dos placas añadidas crean un momento de inercia cuyo valor es más del doble del de la viga en I original. Asimismo, casi todo el valor agregado se debe a los términos de transferencia y no al momento básico de inercia de las mismas placas.

**Ejemplo 7-7**

Calcule el momento de inercia de la viga en I expuesta en la figura 7-15 con respecto a su eje centroidal. El perfil se formó soldando a la misma cuatro ángulos de acero estándar L4 x 4 x 1/2 a una placa vertical de 1/2 x 16.

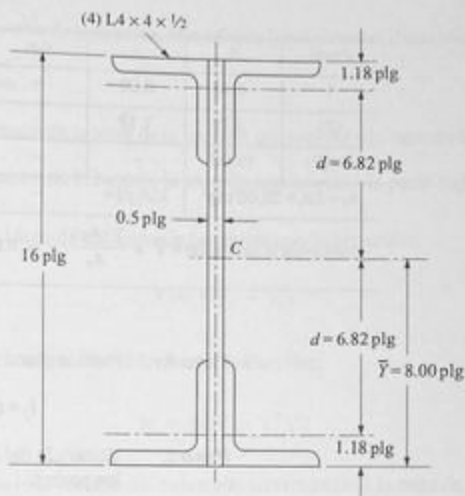


FIGURA 7-15 Datos aplicados en el ejemplo 7-7.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular el momento de inercia.
<b>Datos</b>		El perfil mostrado en la figura 7-15. Para cada ángulo: $I = 5.56 \text{ pulg}^4$ , $A = 3.75 \text{ pulg}^2$ (del Apéndice A-5)
<b>Análisis</b>		Use el <b>procedimiento general</b> descrito con anterioridad en esta sección. Como <b>paso 1</b> , la placa se puede considerar como la parte 1. Como los ángulos son iguales y se colocan a una distancia igual del centroide del perfil compuesto, se calculan los valores de uno de ellos y se multiplican los resultados por 4. La colocación de los ángulos hace que las caras planas queden al mismo nivel de los extremos superior e inferior de la placa vertical. El centroide de cada ángulo, por tanto, se localiza a 1.18 plg del extremo superior o inferior, debido a la localización del centroide de los ángulos en sí, tal como aparece en el apéndice A-5. Como <b>pasos 2 y 3</b> , el centroide coincide con el centroide de la viga en I porque el perfil compuesto es simétrico. Por tanto, $\bar{Y} = 8.00 \text{ plg}$ , o la mitad de la altura total del perfil compuesto. No se requiere un cálculo aparte de $\bar{Y}$ .
<b>Resultados</b>		La tabla que sigue resume el juego completo de datos utilizados en los pasos 4-7 para calcular el momento total de inercia con respecto al centroide del perfil de viga. Algunos de los datos aparecen también en la figura 7-15. Se hacen comentarios aquí sobre la manera en que se obtuvieron ciertos datos. La segunda fila de la tabla que aparece en cursi-

vas, da datos de un ángulo sólo como referencia. La fila 3 da los datos de los cuatro ángulos. Por tanto, los resultados finales se determinan sumando las filas 1 y 3.

Parte	$A_i$	$y_i$	$Ay_i$	$I_i$	$d_i = \bar{Y} - y_i$	$A_i^2$	$I_i + A_i d_i^2$
1	8.00	8.00	-	170.67	0	0	170.67
(2)	3.75	1.18	-	5.56	6.82	174.42	179.98
4 × (2)	15.00	-	-	22.24	-	697.68	719.93
$A_T = \Sigma A_i = 23.00 \text{ plg}^2$			$\Sigma(A_i y_i) =$	-	$I_T = \Sigma(I_i + A_i d_i^2) = 890.60 \text{ plg}^4$		
Distancia al centroide = $\bar{Y} = \frac{\Sigma(A_i y_i)}{A_T} = 8.00 \text{ plg}$ (por inspección)							

**Paso 4.** Para la placa rectangular vertical:

$$I_2 = bh^3/12 = (0.5)(16)^3/12 = 170.67 \text{ plg}^4$$

**Paso 5.** Distancia del centroide general al centroide de cada una de las partes:

$$d_1 = 0.0 \text{ plg} \quad \text{debido a que los centroides coinciden}$$

$$d_2 = 8.00 - 1.18 = 6.82 \text{ plg}$$

**Paso 6.** Término de transferencia de cada una de las partes:

$$A_1 d_1^2 = 0.0 \text{ porque } d_1 = 0.0$$

$$A_2 d_2^2 = A_3 d_3^2 = (3.75)(6.82)^2 = 174.42 \text{ plg}^4$$

**Paso 7.** Momento total de inercia:

$$I_T = 170.67 + 4[5.56 + 3.75(6.82)^2]$$

$$= 170.67 + 719.93 = 890.60 \text{ plg}^4$$

**Comentario** Los cuatro ángulos contribuyen con casi el 80% del valor total del momento de inercia.

## 7-9 MOMENTO DE INERCIA DE PERFILES CUYAS PARTES SON TODAS RECTANGULARES

A continuación se describe un método para calcular el momento de inercia de perfiles especiales que pueden dividirse en partes, las cuales son rectángulos con sus lados perpendiculares y paralelos al eje de interés. Un ejemplo sería la figura en T que se analizó en el ejemplo 7-5 y mostrado en la figura 7-11. El método es un poco más simple que el método descrito en la sección 7-6, donde se usó el teorema de la transferencia del eje, aunque ambos métodos se basan en los mismos principios fundamentales.



El método incluye los pasos siguientes:

1. Divida la sección compuesta en un número conveniente de partes de tal modo que cada una sea un rectángulo con sus lados perpendiculares y paralelos al eje horizontal.
2. Para cada una de las partes, identifique las siguientes dimensiones:

$$b = \text{ancho}$$

$$y_1 = \text{distancia de la base de la sección compuesta a la base de la parte}$$

$$y_2 = \text{distancia de la base de la sección compuesta a la parte superior de la parte}$$

3. Calcule el área de cada una de las partes con la ecuación:

$$A = b(y_2 - y_1)$$

4. Calcule el momento del área con la ecuación:

$$M = b(y_2^2 - y_1^2)/2$$

5. Calcule la localización del centroide con respecto a la base de la sección compuesta con:

$$\bar{Y} = M/A$$

6. Calcule el momento de inercia con respecto a la base de la sección compuesta con:

$$I_b = b(y_2^3 - y_1^3)/3$$

7. Calcule el momento de inercia con respecto al centroide de la sección compuesta con:

$$I_c = I_b - A_T \bar{Y}^2$$

en donde  $A_T$  = área total = suma de las áreas de todas las partes.

Este proceso se presta muy bien para su cálculo automático con una calculadora programable, un programa de cómputo o una hoja de cálculo. Como ilustración, la figura 7-16 muestra el cálculo por medio de una hoja de cálculo del momento centroidal de inercia del perfil T que ilustra la figura 7-11, cuyo cálculo de su momento de inercia se hizo en el ejemplo 7-5 con el teorema de la transferencia del eje. Los resultados son, por supuesto, idénticos. Véase también la figura 7-17 que muestra los datos.

Nótese que hay líneas en blanco en la hoja de cálculo porque se dejó espacio hasta para seis partes de la sección compuesta mientras que ésta tiene sólo dos. La hoja de cálculo se podría expandir para incluir cualquier número de partes.

Momento de inercia de un perfil con todas sus partes rectangulares  
 Para cada parte:  $b$  = ancho;  $y_1$  = distancia a la base de la parte;  $y_2$  = distancia a la parte superior de la parte

	Dimensiones			Área, $A$	Momento, $M$	$I$ con respecto a la base, $I_b$
	$b$	$y_1$	$y_2$	$b(y_2 - y_1)$	$b(y_2^2 - y_1^2)/2$	$b(y_2^3 - y_1^3)/3$
Unidades:	plg	plg	plg	plg <sup>2</sup>	plg <sup>3</sup>	plg <sup>4</sup>
Parte 1	1.000	0.000	4.000	4.000	8.000	21.333
Parte 2	4.000	4.000	5.000	4.000	18.000	81.333
Parte 3				0.000	0.000	0.000
Parte 4				0.000	0.000	0.000
Parte 5				0.000	0.000	0.000
Parte 6				0.000	0.000	0.000
<b>TOTALES:</b>				<b>8.000</b>	<b>26.000</b>	<b>102.667</b>

Distancia de la base al centroide =  $\bar{Y}$ :  
 $Y = M/A = 3.25 \text{ plg}$

Momento de inercia con respecto al centroide =  $I_c$ :  
 $I_c = I_b - A_r \bar{Y}^2 = 18.167 \text{ plg}^4$

FIGURA 7-16 Solución del ejemplo 7-5 utilizando una hoja de cálculo y el procedimiento de solución para el momento de inercia expuesto en la sección 7-9.

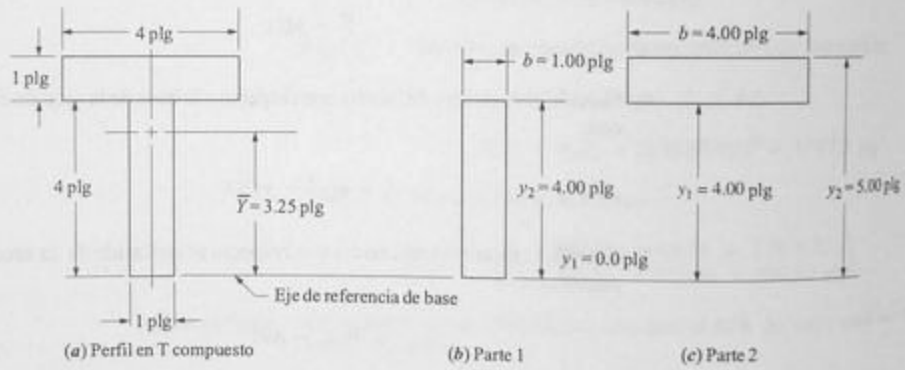


FIGURA 7-17 Perfil T que ilustra el método para calcular momentos de inercia descrito en la sección 7-9.

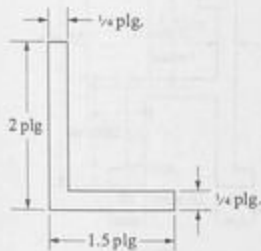
BIBLIOGRAFÍA

- American Institute of Steel Construction, *Manual of Steel Construction*, 9th ed., Chicago, IL, 1989.
- Oberg, Erik, et al., *Machinery's Handbook*, 24th ed., Industrial Press, New York, 1992.

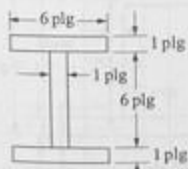
## PROBLEMAS

Para cada uno de los perfiles expuestos en las figuras de la P7-1 a la P7-40, determine la ubicación de su eje centroidal horizontal y la magnitud de su momento de inercia con respecto al eje usando el teorema de la transferencia del eje descrito en la sección 7-6. Las figuras de la P7-1 a la P7-20 son perfiles especiales que se podrían fabricar por extrusión de plástico o aluminio, maquinando una barra maciza o soldando componentes distintos. Las figuras de la P7-21 a la P7-24 son perfiles de viga compuestos que se pueden fabricar sujetando perfiles de madera estándar entre sí por medio de clavos, tornillos o pegamento. Las figuras de la P7-25 a la P7-40 son secciones de vigas compuestas fabricadas con perfiles estructurales estándar de aluminio o acero.

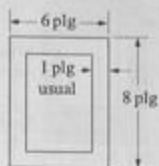
Se puede aplicar el método descrito en la sección 7-9 para calcular el momento de inercia de los perfiles compuestos de dos o más partes rectangulares cuyos lados sean perpendiculares y paralelos al eje horizontal. Se incluyen los perfiles expuestos en las figuras de la P7-1 a la P7-15 y los perfiles compuestos hechos de perfiles de madera estándar que se ilustran en las figuras de la P7-21 a la P7-24.



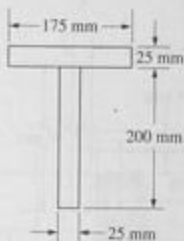
P7-1



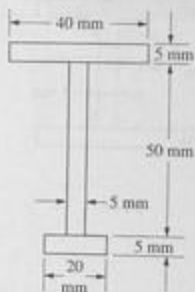
P7-2



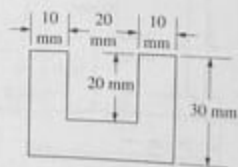
P7-3



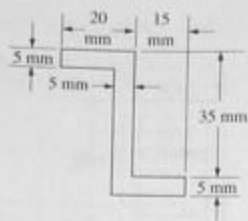
P7-4



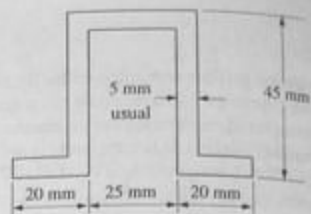
P7-5



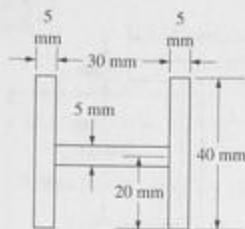
P7-6



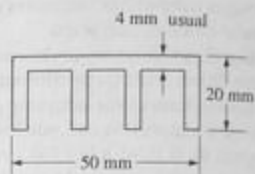
P7-7



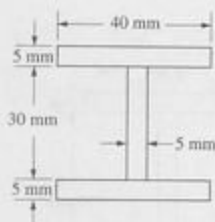
P7-11



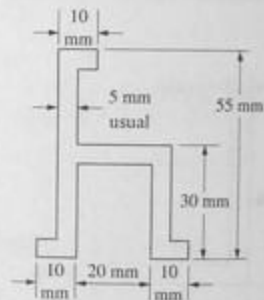
P7-8



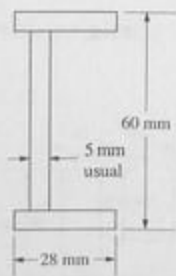
P7-12



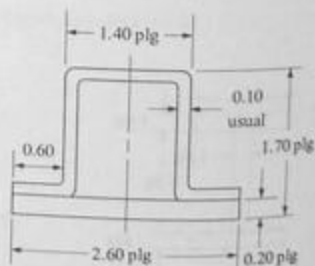
P7-9



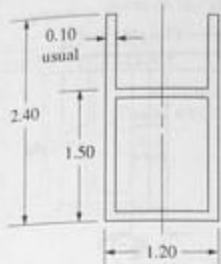
P7-13



P7-10

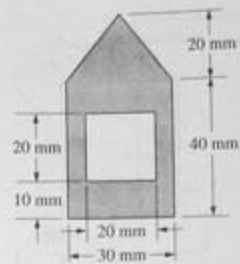


P7-14

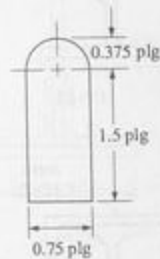


Dimensiones en pulgadas

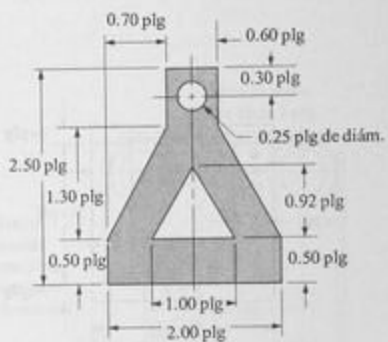
P7-15



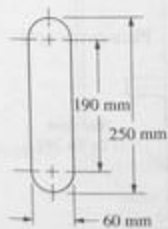
P7-18



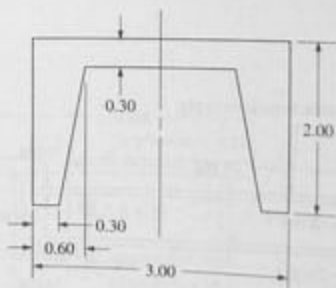
P7-16



P7-19

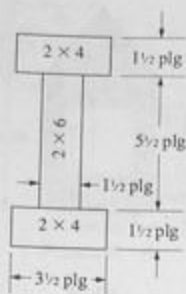


P7-17

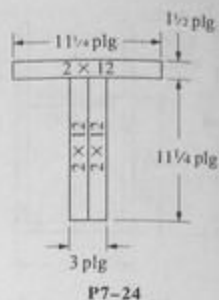


Dimensiones en pulgadas

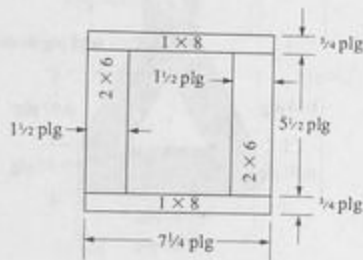
P7-20



P7-21

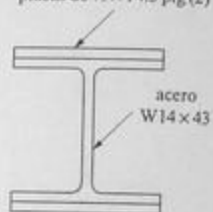


P7-24



P7-22

placas de  $\frac{1}{2} \times 14,5$  plg (2)

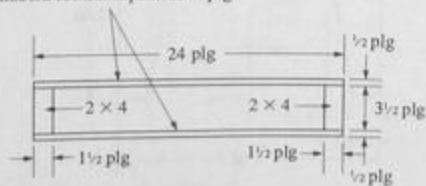


P7-25



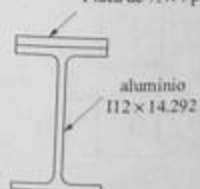
P7-26

madera contrachapada de  $\frac{1}{2}$  plg

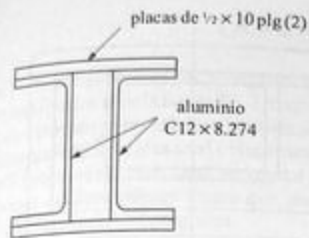


P7-23

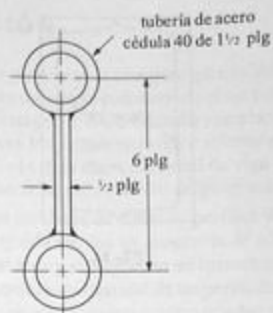
Placa de  $\frac{1}{2} \times 7$  plg



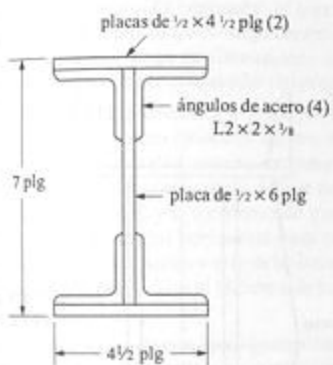
P7-27



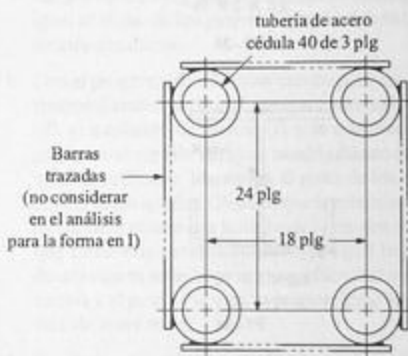
P7-28



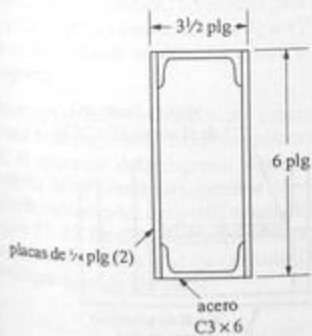
P7-31



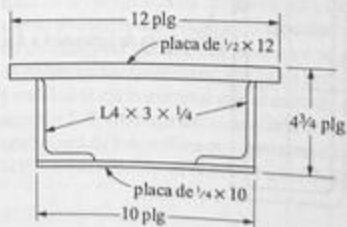
P7-29



P7-32



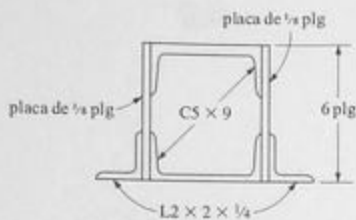
P7-30



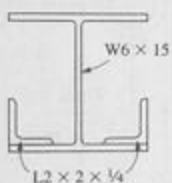
P7-33



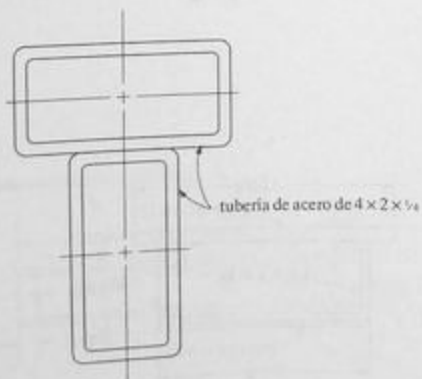
P7-34



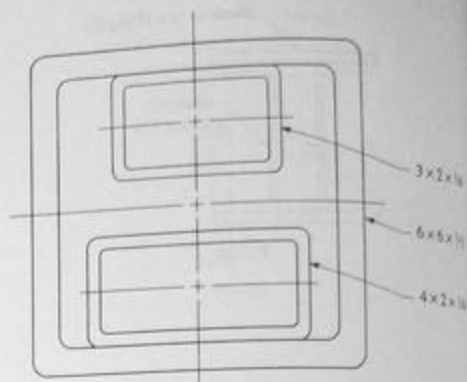
P7-35



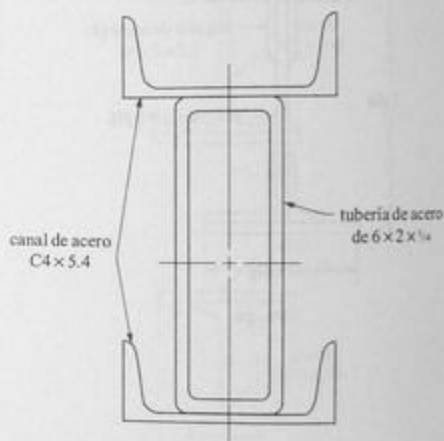
P7-36



P7-37



P7-38



P7-39



P7-40



## TAREAS DE COMPUTACIÓN

1. Para un perfil en I generalizado cuyos patines superior e inferior son iguales al de la figura P7-2, escriba un programa de cómputo para calcular la ubicación del eje centroidal horizontal, el área total y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal para cualquier juego de dimensiones reales que pueda luego introducir el operador del programa.
2. Para el perfil T generalizado, similar al de la figura P7-4, escriba un programa de cómputo para calcular la ubicación del eje centroidal horizontal, el área total y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal para cualquier juego de dimensiones reales que pueda introducir el operador del programa.
3. Para el perfil en I generalizado y similar al de la figura P7-5, escriba un programa de cómputo para calcular la ubicación del eje centroidal horizontal, el área total y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal para cualquier juego de dimensiones reales que deben ser introducidas por el operador del programa.
4. Para cualquier perfil generalizado y que se pueda subdividir en un cierto número de componentes rectangulares con ejes horizontales, escriba un programa de cómputo para calcular la ubicación del eje centroidal horizontal, el área total y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal para cualquier juego de dimensiones reales y que debe introducir el operador del programa. Use el teorema de la transferencia del eje.
5. Para el perfil en forma de sombrero generalizado similar al de la figura P7-11, escriba un programa de cómputo para calcular la ubicación del eje centroidal horizontal, el área total y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal para cualquier juego de dimensiones reales con el fin de que los introduzca el operador del programa.
6. Dado un juego de tablonces de madera de dimensiones estándar, calcule el área y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal para el perfil tubular generalizado y similar al de la figura P7-22. Los datos de los tablonces los debe introducir el operador del programa.
7. Construya un archivo de datos que contenga las dimensiones de un juego de tablonces de madera estándar. Luego, el operador del programa debe seleccionar las medidas de los miembros superior e inferior y de los dos miembros verticales del perfil tubular expuestos en la figura P7-22. En seguida, calcule el área y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal del perfil que habrá de diseñarse.
8. Escriba un programa de cómputo para calcular el área y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal de un perfil W o S estándar con placas idénticas conectadas a los patines superior e inferior similar al de la figura 7-14. Los datos del perfil de viga y las placas las debe introducir el operador del programa.
9. Construya una base de datos de perfiles W o S estándar. En seguida escriba un programa de cómputo para calcular el área y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal de un perfil de viga seleccionado con placas idénticas conectadas a los patines superior e inferior, como se muestra en la figura 7-14. Los datos de las placas debe introducirlos el operador del programa.
10. Al dársele un perfil W o S estándar y sus propiedades, escriba un programa de cómputo para calcular el espesor requerido de las placas que deben conectarse a los patines superior e inferior para crear un momento de inercia especificado de la sección compuesta que se muestra en la figura 7-14. Haga que el ancho de las placas sea igual al ancho de los patines. Calcule el área total de la sección resultante.
11. Con el programa de cómputo escrito para la tarea 1 correspondiente al perfil en I generalizado, analice el área ( $A$ ), el momento de inercia ( $I$ ) y la relación de  $I$  a  $A$ , conforme el espesor del alma cambia dentro de un intervalo especificado. Mantenga el resto de las dimensiones del perfil iguales. Observe que la relación de  $I$  a  $A$  es de hecho la misma que la razón de la rigidez de una viga que tiene este perfil a su peso, porque la deflexión de una viga es inversamente proporcional al momento de inercia y el peso de la viga es proporcional al área de su sección transversal.
12. Repita la tarea 11 pero cambie la altura de la sección al tiempo que todas las demás dimensiones permanecen iguales.
13. Repita la tarea 11 pero varíe el espesor del patín mientras todas las demás dimensiones permanecen iguales.
14. Repita la tarea 11 pero varíe el ancho del patín mientras que todas las demás dimensiones permanecen iguales.
15. Escriba un programa de cómputo para calcular el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal de cualquier perfil compuesto que se pueda dividir en partes rectangulares con sus lados perpendiculares y paralelos al eje horizontal con el método descrito en la sección 7-9. Obenga datos de salida del programa para cualquiera de los perfiles que aparecen en las figuras de la P7-1 a la P7-15 y de la P7-21 a la P7-24.



# 8

## Esfuerzo causado por flexión

### 8-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En el capítulo 6 las vigas se definieron como miembros en los que actúan cargas perpendiculares a su eje mayor. Se presentaron métodos para determinar el momento flexionante en cualquier punto de una viga. El momento flexionante, que actúa en el interior de una viga, hace que ésta se flexione y desarrolle esfuerzos en sus fibras. La magnitud de los esfuerzos así desarrollados depende del momento de inercia de la sección transversal, calculado con los métodos expuestos en el capítulo 7.

Este capítulo utiliza la información de los capítulos precedentes para calcular el *esfuerzo causado por flexión* en vigas. Los objetivos específicos son:

1. Aprender el enunciado de la *fórmula de flexión* y aplicarla debidamente en el cálculo del esfuerzo máximo causado por flexión en las fibras externas de una viga.
2. Poder calcular el esfuerzo en cualquier punto de la sección transversal de una viga y describir la variación del esfuerzo con la posición en la misma.
3. Entender las condiciones para el uso de la fórmula de flexión.
4. Reconocer que es necesario garantizar que la viga no se flexione bajo la influencia de las cargas flexionantes.
5. Definir el *eje neutro* y entender que coincide con el eje centroidal de la sección transversal de una viga.

6. Entender la derivación de la fórmula de flexión y la importancia del momento de inercia en relación con el esfuerzo flexionante.
7. Determinar el esfuerzo de diseño apropiado a usarse en el diseño de vigas.
8. Diseñar vigas que soporten con seguridad una cierta carga.
9. Definir el *módulo de sección* de la sección transversal de una viga.
10. Seleccionar perfiles estructurales estándar que van a usarse como vigas.
11. Reconocer cuándo es preciso utilizar factores de concentración de esfuerzo en el análisis de esfuerzo causado por flexión y aplicar debidamente los factores adecuados.
12. Definir el *centro de flexión* y describir su uso apropiado en el análisis de esfuerzo causado por flexión.

## 8-2 FÓRMULA DE FLEXIÓN

Las vigas han de diseñarse para que sean seguras. Cuando se aplican cargas perpendiculares al eje mayor de una viga, se producen momentos flexionantes en su interior, que hacen que se flexione. Si se observa una viga esbelta, la forma característicamente curva mostrada en la figura 8-1 es evidente. Las fibras de la viga próximas a su cara superior se acortan y se ven sometidas a compresión. Por otra parte, las fibras próximas a la cara inferior se alargan y se ven sometidas a tensión.

De la viga de la figura 8-1 se toma un segmento corto y en la figura 8-2 se ilustra el cambio de forma que sufriría por la influencia de los momentos flexionantes internos. En la parte (a) el segmento tiene su forma recta original cuando no está sometido a carga. La

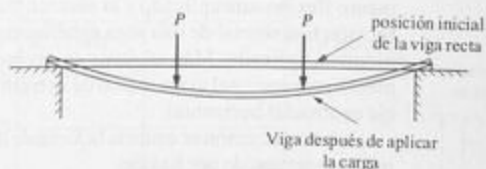


FIGURA 8-1 Ejemplo de una viga.

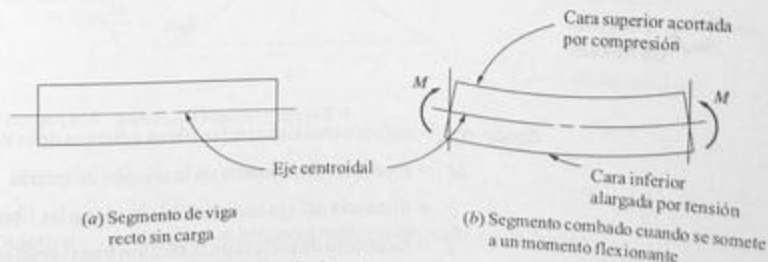


FIGURA 8-2 Influencia del momento flexionante en un segmento de viga.

parte (b) muestra el mismo segmento deformado por la aplicación del momento flexionante. Las líneas que inicialmente eran rectas se curvaron. Los extremos del segmento, inicialmente rectos y verticales, ahora están inclinados por haber girado con respecto al eje centroidal de la sección transversal de la viga. El resultado es que el material a lo largo de la cara superior se somete a compresión y, por consiguiente, se acorta. Por otra parte, el material a lo largo de la cara inferior se somete a tensión y se alarga.

De hecho, todo el material arriba del eje centroidal está sometido a compresión. No obstante el acortamiento máximo (deformación unitaria por compresión) ocurre en la cara superior. Como el esfuerzo es proporcional a la deformación unitaria, entonces se deduce que el esfuerzo máximo de compresión ocurre en la cara superior. Asimismo, todo el material bajo el eje centroidal está sometido a tensión. Pero el alargamiento máximo (deformación unitaria por tensión) ocurre en la cara inferior y produce el esfuerzo máximo de tensión.


También se puede concluir que, si la parte superior de la viga está a compresión y la inferior a tensión, entonces debe haber un lugar en la viga donde no haya ninguna deformación. Ese lugar se llama *eje neutro* y más adelante se demostrará que coincide con el *eje centroidal* de la viga. En suma, se concluye que:

*En una viga sometida a momento flexionante del tipo mostrado en la figura 8-2, el material sobre el eje centroidal estará a compresión con el esfuerzo de compresión máximo en la cara superior. El material bajo el eje centroidal estará a tensión con el esfuerzo de tensión máximo en la cara inferior. A lo largo del mismo eje centroidal, la deformación y el esfuerzo son cero debido a la flexión. A esto se le llama eje neutro.*

En el diseño o análisis de vigas, lo que se pretende por lo general es determinar los esfuerzos máximos de tensión y compresión. Del planteamiento anterior se deduce que estos esfuerzos máximos dependen de la distancia del eje neutro (eje centroidal) a las caras superior e inferior. Esa distancia se designará,  $c$ .

El esfuerzo causado por flexión también es proporcional a la magnitud del momento flexionante aplicado a la sección de interés. La forma y las dimensiones de la sección transversal de una viga establecen su capacidad de soportar el momento flexionante aplicado. Más adelante se probará que el esfuerzo flexionante es inversamente proporcional al momento de inercia de la sección transversal con respecto a su eje centroidal horizontal.

A continuación se enuncia la *fórmula de flexión* que se usa para calcular el esfuerzo máximo producido por flexión.

 **Fórmula de flexión**

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} \quad (8-1)$$

donde  $\sigma_{\max}$  = esfuerzo máximo en las fibras externas de la viga

$M$  = momento flexionante en la sección de interés

$c$  = distancia del eje centroidal de la viga a las fibras externas

$I$  = momento de inercia de la sección transversal con respecto a su eje centroidal

Para aplicar la ecuación (8-1) por lo general se llevan a cabo los pasos siguientes.

Instrucciones para aplicar la fórmula de flexión

1. Determine el momento flexionante máximo en la viga trazando los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.
2. Localice el centroide de la sección transversal de la viga.
3. Calcule el momento de inercia de la sección transversal con respecto a su eje centroidal.
4. Calcule la distancia  $c$  del eje centroidal a la cara superior o inferior de la viga, la que sea mayor.
5. Calcule el esfuerzo con la fórmula de flexión:

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I}$$

La fórmula de flexión se analiza más a fondo más adelante. El ejemplo siguiente ilustra la aplicación de la fórmula.

**Ejemplo 8-1** Para la viga mostrada en la figura 8-3, calcule el esfuerzo máximo causado por flexión. La sección transversal de la viga es un rectángulo de 100 mm de alto  $\times$  25 mm de ancho. La carga a la mitad de la viga es de 1500 N, y ésta mide 3.40 m.

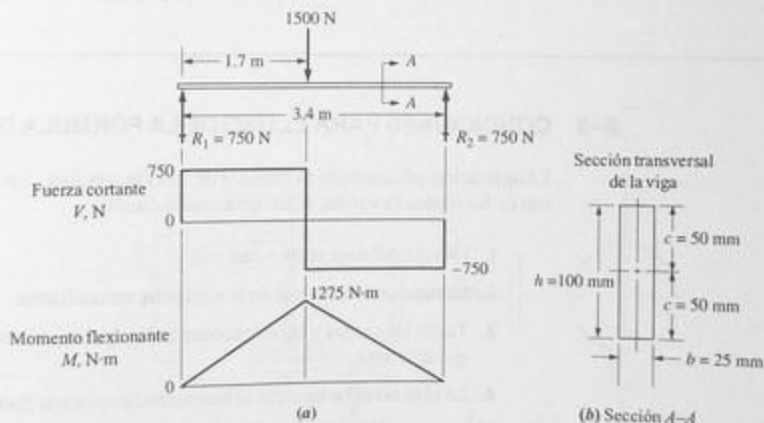


FIGURA 8-3 Datos de la viga del ejemplo 8-1.

**Solución** **Objetivo** Calcular el esfuerzo máximo causado por la flexión.  
**Datos** La viga y la carga mostradas en la figura 8-3.

**Análisis** Se seguirán las instrucciones definidas en esta sección.

- Resultados**
- Paso 1.** Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante ya dibujados se incluyen en la figura 8-3. El momento flexionante máximo de 1275 N·m actúa a la mitad de la viga.
- Paso 2.** El centroide de la sección transversal rectangular se localiza en la intersección de los dos ejes de simetría, a 50 mm de la cara superior o inferior de la viga.
- Paso 3.** El momento de inercia del perfil rectangular con respecto al eje centroidal es:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{25(100)^3}{12} = 2.08 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

- Paso 4.** La distancia  $c = 50$  mm del eje centroidal a la cara superior o inferior.
- Paso 5.** El esfuerzo máximo inducido por flexión ocurre en la cara superior o inferior de la viga en el punto donde ocurre el momento flexionante máximo. Al aplicar la ecuación (8-1) se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{Mc}{I} = \frac{(1275 \text{ N}\cdot\text{m})(50 \text{ mm})}{2.08 \times 10^8 \text{ mm}^4} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} \\ &= 30.6 \text{ N/mm}^2 = 30.6 \text{ MPa}\end{aligned}$$

### 8-3 CONDICIONES PARA EL USO DE LA FÓRMULA DE FLEXIÓN

La aplicación adecuada de la fórmula de flexión requiere que se entiendan las condiciones en las cuales es válida, descritas a continuación:

1. La viga debe ser recta o casi recta.
2. La sección transversal de la viga debe ser uniforme.
3. Todas las cargas y las reacciones en los apoyos deben actuar perpendiculares al eje de la viga.
4. La viga no debe torcerse al momento de aplicarle las cargas.
5. La viga debe ser relativamente larga y angosta con respecto a su peralte.
6. El material del que esté hecha la viga debe ser homogéneo y su módulo de elasticidad debe ser igual a tensión y a compresión.
7. El esfuerzo producido por la carga no debe exceder el límite proporcional del material.
8. Ninguna parte de la viga puede fallar por inestabilidad, es decir, por pandeo o falla de las secciones esbeltas.

Si bien la lista de condiciones parece larga, la fórmula sigue siendo válida para una amplia variedad de casos reales. Las vigas que violan algunas de las condiciones se analizan con una fórmula modificada o con un método de esfuerzo combinado. Por ejemplo, en el caso de la condición 2, un cambio en la sección transversal provocará concentraciones de esfuerzo que se manejan como se describe en la sección 8-9. Los esfuerzos flexionante y axial o los esfuerzos flexionante y torsional combinados que se producen por violar la condición 3 se estudian en el capítulo 11. Si se violan las demás condiciones, se requieren análisis especiales, los cuales no se abordan en este libro.

La condición 4 es importante, y se debe prestar atención al perfil de la sección transversal para tener la seguridad de que no ocurre torsión. En general, si la viga tiene un eje vertical de simetría y si las cargas se aplican a través de dicho eje, no habrá torsión. La figura 8-4 muestra algunos perfiles representativos usados para vigas que satisfacen la condición 4. Por otra parte, la figura 8-5 muestra varios que no lo hacen; en cada uno de estos casos, la viga tendería a torcerse lo mismo que a flexionarse conforme se aplica la carga, tal y como se muestra. Desde luego, estas secciones pueden soportar algo de carga, pero la condición de esfuerzo real en ellas es diferente del que se pronosticaría con la fórmula de flexión. En la sección 8-10 estos tipos de vigas se estudian más a fondo.

La condición 8 es importante porque los miembros largos esbeltos y, en ocasiones, las secciones esbeltas de los miembros tienden a pandearse a niveles de esfuerzo muy por debajo de la resistencia a la cedencia del material. Este tipo de falla se llama *inestabilidad* y se debe evitar. Con frecuencia, se agregan sujetadores cruzados o rigizadores locales a las vigas para contrarrestar el problema de inestabilidad. Un ejemplo se puede ver en la construcción de pisos con viguetas de madera de muchas casas y edificios comerciales. La viguetas de madera relativamente esbeltas se sujetan cerca de su punto medio para que no se pandeen.

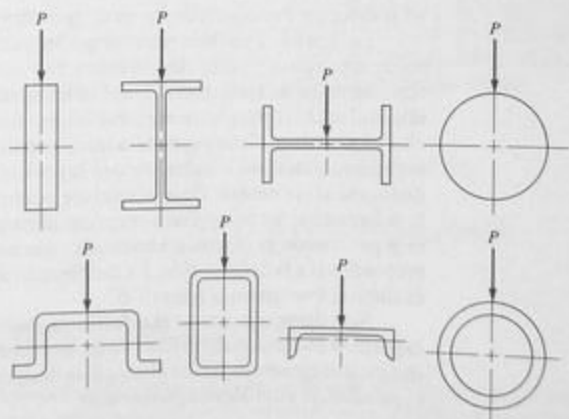


FIGURA 8-4 Ejemplo de perfiles de vigas con cargas que actúan a través de un eje de simetría.

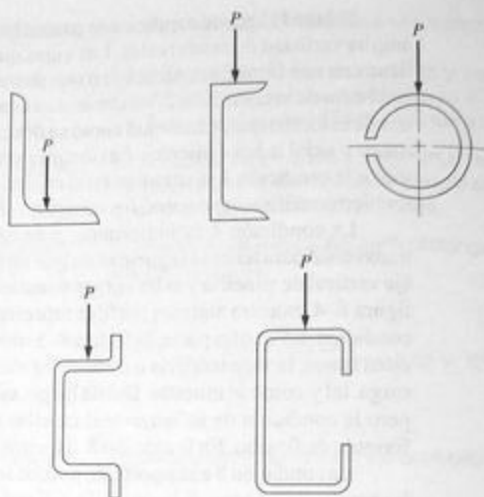


FIGURA 8-5 Ejemplo de perfiles de vigas con cargas que no actúan a través de un eje de simetría y que producen torsión de la viga.

#### 8-4 DISTRIBUCIÓN DEL ESFUERZO EN LA SECCIÓN TRANSVERSAL DE UNA VIGA

Recórrase de nuevo a la figura 8-2 que muestra cómo se deforma un segmento de viga por la influencia de un momento flexionante. El segmento asume la forma "flexionada" característica al acortarse las fibras superiores y al alargarse las fibras inferiores. El eje neutro que coincide con el eje neutro de la sección transversal de la viga, se flexiona pero no se deforma. Por consiguiente, en el eje neutro el esfuerzo causado por flexión es cero.

La figura 8-2 también muestra que los extremos del segmento de viga que inicialmente eran rectos y verticales, se mantienen rectos. Pero cuando se aplica el momento flexionante giran. La distancia lineal de un punto localizado sobre la línea final vertical inicial al punto correspondiente sobre la línea final girada indica la cantidad de deformación producida en dicho punto de la sección transversal. Se infiere, por consiguiente, que la deformación varía linealmente con la posición en la sección transversal, es decir, la distancia al eje neutro. Después del eje neutro hacia la parte superior de la sección la deformación por compresión es mayor mientras que hacia la parte inferior la deformación por tensión es mayor. En materiales que satisfacen la ley de Hooke, el esfuerzo es proporcional a la deformación. La distribución de esfuerzo resultante, por consiguiente, es como se muestra en la figura 8-6.

Si se desea representar el esfuerzo en algún punto de la sección transversal, puede expresarse en función del esfuerzo máximo teniendo en cuenta su variación lineal con la distancia al eje neutro. Si esa distancia se designa  $y$ , se puede escribir una ecuación para el esfuerzo,  $\sigma$ , en cualquier punto como:

$$\sigma = \sigma_{\max} \frac{y}{c}$$

(8-2)



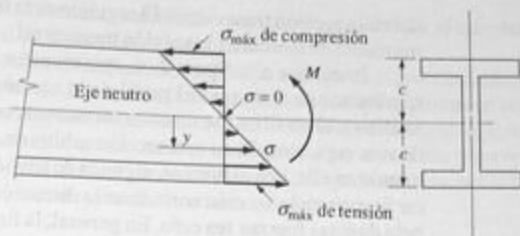


FIGURA 8-6 Distribución del esfuerzo en una sección simétrica.

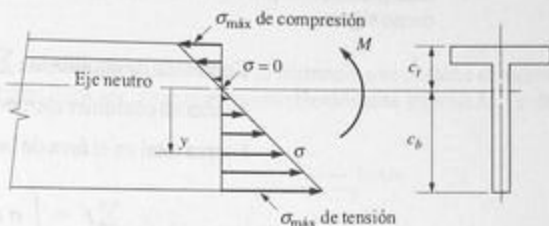


FIGURA 8-7 Distribución del esfuerzo en una sección no simétrica.

La forma general de la distribución del esfuerzo mostrada en la figura 8-6 podría ocurrir en cualquier sección de viga cuyo eje centroidal sea equidistante de las caras superior e inferior. En tales casos, el esfuerzo de compresión máximo sería igual al esfuerzo de tensión máximo.

Si el eje centroidal de la sección no está a la misma distancia de las caras superior e inferior, la distribución del esfuerzo sería la mostrada en la figura 8-7. Con todo, el esfuerzo en el eje neutro sería de cero. No obstante, el esfuerzo varía linealmente con la distancia al eje neutro. Ahora bien, el esfuerzo máximo en la cara inferior de la sección es mayor que aquél en la cara superior porque está más alejado del eje neutro. Con las distancias  $c_b$  y  $c_r$ , tal como se indican en la figura 8-7, los esfuerzos serían:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc_b}{I} \quad (\text{tensión en la cara inferior})$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc_r}{I} \quad (\text{compresión en la cara superior})$$

## 8-5 DERIVACIÓN DE LA FÓRMULA DE FLEXIÓN

Si se sigue el análisis utilizado para derivar la fórmula de flexión se puede comprender mejor el fundamento en que está basada. Aquí se emplean los principios de equilibrio estático para demostrar dos conceptos que se introdujeron al principio de este capítulo y que se enunciaron sin comprobación. Uno es que el *eje neutro* coincide con el *eje centroidal*.

dal de la sección transversal. El segundo es la fórmula de flexión en sí y el significado del momento de inercia de la sección transversal.

Recúrrase a la figura 8-6, que muestra la distribución del esfuerzo en la sección transversal de una viga. El perfil de la sección transversal carece de importancia en el análisis y el perfil en I se muestra meramente como ejemplo. La figura muestra una parte de una viga, cortada en una sección arbitraria, con un momento flexionante interno actuando en ella. Los esfuerzos, algunos de tensión y otros de compresión, tienden a producir fuerzas en la sección cortada en la dirección axial. El equilibrio requiere que la suma neta de estas fuerzas sea cero. En general, la fuerza es igual al esfuerzo por el área. Como el esfuerzo varía con la posición en la sección transversal, habrá que examinar la fuerza en cualquier área elemental infinitesimal y luego sumar las fuerzas que actúan en toda el área mediante el proceso de integración. Estos conceptos se demuestran analíticamente como sigue:

$$\text{Condición de equilibrio: } \sum F = 0$$

$$\text{Fuerza en cualquier elemento de área } dA = \sigma dA$$

$$\text{Fuerza total en el área de la sección transversal:}$$

$$\sum F = \int_A \sigma dA = 0 \quad (8-3)$$

A continuación se puede expresar el esfuerzo  $\sigma$  que actúa en cualquier punto en función del esfuerzo máximo con la ecuación (8-2):

$$\sigma = \sigma_{\max} \frac{y}{c}$$

en donde  $y$  es la distancia del eje neutro al punto donde el esfuerzo es igual a  $\sigma$ . Sustituyendo ésta en la ecuación (8-3) se obtiene:

$$\sum F = \int_A \sigma dA = \int_A \sigma_{\max} \frac{y}{c} dA = 0$$

Pero como  $\sigma_{\max}$  y  $c$  son constantes, se sacan de la integral.

$$\sum F = \frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A y dA = 0$$

Ni  $\sigma_{\max}$  ni  $c$  son cero, así que el otro factor  $\int_A y dA$ , debe ser cero. Pero por definición y como se ilustró en el capítulo 7:

$$\int_A y dA = \bar{Y}(A)$$

en donde  $\bar{Y}$  es la distancia al centroide del área medida a partir del eje de referencia  $y$ ,  $A$  el área total. De nuevo,  $A$  no puede ser cero, así que, por último, debe ser cierto que  $\bar{Y} = 0$ .

Como el eje de referencia es el eje neutro, esto demuestra que el eje neutro coincide con el eje centroidal de la sección transversal.

La derivación de la fórmula de flexión se basa en el principio de equilibrio, el cual requiere que la suma de momentos con respecto a cualquier punto sea cero. La figura 8-6 muestra que un momento flexionante  $M$  actúa en la sección cortada. Éste debe ser equilibrado por el momento neto creado por el esfuerzo en la sección transversal. Pero el momento es el producto de fuerza por la distancia del eje de referencia a la línea de acción de la fuerza. Tal como se expresó con anterioridad:

$$\sum F = \int_A \sigma dA = \int_A \sigma_{\max} \frac{y}{c} dA$$

Si la expresión anterior se multiplica por la distancia  $y$  se obtiene el momento resultante de la fuerza el cual debe ser igual al momento flexionante interno  $M$ . Es decir,

$$M = \sum F(y) = \int_A \underbrace{\sigma_{\max} \frac{y}{c}}_{\text{fuerza}} dA(y)$$

$\underbrace{\int_A}_{\text{área}} \underbrace{\frac{y}{c}}_{\text{brazo de momento}} dA(y)$   
 esfuerzo

Simplificando, se obtiene:

$$M = \frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A y^2 dA$$

Por definición y tal como se ilustró en el capítulo 7, el último término de esta ecuación es el momento de inercia  $I$  de la sección transversal con respecto a su eje centroidal.

$$I = \int_A y^2 dA$$

Entonces:

$$M = \frac{\sigma_{\max}}{c} I$$

La que si se resuelve para  $\sigma_{\max}$  da:

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I}$$

Ésta es la fórmula de flexión mostrada anteriormente como la ecuación (8-1).

**Ejemplo 8-2** La sección T mostrada en la figura 8-8 es de una viga simplemente apoyada que soporta un momento flexionante de 100 000 lb·plg producido por una carga que actúa en la cara superior. En el ejemplo 7-5 se analizó esta sección y se encontró que  $I = 18.16 \text{ plg}^4$ . El

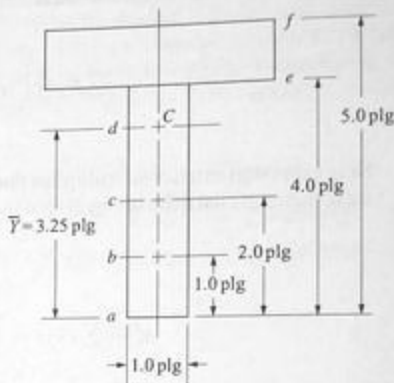


FIGURA 8-8 Sección T de la viga del ejemplo 8-2.

centroide de la sección está a 3.25 plg hacia arriba de la parte inferior de la viga. Calcule el esfuerzo producido por flexión en la viga en los ejes del a al f indicados en la figura. A continuación dibuje una gráfica de esfuerzo contra la posición en la sección transversal.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular el esfuerzo flexionante en los seis ejes a-f. Graficar el esfuerzo contra la posición en la sección transversal.
<b>Datos</b>		$M = 100\,000 \text{ lb} \cdot \text{plg}$ . La sección transversal en forma de T mostrada en la figura 8-8. $I = 18.16 \text{ plg}^4$ . $\bar{Y} = 3.25 \text{ plg}$ de la parte inferior de la viga.
<b>Análisis</b>		Se utilizará la ecuación (8-1) para calcular $\sigma_{\text{máx}}$ que ocurre en la parte inferior de la viga (eje a) porque por allí se localiza la fibra más externa de la viga, en el lugar más alejado del eje centroidal. En seguida se calculará el esfuerzo en los demás ejes con la ecuación (8-2). Véase la figura 8-9 donde se dan los valores de $y$ .
<b>Resultados</b>		<b>En el eje a.</b> En la ecuación (8-1), use $c = \bar{Y} = 3.25 \text{ plg}$ .

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_a = \frac{Mc}{I} = \frac{(100\,000 \text{ lb} \cdot \text{plg})(3.25 \text{ plg})}{18.16 \text{ plg}^4}$$

$$\sigma_a = 17\,900 \text{ lb/plg}^2 \quad (\text{tensión})$$

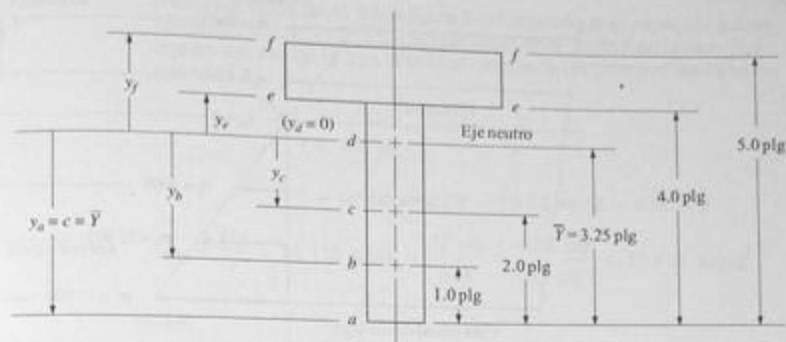


FIGURA 8-9 Datos para el ejemplo 8-2.

En el eje b.

$$\sigma_b = \sigma_{\max} \frac{y}{c} = \sigma_a \frac{y}{c}$$

$$y = 3.25 \text{ plg} - 1.0 \text{ plg} = 2.25 \text{ plg}$$

$$\sigma_b = 17\,900 \text{ lb/plg}^2 \times \frac{2.25}{3.25} = 12\,400 \text{ lb/plg}^2 \text{ (tensión)}$$

En el eje c.

$$y = 3.25 \text{ plg} - 2.0 \text{ plg} = 1.25 \text{ plg}$$

$$\sigma_c = 17\,900 \text{ lb/plg}^2 \times \frac{1.25}{3.25} = 6\,900 \text{ lb/plg}^2 \text{ (tensión)}$$

En el eje d. En el centroide  $y = 0$  y  $\sigma_d = 0$ .

En el eje e.

$$y = 4.0 \text{ plg} - 3.25 \text{ plg} = 0.75 \text{ plg}$$

$$\sigma_e = 17\,900 \text{ lb/plg}^2 \times \frac{0.75}{3.25} = 4\,100 \text{ lb/plg}^2 \text{ (compresión)}$$

En el eje f.

$$y = 5.0 \text{ plg} - 3.25 \text{ plg} = 1.75 \text{ plg}$$

$$\sigma_f = 17\,900 \text{ lb/plg}^2 \times \frac{1.75}{3.25} = 9\,600 \text{ lb/plg}^2 \text{ (compresión)}$$

En la figura 8-10 se muestra la gráfica de estos datos.

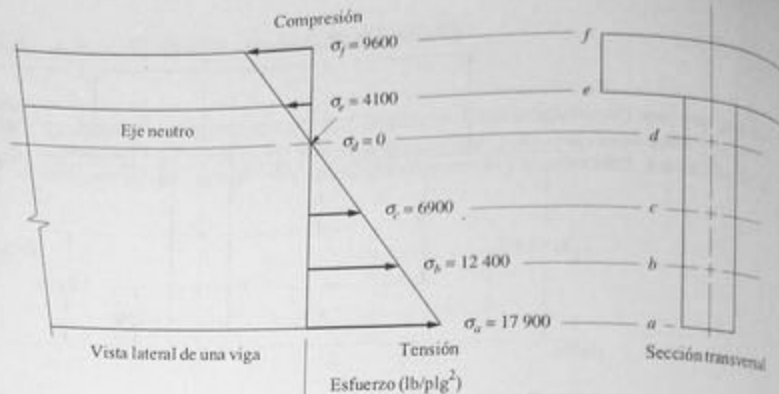


FIGURA 8-10 Distribución del esfuerzo en la sección T del ejemplo 8-2.

**Comentario** Nótese la variación lineal del esfuerzo con la distancia medida a partir del eje neutro, además de que los esfuerzos arriba del eje neutro son de compresión, mientras que aquellos abajo del eje son de tensión.

**Ejemplo 8-3** La figura 8-11 muestra el diagrama de momento flexionante de una viga de 25 pies de la estructura de una máquina de grandes dimensiones. Se propuso que la viga se fabricara con un perfil W14 x 43 de acero. Calcule el esfuerzo máximo provocado por flexión en la viga.

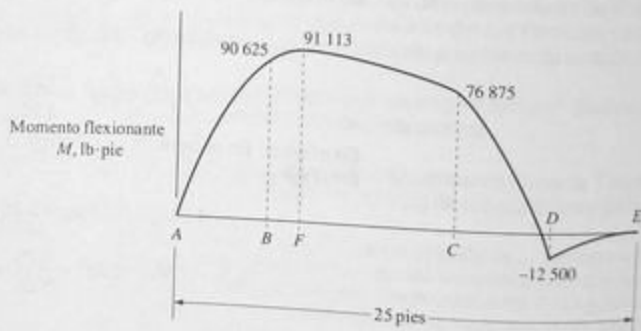


FIGURA 8-11 Diagrama de momento flexionante de la viga del ejemplo 8-3.

**Solución** **Objetivo** Calcular el esfuerzo máximo provocado por flexión.  
**Datos** El diagrama de momento flexionante mostrado en la figura 8-11. El perfil para viga W14 x 43.

**Análisis**

Use la ecuación (8-1). En la figura 8-11, identifique el momento flexionante máximo de 91 113 lb·pie que actúa en el punto *F* de la viga. Busque los valores de *I* y *c* en la tabla de propiedades para perfiles *W* en el apéndice A-7.

$$I = 428 \text{ plg}^4$$

$$c = \text{profundidad} / 2 = 13.66 \text{ plg} / 2 = 6.83 \text{ plg}$$

**Resultados**  $\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = 91\,113 \text{ lb}\cdot\text{pie} \times \frac{12 \text{ plg}}{\text{pies}} \times \frac{6.83 \text{ plg}}{428 \text{ plg}^4} = 17\,450 \text{ lb/plg}^2$

**Comentario** Este esfuerzo máximo ocurrirá como esfuerzo de tensión en la cara inferior de la viga y como esfuerzo de compresión en la cara superior en la posición *F*.

## 8-7 APLICACIONES—DISEÑO DE VIGAS Y ESFUERZOS DE DISEÑO

Para diseñar una viga, deben especificarse su material, longitud, colocación de las cargas, colocación de los apoyos y el tamaño y la forma de su sección transversal. Normalmente, la longitud y la colocación de las cargas y los apoyos se determinan según los requisitos del uso pensado. A continuación el diseñador determina las especificaciones del material y el tamaño y la forma de la sección transversal.

El deber principal del diseñador es garantizar la seguridad del diseño. Esto requiere un análisis del esfuerzo en la viga y una decisión por lo concerniente al esfuerzo permisible o de diseño al cual puede verse sometido el material seleccionado. Los ejemplos que aquí se presentan se concentrarán en estos puntos. También son de interés para el diseñador el costo, la apariencia, el tamaño físico, el peso, la compatibilidad del diseño con otros componentes de la máquina o estructura y la disponibilidad del material o el perfil.

Se demostrarán dos métodos básicos de diseño de vigas. Uno implica la especificación del *material* con el cual se fabricará la viga y su *perfil* general (circular, rectangular, viga *W*, etc.), con la subsecuente determinación de las dimensiones requeridas de la sección transversal de la viga. El segundo requiere que se especifiquen las *dimensiones* y el *perfil* de la viga y que a continuación se calcule la resistencia requerida de un material con el que se fabricará la viga. Luego se especifica el material.

**Esfuerzo de diseño para metales—recomendaciones generales.** Cuando se especifiquen esfuerzos de diseño es importante que se tenga en cuenta que en las vigas se producen esfuerzos tanto de compresión como de tensión. Si el material es razonablemente homogéneo e isotrópico y tiene la misma resistencia a tensión o a compresión, entonces el diseño se basa en el esfuerzo máximo desarrollado en la viga. Cuando un material tiene diferentes resistencias a tensión y a compresión, como en el caso del hierro colado o madera, entonces se tendrán que analizar tanto los esfuerzos de tensión como los de compresión.

El método utilizado con más frecuencia en este libro para determinar esfuerzos de diseño es similar al descrito en las secciones 3-3 a la 3-6, las cuales convendría repasar en este momento. La tabla 8-1 contiene instrucciones sobre esfuerzo de diseño que se

**TABLA 8-1** Indicaciones para determinar el esfuerzo de diseño—esfuerzos flexionantes.

Patrón de carga	Material dúctil	Material quebradizo o frágil
Estática	$\sigma_d = s_y/2$	$\sigma_d = s_u/6$
Repetida	$\sigma_d = s_y/8$	$\sigma_d = s_u/10$
Impacto o choque	$\sigma_d = s_y/12$	$\sigma_d = s_u/15$

usarán para vigas de máquinas y estructuras especiales en condiciones en que las cargas y las propiedades del material se conocen a la perfección. Se pueden usar factores más grandes en los casos de mayor incertidumbre. La tabla 8-1 se usará para los problemas de este libro que incluyen metales, a menos que se diga lo contrario.

**Esfuerzos de diseño tomados de reglamentos seleccionados.** La tabla 8-2 da un resumen de esfuerzos flexionantes definidos por el American Institute of Steel Construction (AISC) para acero estructural y por la Aluminum Association para aleaciones de aluminio. Estos datos atañen a vigas sometidas a cargas estáticas como las que se encuentran en estructuras de edificios.

Se requiere un análisis adicional de las partes de vigas sometidas a esfuerzos de compresión por la posibilidad de pandeo local, sobre todo en perfiles esbeltos o patines extendidos. Las vigas largas también deben verificarse por lo que se refiere a la posibilidad de torsión. Con frecuencia se requiere que los apoyos laterales de los patines de vigas largas sujetos a compresión resistan la tendencia de la viga a torcerse. Véanse las referencias 1 y 2 para un análisis más detallado de estas especificaciones.

**Esfuerzos de diseño para no metales.** Cuando los problemas incluyen no metales tales como madera, plásticos y compuestos, en general no se usa el concepto de resistencia a la cedencia. Además, las resistencias que vienen en la tablas con frecuencia están basadas en promedios estadísticos de muchas pruebas. Las variaciones en la composición y la estructura del material pueden conducir a variaciones en las propiedades de resistencia. Siempre que sea posible, el material que va a ser utilizado en una estructura debe probarse para determinar su resistencia.

El apéndice A-18 contiene valores de esfuerzo *permisible* para tres clases de madera de acuerdo con los grados que aparecen en la tabla para aplicaciones en estructuras de edificios y usos similares que implican carga estática. Si las condiciones de carga se conocen a la perfección, una viga se puede cargar hasta los valores de esfuerzo flexionante que vienen en la tabla. Si existe incertidumbre con respecto a las condiciones de carga,

**TABLA 8-2** Esfuerzos de diseño tomados de reglamentos seleccionados—esfuerzos flexionantes—cargas estáticas sobre estructuras de edificios.

Acero estructural (AISC):

$$\sigma_d = s_y/1.5 = 0.66 s_y$$

Aluminio (Aluminum Association)

$$\sigma_d = s_y/1.65 = 0.61 s_y \quad \text{o} \quad \sigma_d = s_u/1.95 = 0.51 s_u$$

el que sea menor



se pueden aplicar factores de diseño a los valores de la tabla con lo que se reducen los esfuerzos de diseño. Aquí no se dan indicaciones rigurosas y se recomienda recurrir a las pruebas. Se utilizarán los esfuerzos permisibles listados, a menos que se indique de otra manera.

Las propiedades de plásticos listadas en el apéndice A-19 se pueden considerar representativas de los tipos listados. Pero es de hacerse notar que existen muchas variables que intervienen en la producción de plásticos y es importante que se obtengan datos más completos de los fabricantes o se pruebe el material a ser utilizado. Además, los plásticos difieren extraordinariamente entre sí, por lo que se refiere a su capacidad de soportar cargas, choques e impactos cíclicos. En este capítulo, la *resistencia a la flexión* del apéndice A-19 se considerará como la resistencia representativa de los plásticos listados cuando se utilicen en vigas. Se supondrá que la falla es inminente a estos niveles de esfuerzo. En los casos generales de carga estática, se aplicará un factor de diseño  $N = 2$  a esos valores para determinar el esfuerzo de diseño.

Los compuestos ofrecen muchas ventajas cuando se aplican al diseño de vigas porque la colocación del material se puede optimizar para tener vigas eficientes ligeras. Pero por lo general la estructura resultante no es homogénea, así que las propiedades son sumamente anisotrópicas. Por tanto, no se puede tener la certeza de que la fórmula de flexión tal como está enunciada en las ecuaciones (8-1) y (8-2) dé valores de esfuerzo precisos. Más adelante en este capítulo se analizarán métodos generales en relación con el uso de compuestos en vigas.

## 8-8 MÓDULO DE SECCIÓN Y PROCEDIMIENTOS DE DISEÑO

El análisis del esfuerzo requiere el uso de la fórmula de flexión:

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I}$$

No obstante una forma modificada es deseable en los casos en que se tienen que determinar las dimensiones de una sección. Nótese que tanto el momento de inercia  $I$  como la distancia  $c$  son propiedades geométricas del área de la sección transversal de una viga. Por consiguiente, el cociente  $I/c$  también lo es. Por conveniencia, se define un término nuevo, *módulo de sección*, denotado por la letra  $S$ .

Módulo de sección

$$S = \frac{I}{c} \quad (8-4)$$

La fórmula de flexión se transforma como sigue:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{S} \quad (8-5)$$

Ésta es la forma a ser usada en el diseño. Con ejemplos se ilustrará el uso del módulo de sección. Es de hacer notar que algunos diseñadores utilizan el símbolo  $Z$  en lugar de  $S$  para denotar el módulo de sección. El apéndice A-1 da fórmulas para  $S$  de algunos perfiles.

**Procedimientos de diseño.** Aquí se demuestran dos métodos de abordar problemas de diseño. El primero es aplicable cuando el patrón de carga y el material se conocen

y se tiene que determinar el perfil y las dimensiones de la sección transversal de una viga. El segundo es aplicable cuando el patrón de carga, el perfil de la sección transversal de una viga y sus dimensiones ya se especificaron y el objetivo es especificar un material adecuado para la viga que garantice la seguridad.

**A. Procedimiento de diseño para determinar las dimensiones requeridas de una viga.**

Datos: El patrón de carga y el material con el cual se fabricará la viga.

1. Determine el momento flexionante máximo en la viga, por lo general dibujando los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos.
2. Determine el método aplicable para especificar el esfuerzo de diseño de la sección 8-7.
3. Calcule el valor del esfuerzo de diseño.
4. Con la fórmula de flexión expresada en función del módulo de sección, ecuación (8-5), resuélvala para el módulo de sección,  $S$ . A continuación considere el esfuerzo máximo igual al esfuerzo de diseño y calcule el valor mínimo requerido del módulo de sección para limitar el esfuerzo real a un valor no mayor que el del esfuerzo de diseño.
5. Para un perfil de viga de diseño especial, determine las dimensiones mínimas requeridas del perfil para obtener el módulo de sección requerido. En seguida, especifique las dimensiones convenientes más grandes siguientes con las tablas de tamaños preferidos del apéndice A-2.
6. Para seleccionar un perfil estructural estándar como los de los apéndices A-4 a A-12, consulte la tabla de datos apropiada y especifique uno que por lo menos tenga el valor del módulo de sección,  $S$ , calculado en el paso 4. Por lo general, se recomienda que se especifique el perfil apropiado *más ligero* porque el costo de la viga hecha de un material dado en general está relacionado directamente con su peso. La referencia 1 incluye tablas muy completas de perfiles para viga con sus valores de módulo de sección ordenados por el peso de la sección con el objeto de facilitar la selección de la viga más ligera. En los casos en que existen limitaciones de espacio, deben considerarse las dimensiones reales del perfil.

**B. Procedimiento de diseño para especificar un material para una viga dada.**

Datos: El patrón de carga, el perfil y las dimensiones de la viga.

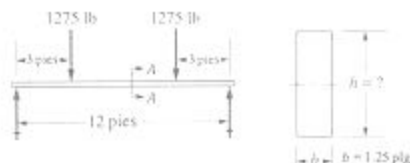
1. Determine el momento flexionante máximo en la viga, por lo general con los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos.
2. Calcule el módulo de sección de la sección transversal.
3. Calcule el esfuerzo flexionante máximo con la fórmula de flexión, ecuación (8-5).
4. Determine el método aplicable para especificar el esfuerzo de diseño de la sección 8-7 y especifique un factor de diseño adecuado.
5. Iguale el esfuerzo máximo calculado en el paso 3 a la fórmula para el esfuerzo de diseño.

6. Resuelva para el valor mínimo requerido de la resistencia del material, ya sea  $s_y$  o  $s_u$ .
7. Seleccione el tipo de material con el que se fabricará la viga tal como acero, aluminio, hierro fundido, titanio o cobre.
8. Consulte las tablas de datos en busca de las propiedades del material como las que vienen en los apéndices A-13 a A-19 e identifique un grupo de materiales candidatos que tengan por lo menos la resistencia requerida.
9. Considerando cualquier factor apropiado a la aplicación, tal como ductilidad, costo, corrosión, potencial, facilidad de fabricación o peso, especifique el material a ser usado. En el caso de metales, es esencial que se especifique la condición del material además de la aleación.

A continuación se dan ejemplos que ilustran estos procedimientos.

**Ejemplo 8-4**

Se pretende diseñar una viga que soporte las cargas estáticas mostradas en la figura 8-12. La sección transversal de la viga será rectangular y se fabricará de placa de acero estructural ASTM A36 de 1.25 plg de espesor. Especifique una altura adecuada para la sección transversal.



Sección transversal de una viga—Sección A-A

FIGURA 8-12 Carga y sección transversal de la viga del ejemplo 8-4.

Solución	Objetivo	Especificar la altura de la sección transversal rectangular.
	Datos	El patrón de carga ilustrado en la figura 8-12. Acero estructural ASTM A36. Ancho de la viga de 1.25 plg. Cargas estáticas.
	Análisis	Se utilizará el procedimiento de diseño A de esta sección.
	Resultados	<p><b>Paso 1.</b> La figura 8-13 muestra los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos. El momento flexionante máximo es de 45 900 lb · plg entre las cargas, a la mitad del claro de la viga entre <math>x = 3.0</math> pies y 9.0 pies.</p> <p><b>Paso 2.</b> De la tabla 8-1, para carga estática sobre material dúctil,</p>

$$\sigma_y = s_y/2$$

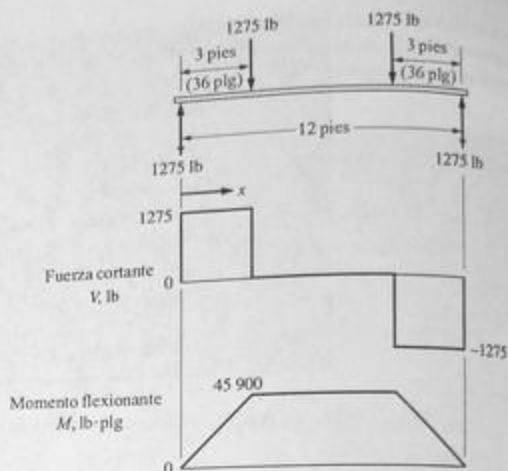


FIGURA 8-13 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante del ejemplo 8-4.

- Paso 3.** Del apéndice A-15  $s_y = 36\,000\text{ lb/plg}^2$  para acero A36. Para una carga estática, un factor de diseño  $N = 2$  basado en la resistencia a la cedencia es razonable. Por tanto:

$$\sigma_d = \frac{s_y}{N} = \frac{36\,000\text{ lb/plg}^2}{2} = 18\,000\text{ lb/plg}^2$$

- Paso 4.** El  $S$  requerido es:

$$S = \frac{M}{\sigma_d} = \frac{45\,900\text{ lb-plg}}{18\,000\text{ lb/plg}^2} = 2.55\text{ plg}^3$$

- Paso 5.** La fórmula para el módulo de sección de una sección rectangular con altura  $h$  y espesor  $b$  es:

$$S = \frac{I}{c} = \frac{bh^3}{12(h/2)} = \frac{bh^2}{6}$$

Para la viga de este problema de diseño,  $b$  será de  $1.25\text{ plg}$ . Luego resolviendo para  $h$  se obtiene:

$$\begin{aligned} S &= \frac{bh^2}{6} \\ h &= \sqrt{\frac{6S}{b}} = \sqrt{\frac{6(2.55\text{ plg}^3)}{1.25\text{ plg}}} \\ &= 3.50\text{ plg} \end{aligned}$$

**Comentario** El valor mínimo calculado para  $h$  es un tamaño conveniente. Especifique  $h = 3.50$  plg. La viga será entonces de perfil rectangular de  $1.25$  plg  $\times$   $3.50$  plg. Nótese que como la viga es un tanto larga, 12 pies, puede que se deforme lateralmente por inestabilidad elástica. Es posible que requiera reforzamiento lateral.

**Ejemplo 8-5** El techo de una fábrica tiene que estar soportado por vigas de patín ancho separadas 4 pies entre centros a lo largo de un claro de 20 pies, como se ilustra en la figura 8-14. El techo será una losa de concreto colado, de 4 plg de espesor. La carga viva de diseño sobre el techo es de  $200$  lb/plg<sup>2</sup>. Especifique una viga de patín ancho que limite el esfuerzo en ella a  $22\,000$  lb/plg<sup>2</sup>.

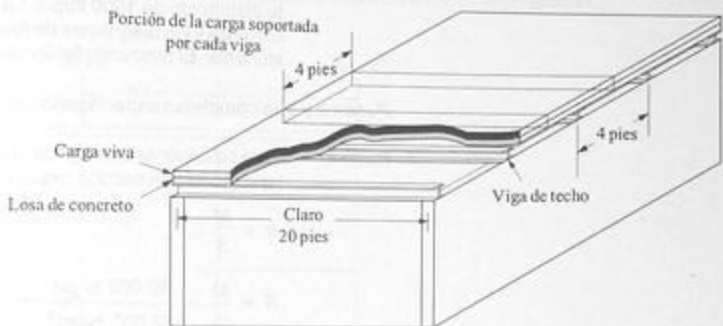


FIGURA 8-14 Estructura de techo del edificio del ejemplo 8-5.

**Solución Objetivo** Especificar una viga de patín ancho adecuada.

**Datos** El patrón de carga mostrado en la figura 8-15. Esfuerzo de diseño =  $\sigma_d = 22\,000$  lb/plg<sup>2</sup>.

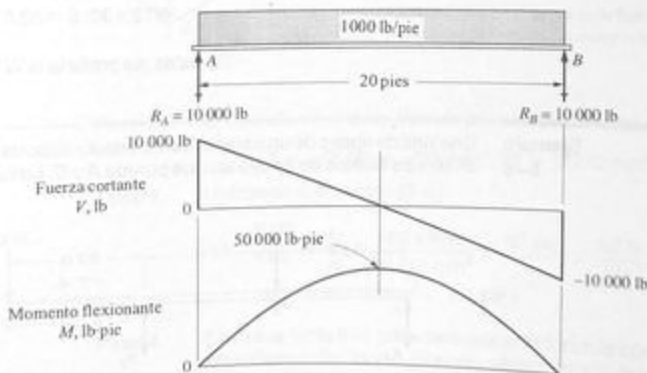


FIGURA 8-15 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante del ejemplo 8-5.

## Resultados Paso 1.

Primero se tiene que determinar la carga sobre cada viga de la estructura del techo. Si la carga se reparte por igual entre las vigas adyacentes se tendría que cada viga soportaría un tramo de 4 pies de ancho de la carga del techo. Además de la carga viva de 200 lb/pie<sup>2</sup>, el peso de la losa de concreto ofrece una carga medible. En la sección 2-10 se ve que el concreto pesa 150 lb/pie<sup>3</sup>. Entonces, cada pie cuadrado del techo, de 4.0 plg de espesor, pesaría 50 lb. Esto se llama *carga muerta*. Por tanto, la carga total producida por el techo es de 250 lb/pie<sup>2</sup>. Ahora nótese que cada pie de longitud de la viga soporta 4 pies<sup>2</sup> de techo. Por consiguiente, la carga sobre la viga es una carga uniformemente distribuida de 1000 lb/pie. La figura 8-15 muestra la viga cargada y los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. El momento flexionante es de 50 000 lb·pie.

**Pasos 2 y 3** se completan especificando  $\sigma_d = 22\,000$  lb/plg<sup>2</sup>.

**Paso 4.** Para seleccionar una viga de patín ancho, se tiene que calcular el módulo de sección requerido.

$$\sigma = \frac{M}{S}$$

$$S = \frac{M}{\sigma_d} = \frac{50\,000 \text{ lb·pie}}{22\,000 \text{ lb/plg}^2} \times \frac{12 \text{ plg}}{\text{pie}} = 27.3 \text{ plg}^3$$

**Paso 5.** No se aplica en este problema.

**Paso 6.** En el apéndice A-7 se localiza una viga cuyo valor de  $S$  es mayor que 27.3 plg<sup>3</sup>. Al considerar diferentes opciones, las cuales son muchas, se debe buscar la viga más ligera que sea segura, puesto que el costo de ésta se basa en su peso. Algunas vigas posibles son:

$$W14 \times 26: S = 35.3 \text{ plg}^3, 26 \text{ lb/pie}$$

$$W12 \times 30: S = 38.6 \text{ plg}^3, 30 \text{ lb/pie}$$

De éstas, se prefería la W14 × 26, por ser la más ligera.

## Ejemplo 8-6

Una viga de apoyo de un sistema transportador soporta las cargas mostradas en la figura 8-16. Los puntos de apoyo son los puntos A y C. La carga de 20 kN en B y la carga de

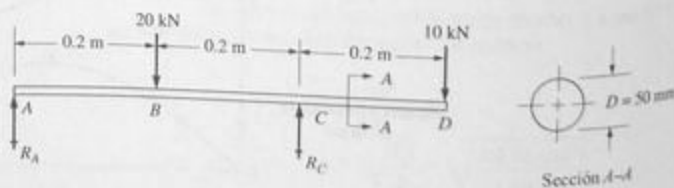


FIGURA 8-16 Cargas y sección transversal de la viga del ejemplo 8-6.

10 kN en  $D$  se deben aplicar repetidamente muchos miles de veces. Se propuso una barra de acero circular de 50 mm de diámetro para fabricar la viga. Especifique un acero adecuado.

- Solución**    **Objetivo**    Especifique un acero adecuado.
- Datos**    El patrón de carga de la figura 8-16. Las cargas son repetidas. La viga tiene que ser circular,  $D = 50$  mm.
- Análisis**    Se utiliza el procedimiento  $B$  dado en esta sección.
- Resultados**    **Paso 1.**    La figura 8-17 muestra los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos. El momento flexionante máximo es de  $2.00$  kN·m en el apoyo  $C$ .

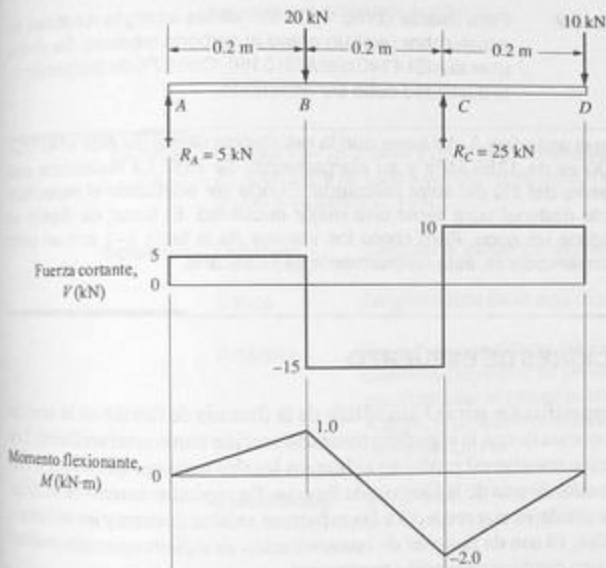


FIGURA 8-17 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del ejemplo 8-6.

**Paso 2.** El apéndice A-1 da la fórmula para  $S$  de una barra circular.

$$S = \pi D^3 / 32 = \pi (50 \text{ mm})^3 / 32 = 12\,272 \text{ mm}^3$$

**Paso 3.** Utilizando la ecuación (8-5):

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M}{S} = \frac{2.0 \text{ kN}\cdot\text{m}}{12\,272 \text{ mm}^3} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} \times \frac{10^3 \text{ N}}{\text{kN}} \\ \sigma_{\max} &= 163 \text{ N/mm}^2 = 163 \text{ MPa} \end{aligned}$$

**Paso 4.** Se usa la tabla 8-1 para determinar la fórmula apropiada del esfuerzo de diseño. El acero seleccionado deberá ser muy dúctil debido a la carga repetida. Entonces, se usará  $\sigma_d = s_u/8$ .

**Paso 5.** Sea  $\sigma_{m\acute{a}x} = 163 \text{ MPa} = \sigma_f = s_u/8$ .

**Paso 6.** Resolviendo para  $s_u$  se obtiene:

$$s_u = 8(\sigma_{m\acute{a}x}) = 8(163 \text{ MPa}) = 1304 \text{ MPa}$$

**Paso 7.** Se decidió usar acero.

**Paso 8.** El apéndice A-13 enumera varias aleaciones de acero comunes. De esa tabla se seleccionan materiales candidato que tengan buena ductilidad y una resistencia última de por lo menos 1304 MPa. A continuación se enumeran cuatro.

AISI 1080 OQT 700;  $s_u = 1303 \text{ MPa}$ ; 12% de alargamiento

AISI 1141 OQT 700;  $s_u = 1331 \text{ MPa}$ ; 9% de alargamiento

AISI 4140 OQT 700;  $s_u = 1593 \text{ MPa}$ ; 12% de alargamiento

AISI 5160 OQT 900;  $s_u = 1351 \text{ MPa}$ ; 12% de alargamiento

**Paso 9.** Para usarse como vigas sometidas a cargas repetidas, se acostumbra usar un acero al carbono mediano. Se podría usar el AISI 4140 o el AISI 5160. Con 12% de alargamiento, la ductilidad debe ser adecuada.

**Comentario** En el apéndice A-13 se ve que la resistencia última del AISI 4140 OQT 900 es de 1289 MPa y su alargamiento de 15%. La resistencia está dentro del 2% del valor calculado. Puede ser adecuado el especificar este material para tener una mejor ductilidad. El factor de diseño se reduce un poco. Pero como los valores de la tabla 8-1 son un tanto conservadores, esto normalmente se justificaría.

## 8-9 CONCENTRACIONES DE ESFUERZO


Las condiciones especificadas para el uso válido de la fórmula de flexión en la sección 8-3 incluían la propuesta de que la viga debe tener una sección transversal uniforme. Los cambios de la sección transversal producen esfuerzos locales mayores que los pronosticados con la aplicación directa de la fórmula de flexión. En capítulos anteriores se hicieron observaciones similares con respecto a los esfuerzos axiales directos y los esfuerzos cortantes torsionales. El uso de *factores de concentración de esfuerzo* permite analizar vigas que no incluyen cambios de sección transversal.

En el diseño de flechas circulares que llevan montados elementos transmisores de potencia, el uso de escalones o resaltos en el diámetro es frecuente. En el capítulo 5 se mostraron ejemplos, donde se analizaron los esfuerzos cortantes torsionales. La figura 8-18 muestra una flecha como ésa. Si se considera la flecha como una viga sometida a momentos flexionantes, se presentarán concentraciones de esfuerzo en el hombro (2), el cuñero (3) y la ranura (4).

En las secciones donde ocurren concentraciones de esfuerzo, el esfuerzo causado por flexión se calcularía con una fórmula de flexión modificada,

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{McK_f}{I} = \frac{MK_f}{S} \quad (8-6)$$

El factor de concentración de esfuerzo  $K_f$ , se determina experimentalmente, con los valores reportados en gráficas como las del apéndice A-21, casos 4, 5, 8, 9, 10 y 11.

 **Fórmula de flexión con concentración de esfuerzo**



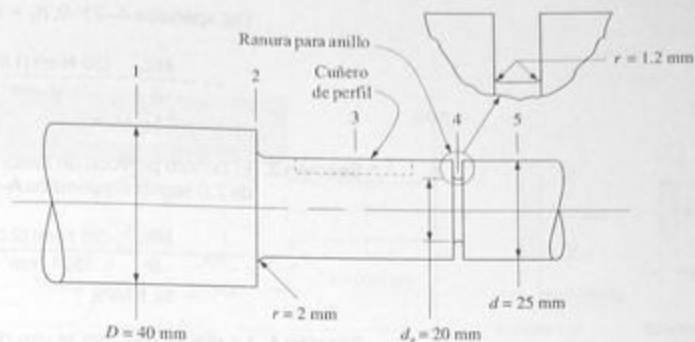


FIGURA 8-18 Segmento de una flecha con varios cambios de la sección transversal que producen concentraciones de esfuerzo.

**Ejemplo 8-7** La figura 8-18 muestra una parte de una flecha circular en la que se monta un engrane. En este lugar se aplica un momento de 30 N·m. Calcule el esfuerzo originado por flexión en las secciones 2, 3 y 4.

**Solución** **Objetivo** Calcular el esfuerzo originado por flexión en las secciones 2, 3 y 4.

**Datos** La geometría de la viga mostrada en la figura 8-18.  $M = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

**Análisis** Se deben considerar las concentraciones de esfuerzo por los severos cambios geométricos en el área de interés. Se usará la ecuación (8-6) para calcular el esfuerzo máximo en cada sección. El apéndice 21 es la fuente de datos en cuanto a lo que se refiere a factores de concentración de esfuerzo,  $K_f$ .

**Resultados** **Sección 2.** El escalón en la flecha provoca una concentración de esfuerzo. Por tanto, el esfuerzo es:

$$\sigma_2 = \frac{MK_f}{S}$$

Para calcular  $S$  se utiliza el menor de los diámetros en la sección 2. Del apéndice A-1:

$$S = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi (25 \text{ mm})^3}{32} = 1534 \text{ mm}^3$$

El valor de  $K_f$  depende de las relaciones  $r/d$  y  $D/d$  (véase el apéndice 21-9):

$$\frac{r}{d} = \frac{2 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} = 0.08$$

$$\frac{D}{d} = \frac{40 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} = 1.60$$

Del apéndice A-21-9,  $K_t = 1.87$ . Por tanto:

$$\sigma_2 = \frac{MK_t}{S} = \frac{(30 \text{ N}\cdot\text{m})(1.87)}{1534 \text{ mm}^3} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 36.6 \text{ N/mm}^2 \\ = 36.6 \text{ MPa}$$

**Sección 3.** El cuñero provoca un factor de concentración de esfuerzo de 2.0 según el apéndice A-21-11. Luego:

$$\sigma_3 = \frac{MK_t}{S} = \frac{(30 \text{ N}\cdot\text{m})(2.0)}{1534 \text{ mm}^3} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 39.1 \text{ N/mm}^2 \\ = 39.1 \text{ MPa}$$

**Sección 4.** La ranura requiere el uso del apéndice A-21-9 de nuevo para determinar  $K_t$ . Nótese que el esfuerzo nominal se basa en el diámetro de la raíz de la ranura,  $d_g$ . Para la ranura:

$$\frac{r}{d_g} = \frac{1.2 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 0.06 \\ \frac{d}{d_g} = \frac{25 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 1.25$$

Entonces,  $K_t = 1.93$ . El módulo de sección en la raíz de la ranura es:

$$S = \frac{\pi d_g^3}{32} = \frac{\pi(20 \text{ mm})^3}{32} = 785 \text{ mm}^3$$

El esfuerzo en la sección 4 es:

$$\sigma_4 = \frac{MK_t}{S} = \frac{(30 \text{ N}\cdot\text{m})(1.93)}{785 \text{ mm}^3} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 73.8 \text{ N/mm}^2 \\ = 73.8 \text{ MPa}$$

**Comentario** El esfuerzo en la sección 4 en la ranura para anillo es con mucho el máximo por el diámetro pequeño y el valor relativamente elevado de  $K_t$ . En el diseño de la flecha para determinar un material adecuado se debe usar este nivel de esfuerzo como el esfuerzo máximo real.

**Ejemplo 8-8**

La figura 8-19 muestra una ménsula en voladizo que soporta una carga parcial uniformemente distribuida a lo largo de 10 plg a partir del extremo izquierdo y una carga concentrada en su extremo derecho. La geometría varía en las secciones A, B y C como se muestra. La ménsula es de aluminio 2014-T6 y se desea tener un factor de diseño mínimo de 8 basado en la resistencia última. Evalúe la aceptabilidad del diseño dado. Si cualquier sección es insegura, proponga otro diseño que produzca un nivel de esfuerzo satisfactorio. Considere concentraciones de esfuerzo en las secciones B y C. La fijación en A está hecha de tal modo que se puede considerar que  $K_t = 1.0$ .

**Solución** **Objetivo**

Evaluar la viga mostrada en la figura 8-19 para garantizar que el factor de diseño mínimo sea de 8 basado en la resistencia última. De no ser así, rediseñe la viga.

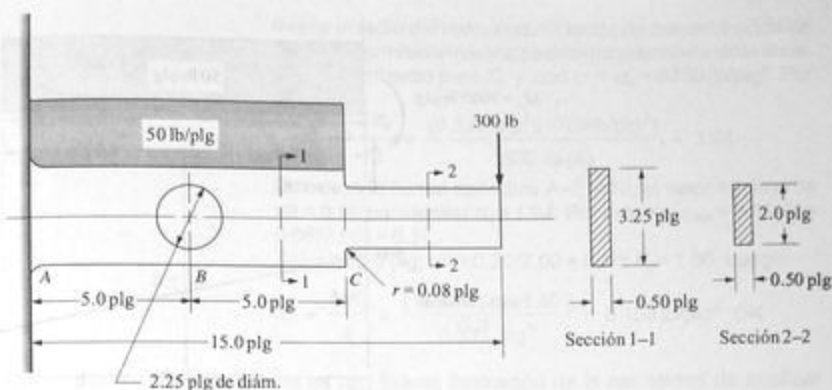


FIGURA 8-19 Viga y cargas del ejemplo 8-8.

**Datos** Las cargas y la geometría de la viga mostrada en la figura 8-19. Aluminio 2014-T6.

**Análisis**

1. Se dibujarán los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.
2. El esfuerzo de diseño se calculará con  $\sigma_d = s_u/8$ .
3. Se calculará el esfuerzo en las secciones A, B y C, considerando concentraciones de esfuerzo en B y C. Éstos son los tres puntos de falla probables debido al momento flexionante o la concentración de esfuerzo. En todos los demás puntos se tendrá un esfuerzo flexionante más bajo. En cada una de las secciones, el esfuerzo se calculará con  $\sigma = MK_t/S$ , y los valores de M, K y S se tendrán que determinar en cada sección.
4. Los esfuerzos calculados se compararán con el esfuerzo de diseño.
5. Para cualquier sección donde el esfuerzo sea mayor que el esfuerzo de diseño, se propondrá un rediseño y se volverá a calcular el esfuerzo para comprobar que sea seguro.

**Resultados**

**Paso 1.** La figura 8-20 muestra los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos. Nótese que ya se calcularon los valores del momento flexionante en las secciones B y C. Se deben verificar los valores dados.

**Paso 2.** En el apéndice A-17, se encuentra  $s_u = 70 \text{ ksi} = 70\,000 \text{ lb/plg}^2$ . Por tanto:

$$\sigma_d = s_u/8 = (70\,000)/8 = 8750 \text{ lb/plg}^2$$

**Pasos 3 y 4.** En cada sección,  $\sigma = MK_t/S = K_t \alpha_{\text{hom}}$ .

**Sección A:**  $K_t = 1.0$  (dato).  $M_A = 7000 \text{ lb} \cdot \text{plg}$ ;  
Dimensiones:  $b = 0.50 \text{ plg}$ ;  $h = 3.25 \text{ plg}$ ; rectángulo.

$$S = bh^2/6 = (0.50 \text{ plg})(3.25 \text{ plg})^2/6 = 0.880 \text{ plg}^3$$

$$\sigma = \frac{(7000 \text{ lb} \cdot \text{plg})(1.0)}{0.880 \text{ plg}^3} = 7953 \text{ lb/plg}^2 < 8750 \text{ lb/plg}^2 \text{ OK}$$

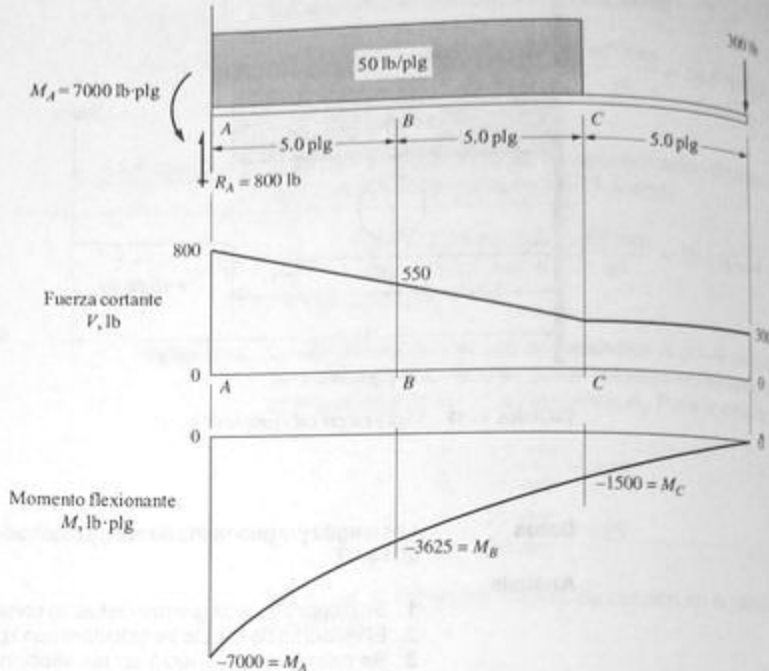


FIGURA 8-20 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del ejemplo 8-8.

**Sección B:**  $M_B = 3625$  lb·plg. Encuentre  $K_f$  en el Apéndice A-21-4. Dimensiones:  $t = b = 0.50$  plg;  $w = h = 3.25$  plg;  $d = 2.25$  plg;  $d/w = 2.25/3.25 = 0.692$ ; por lo tanto,  $K_f = 1.40$  (curva C).

$$\sigma = K_f \sigma_{nom} = \frac{K_f (6Mw)}{(w^3 - d^3)t} = \frac{(1.40)(6)(3625)(3.25)}{[(3.25)^3 - (2.25)^3](0.50)}$$

$$\sigma = 8629 \text{ lb/plg}^2 < 8750 \text{ lb/plg}^2 \quad \text{OK}$$

**Sección C:**  $M_C = 1500$  lb·plg. Encuentre  $K_f$  en el apéndice A-21-10. Dimensiones:  $t = 0.50$  plg;  $H = 3.25$  plg;  $h = 2.00$  plg;  $r = 0.08$  plg.  $H/h = 3.25/2.0 = 1.625$ ;  $r/h = 0.08/2.00 = 0.04$ . Por tanto,  $K_f = 2.40$ .

$$\text{Módulo de sección} = S = th^2/6 = (0.50)(2.00)^2/6 = 0.333 \text{ plg}^3$$

$$\sigma = \frac{MK_f}{s} = \frac{(1500 \text{ lb·plg})(2.40)}{0.333 \text{ plg}^3} = 10\,800 \text{ lb/plg}^2 \text{ excesivo}$$

**Paso 5. Rediseño propuesto en C:** Como el factor de concentración de esfuerzo en la sección C es bastante elevado, incre

mente el radio del redondeo. El factor de concentración de esfuerzo permisible máximo se determina resolviendo la ecuación del esfuerzo para  $K_f$  y con  $\sigma = \sigma_d = 8750 \text{ lb/plg}^2$ . Por tanto:

$$K_f = \frac{S\sigma_d}{M} = \frac{(0.333 \text{ plg}^3)(8750 \text{ lb/plg}^2)}{1500 \text{ lb}\cdot\text{plg}} = 1.94$$

De acuerdo con el apéndice A-21-10, el valor mínimo de  $r/h = 0.08$  para limitar  $K_f$  a 1.94. Por lo tanto,  $r_{\min} = 0.08(h) = 0.08(2.00) = 0.16$ .

Sea  $r = 0.20 \text{ plg}$ ;  $r/h = 0.20/2.00 = 0.10$ ;  $K_f = 1.80$ . Luego:

$$\sigma = \frac{MK_f}{s} = \frac{(1500 \text{ lb}\cdot\text{plg})(1.80)}{0.333 \text{ plg}^3} = 8100 \text{ lb/plg}^2 \text{ OK}$$

**Comentario** Este problema es una buena ilustración de la necesidad de analizar cualquier punto de la viga donde pudiera ocurrir un esfuerzo elevado a causa de un momento flexionante elevado, una concentración de esfuerzo elevada, un pequeño módulo de sección o una combinación de éstos. Además demuestra un método de rediseñar una viga para garantizar la seguridad.

## 8-10 CENTRO DE FLEXIÓN (CENTRO DE CORTANTE)

La fórmula de flexión sirve para calcular el esfuerzo en una viga siempre que las cargas aplicadas pasen por un punto llamado *centro de flexión*, o en ocasiones, *centro de cortante*. Si una sección tiene un eje de simetría y si las cargas pasan por él, entonces también lo hacen por el centro de flexión. Las secciones de viga mostradas en la figura 8-4 son de este tipo.

En secciones donde la carga se aplica fuera del eje de simetría, debe localizarse la posición del centro de flexión, indicado por  $Q$ . En la figura 8-5 se identificaron tales secciones.

Para que produzcan flexión pura, las cargas deben pasar por  $Q$ , como se muestra en la figura 8-21. Si no lo hacen, entonces se presenta una condición de *flexión asimétrica* y se tendrían que realizar otros análisis los cuales no se abordan en este libro. Las secciones del tipo mostrado en la figura 8-21 son de uso frecuente en estructuras. Algunas se prestan muy bien para su fabricación por extrusión y por tanto son muy económicas. Pero como existe la posibilidad de producir flexión asimétrica, se debe tener cuidado en su aplicación.

<b>Ejemplo 8-9</b>	Localice el centro de flexión de las dos secciones mostradas en la figura 8-22.
<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b> Localice el centro cortante, $Q$ , de los dos perfiles.
	<b>Datos</b> Los perfiles en la figura 8-22; el canal en la 8-22(a); el perfil acopado en la 8-22(b).
	<b>Análisis</b> En la figura 8-21 se muestra la ubicación general del centro de cortante de cada perfil junto con el procedimiento para calcular el valor de $e$ que localiza a $Q$ con respecto a características distintivas de los perfiles.

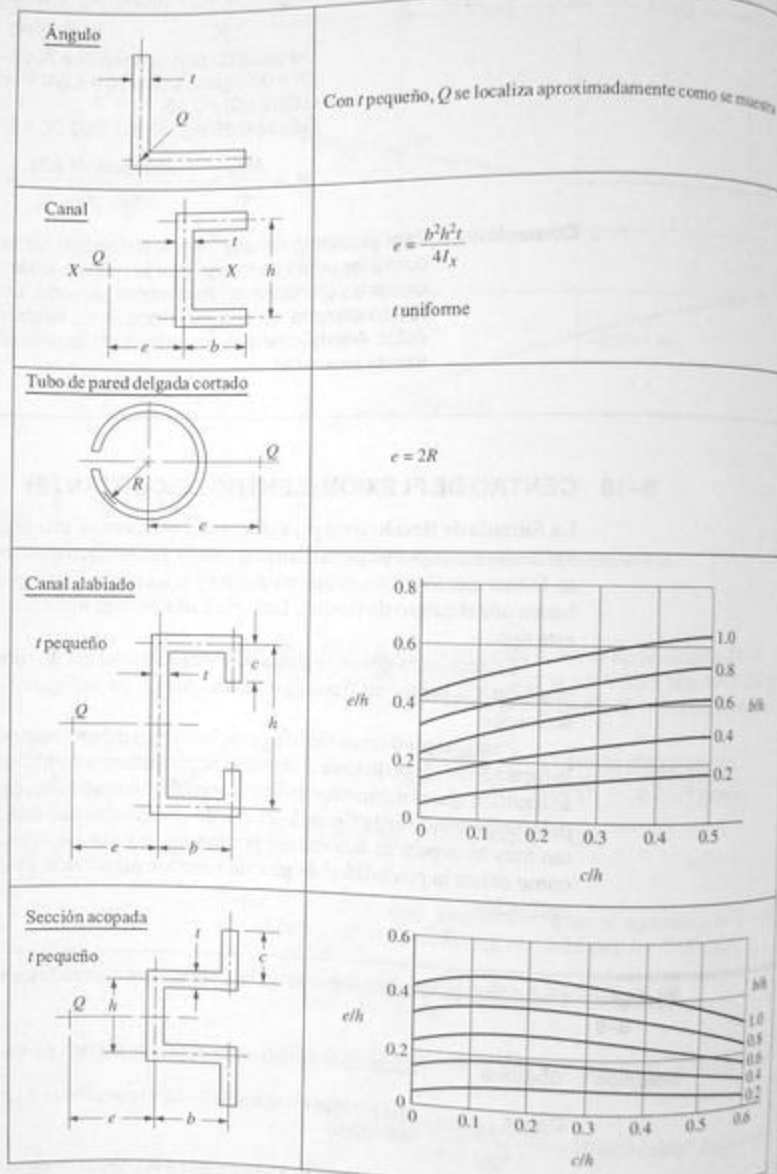


FIGURA 8-21 Localización del centro de flexión  $Q$ .

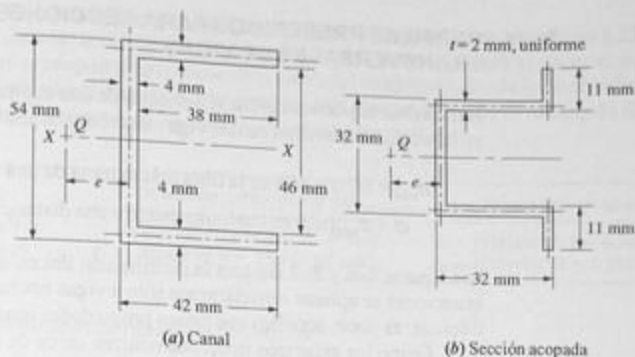


FIGURA 8-22 Secciones de viga en las que se localizaron los centros de flexión en el ejemplo 8-9.

**Resultados** **Sección canal (a).** Según la figura 8-21, la distancia  $e$  al centro de flexión es:

$$e = \frac{b^2 h^2 t}{4I_x}$$

Nótese que las dimensiones  $b$  y  $h$  se miden a la mitad del patín o el alma. Por tanto  $b = 40$  mm y  $h = 50$  mm. Por la simetría con respecto al eje  $X$ , se ve que  $I_x$  es la diferencia entre el valor de  $I$  del rectángulo grande exterior (54 mm por 42 mm) y el rectángulo más chico removido (46 mm por 38 mm).

$$I_x = \frac{(42)(54)^3}{12} - \frac{(38)(46)^3}{12} = 0.243 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Por tanto: 
$$e = \frac{(40)^2(50)^2(4)}{4(0.243 \times 10^6)} \text{ mm} = 16.5 \text{ mm}$$

Esta dimensión está dibujada a escala en la figura 8-22(a).

**Sección acopada (b).** En ésta la distancia  $e$  es una función de las relaciones  $c/h$  y  $b/h$ .

$$\frac{c}{h} = \frac{10}{30} = 0.3$$

$$\frac{b}{h} = \frac{30}{30} = 1.0$$

Entonces según la figura 8-21,  $e/h = 0.45$ . Resolviéndola para  $e$  da:

$$e = 0.45 h = 0.45(30 \text{ mm}) = 13.5 \text{ mm}$$

Esta dimensión está dibujada a escala en la figura 8-22(b).

**Comentario** Ahora, ¿puede idear un diseño en el que se use cualquier sección como viga y se contemple la aplicación de la carga a través del centro de flexión  $Q$  para que produzca flexión pura?

## 8-11 PERFILES PREFERIDOS PARA SECCIONES TRANSVERSALES DE VIGAS

Recuérdese el planteamiento al principio de este capítulo de la distribución del esfuerzo en la sección transversal de una viga caracterizada por las ecuaciones:

$$\sigma_{\text{máx}} = M_c/I = M/S \text{ en la fibra más externa de una viga}$$

$$\sigma = \sigma_{\text{máx}}(y/c) \text{ en cualquier punto a una distancia } y \text{ del eje neutro}$$

Las figuras 8-6 y 8-7 ilustran la distribución del esfuerzo. Se debe entender que estas ecuaciones se aplican estrictamente sólo a vigas hechas de materiales homogéneos isotrópicos; es decir, aquellos que tienen propiedades iguales en todas las direcciones.

Como los esfuerzos máximos ocurren cerca de las caras superior e inferior de la sección transversal, el material en ese lugar opone más resistencia al momento flexionante externamente aplicado que el material más cerca del eje neutro. Se deduce que conviene colocar la mayor parte del material lejos del eje neutro para obtener el uso eficiente del mismo. En este planteamiento, eficiencia quiere decir maximizar el momento de inercia y el módulo de sección del perfil para una cantidad dada de material, como lo indica el área de la sección transversal.

La figura 8-23 muestra varios ejemplos de perfiles eficientes de secciones transversales para vigas. Estas ilustraciones están basadas en la suposición de que el esfuerzo de mayor importancia es un esfuerzo flexionante provocado por cargas que actúan perpendiculares al eje neutro en la cara superior de la viga. Los ejemplos se muestran en las figuras 8-1, 8-3, 8-12 y 8-15. En tales casos, se dice que la flexión es positiva con respecto al eje neutro horizontal. Asimismo se presume que el material tiene la misma resistencia a compresión y a tensión.

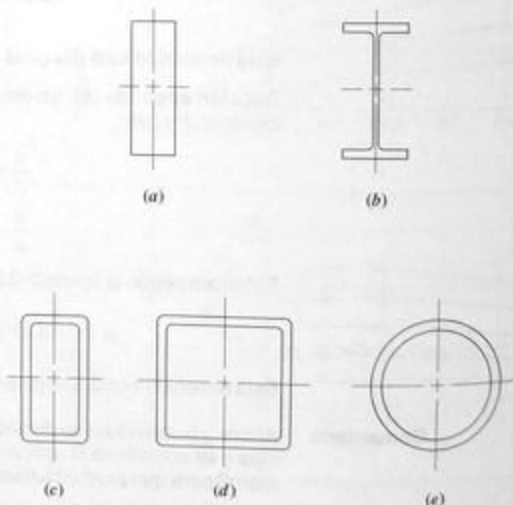


FIGURA 8-23 Perfiles eficientes para usarse como vigas.



Comenzando con el perfil rectangular simple mostrado en la figura 8.23(a), se prefiere orientar la dimensión larga verticalmente como se muestra porque el momento de inercia es proporcional al *cubo* de la altura del rectángulo, donde la altura es la dimensión perpendicular al eje neutro. Por ejemplo, considérese el caso de un rectángulo de 40 mm × 125 mm y compárense los valores resultantes de  $I$  y  $S$ .

	Dimensión vertical de 125 mm	Dimensión vertical de 40 mm
$I = bh^3/12$	$I_1 = (40)(125)^3/12 = 6.51 \times 10^6 \text{ mm}^4$	$I_2 = (125)(40)^3/12 = 0.667 \times 10^6 \text{ mm}^4$
$S = bh^2/6$	$S_1 = (40)(125)^2/6 = 1.04 \times 10^5 \text{ mm}^3$	$S_2 = (125)(40)^2/6 = 0.333 \times 10^5 \text{ mm}^3$

Al comparar estos resultados se obtiene:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{6.51 \times 10^6 \text{ mm}^4}{0.667 \times 10^6 \text{ mm}^4} = 9.76 \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{1.04 \times 10^5 \text{ mm}^3}{0.333 \times 10^5 \text{ mm}^3} = 3.12$$

La comparación de los valores del módulo de sección,  $S$ , es lo más pertinente cuando se trata de comparar esfuerzos en vigas porque contiene tanto el momento de inercia,  $I$ , como la distancia,  $c$ , a la fibra más externa de la sección transversal de la viga. Si bien una sección con la dimensión larga en posición vertical tiene un momento de inercia casi diez veces el de una sección con la dimensión larga en posición horizontal, es más de tres veces más alta, lo cual se traduce en una mejora del módulo de sección en aproximadamente tres veces. No obstante, ésa es una mejora significativa.

Un factor afín en la comparación de perfiles de vigas es que la *deflexión* de una viga es inversamente proporcional al momento de inercia,  $I$ , como se demostrará en el capítulo 12. Por consiguiente, es de esperarse que la viga rectangular alta del ejemplo anterior se deflexione sólo 1/9.76 veces tanto como la corta, o sea casi un 10%.

El perfil mostrado en la figura 8.23(b) es la muy conocida "viga I". El colocar la mayor parte del material en los patines horizontales o sea en los extremos superior e inferior de la sección los sitúa en las regiones de los esfuerzos máximos, con lo que se obtiene la máxima resistencia al momento flexionante. El alma vertical relativamente esbelta sirve para mantener los patines en posición y genera resistencia a las fuerzas cortantes, tal como se describe en el capítulo 9. Convendría estudiar las proporciones de los perfiles I estándar de acero y de aluminio que vienen en los apéndices A-7, A-8 y A-11 para darse una idea de los espesores razonables de patines y alma. El espesor del patin sometido a compresión es crítico con respecto a pandeo cuando la viga es relativamente larga. Las referencias 1 y 2 contienen datos sobre proporciones adecuadas.

El tubo rectangular alto mostrado en la figura 8-23(c) es muy similar al perfil I por lo que se refiere a su resistencia a momentos flexionantes provocados por cargas verticales. Los dos lados verticales desempeñan una función similar a la del alma del perfil I. De hecho, el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal del tubo mostrado en (c) sería idéntico al del perfil I mostrado en (b) si el espesor de las partes horizontales superior e inferior fuera igual y si los lados verticales del tubo tuvieran cada uno 1/2 del espesor del alma del perfil I. El tubo es superior al perfil I cuando se esperan combinaciones de cargas que provocan flexión con respecto a ambos ejes, el vertical y el horizontal, porque la colocación de los lados verticales alejados del eje  $Y$ - $Y$  incrementa el momento de inercia con respecto a dicho eje. El tubo también es superior cuando se aplica cualquier torsión, tal como se planteó en el capítulo 5. Cuando la torsión o la flexión con respecto al eje vertical es significativa, puede que sea preferible usar el perfil de tubo cuadrado mostrado en la figura 8-23(d).

Los tubos circulares mostrados en la figura 8-23(e) producen vigas muy eficientes por las mismas razones antes enumeradas para tubos cuadrados. Y son superiores a los tubos cuadrados cuando la torsión y la flexión se presentan con magnitudes significativas. Un ejemplo obvio de donde se prefiere un tubo circular es el caso de una flecha giratoria que soporta tanto cargas flexionantes como torsionales tal como la flecha motriz y los ejes de un automóvil o camión.

**Perfiles hechos de materiales delgados.** La producción económica de vigas de dimensiones moderadas puede lograrse mediante el laminado o troquelado de láminas metálicas planas relativamente delgadas. El aluminio y muchos plásticos se extruyen para producir perfiles de sección transversal uniforme, a menudo de paredes delgadas y patines extendidos. En las figuras P7-10 a P7-20 se muestran algunos ejemplos. Tales perfiles se adaptan sobre todo al uso de la viga. Vea si usted puede identificar miembros semejantes a vigas con perfiles especiales en torno suyo. En su hogar usted podría encontrar tales vigas usadas como rieles de puerta de armario, varillas para cortinas, estructuras de muebles metálicos, cubiertas o toldos para patios, escaleras, partes de juguetes de plástico, herramientas en el taller o partes de aparatos electrodomésticos o herramientas para mantenimiento de jardines. En su automóvil, observe los brazos de los limpiaparabrisas, los elementos de la suspensión, las palancas de velocidades, varillajes o soportes en el compartimiento del motor y las defensas. Las estructuras de aviones contienen numerosos ejemplos de perfiles de pared delgada diseñados para sacar provecho de su peso extremadamente ligero.

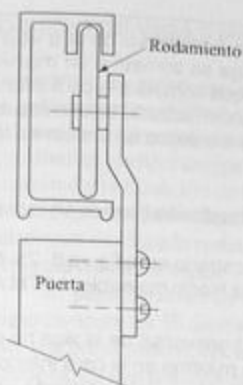
La figura 8-24 muestra tres ejemplos de perfiles extruidos o laminados de uso doméstico. La parte (a) muestra una carretilla de puerta de armario donde el carril para los rodillos que soportan la puerta se producen como una parte integral de la extrusión de aluminio. El armazón lateral de una escalera extensible de aluminio se ilustra en la parte (b). La parte (c) muestra una porción de una cubierta de patio laminada hecha de lámina de aluminio de 0.025 plg (0.64 mm) de espesor. La figura está especialmente diseñada para embonar entre sí con el objeto de formar un panel continuo para cubrir un área amplia. Algunas características de diseño de estas secciones son de hacerse notar. Los patines extendidos se refuerzan con salientes en forma de bulbo que les imparten rigidez local para que resistan el arrugamiento o el pandeo. Las áreas planas amplias se rigidizan por medio de nervaduras o corrugaciones laminadas, también para inhibir el pandeo local. Las referencias 1 y 2 contienen instrucciones para el diseño de tales características.

**Vigas hechas de materiales anisotrópicos.** El diseño de vigas que deben fabricarse de materiales con diferentes resistencias a tensión y a compresión requiere una atención especial. La mayoría de los tipos de hierro colado, por ejemplo, son mucho más resistentes a compresión que a tensión. El apéndice A-16 enumera las propiedades de hierro maleable ASTM A220, grado 80002 como sigue:

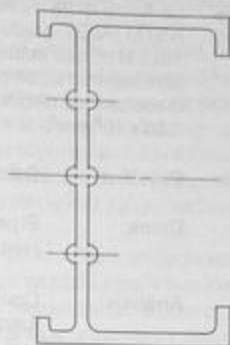
Resistencia última a la tensión:  $s_u = 655 \text{ MPa (95 ksi)}$

Resistencia última a la compresión:  $s_{uc} = 1650 \text{ MPa (240 ksi)}$

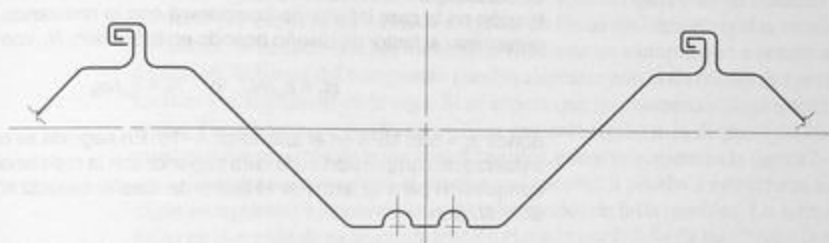
Un perfil de viga eficiente que podría tomar en cuenta esta diferencia es el perfil I modificado mostrado en la figura 8-25. Como el momento flexionante positivo usual somete al patín inferior a tensión, con un patín inferior más grande se baja el eje neutro y tiende a reducirse el esfuerzo de tensión resultante en él con respecto al esfuerzo de compresión en el patín superior. El ejemplo 8-10 ilustra este resultado con el factor de diseño basado en la resistencia a la tensión casi igual al basado en la resistencia a la compresión.



(a) Carretilla de puerta de armario



(b) Larguero lateral de escalera



(c) Panel de cubierta de patio

FIGURA 8-24 Ejemplos de secciones de viga de pared delgada.

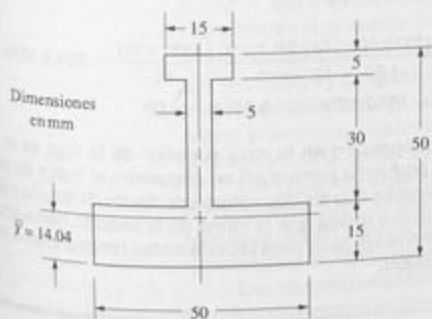


FIGURA 8-25 Sección transversal no simétrica de la viga del ejemplo 8-10.

**Ejemplo 8-10**

La figura 8-25 muestra la sección transversal de una viga hecha de hierro maleable, ASTM A220, grado 80002. La viga se somete a un momento flexionante máximo de 1025 N·m, que actúa de tal modo que somete a la cara inferior de la viga a tensión y a la cara superior a compresión. Calcule el factor de diseño resultante para la viga basado en la resistencia última del hierro. El momento de inercia de la sección transversal es de  $1.80 \times 10^5 \text{ mm}^4$ .

**Solución****Objetivo**

Calcular el factor de diseño basado en la resistencia última.

**Datos**

El perfil de viga mostrado en la figura 8-25.  $I = 1.80 \times 10^5 \text{ mm}^4$ ,  $M = 1025 \text{ N}\cdot\text{m}$ . El material es hierro maleable, ASTM A220, grado 80002.

**Análisis**

Como la sección transversal de la viga no es simétrica, el valor del esfuerzo de tensión máximo en la cara inferior de la viga,  $\sigma_b$ , será menor que el esfuerzo de compresión máximo en la cara superior,  $\sigma_c$ . Se calculará:

$$\sigma_b = M c_b / I \quad \text{y} \quad \sigma_c = M c_t / I$$

en donde  $c_b = \bar{Y} = 14.04 \text{ mm}$  y  $c_t = 50 - 14.04 = 35.96 \text{ mm}$ . El esfuerzo de tensión en la cara inferior se comparará con la resistencia última para determinar el factor de diseño basado en la tensión,  $N_t$ , con:

$$\sigma_b = s_u / N_t \quad \text{o} \quad N_t = s_u / \sigma_b$$

donde  $s_u = 655 \text{ MPa}$  en el apéndice A-16. En seguida se comparará el esfuerzo de compresión en la cara superior con la resistencia última a la compresión para determinar el factor de diseño basado en la compresión,  $N_c$ , con:

$$\sigma_c = s_{uc} / N_c \quad \text{o} \quad N_c = s_{uc} / \sigma_c$$

donde  $s_{uc} = 655 \text{ MPa}$  en el apéndice A-16. El menor de los dos valores de  $N$  será el factor de diseño final para la viga:

**Resultados**

En la cara inferior de la viga:

$$\sigma_b = \frac{M c_b}{I} = \frac{(1025 \text{ N}\cdot\text{m})(14.04 \text{ mm})}{1.80 \times 10^5 \text{ mm}^4} \cdot \frac{(1000 \text{ mm})}{\text{m}} = 79.95 \text{ MPa}$$

$$N_t = s_u / \sigma_b = 655 \text{ MPa} / 79.95 \text{ MPa} = 8.19$$

En la cara superior de la viga:

$$\sigma_c = \frac{M c_t}{I} = \frac{(1025 \text{ N}\cdot\text{m})(35.96 \text{ mm})}{1.80 \times 10^5 \text{ mm}^4} \cdot \frac{(1000 \text{ mm})}{\text{m}} = 204.8 \text{ MPa}$$

$$N_c = s_{uc} / \sigma_c = 655 \text{ MPa} / 204.8 \text{ MPa} = 8.06$$

**Comentario**

El esfuerzo de compresión en la cara superior de la viga es el valor limitante en este problema porque allí se encuentra el factor de diseño menor. Pero obsérvese que los dos valores del factor de diseño resultaron casi iguales, lo que indica que la forma de la sección transversal se optimizó razonablemente bien para las diferentes resistencias a la tensión y a la compresión.

Los materiales compuestos, descritos en el capítulo 2, ofrecen propiedades superiores cuando se usan en el diseño de vigas por la capacidad de adaptación de los constituyentes del compuesto y su colocación en la viga. El procesamiento compuesto a menudo permite que diseñen perfiles únicos que optimizan la geometría de la estructura con respecto a la magnitud y la dirección de las cargas a ser soportadas. La combinación de estas características sobresalientes con las ventajas inherentes de los compuestos en función de las relaciones de elevada resistencia a peso y de rigidez a peso los hacen sumamente deseables para usarse en vigas.

El planteamiento de la sección 8-10 se adapta perfectamente bien al diseño de vigas compuestas. El diseñador debe elegir un perfil para la sección transversal de la viga que sea, por sí mismo, eficiente al resistir momentos flexionantes. Además, el diseñador puede exigir que la mayor parte de las fibras más resistentes y más rígidas se concentre en las regiones donde se anticipan los mayores esfuerzos: es decir, en las fibras más externas de la viga, o sea, en el lugar más alejado del eje neutro. En las regiones de esfuerzo elevado se pueden colocar más capas de relleno tipo tela.

Una técnica efectiva de diseño de vigas compuestas es emplear un núcleo de material muy ligero en estructuras hechas de una espuma rígida o de un material aplanado, cubierto por capas relativamente delgadas de fibras resistentes rígidas en una matriz de polímero. Si se sabe que los momentos flexionantes siempre van a actuar en la misma dirección, las fibras del compuesto pueden alinearse con la dirección de los esfuerzos de tensión y compresión en la viga. Si se espera que los momentos flexionantes actúen en varias direcciones, se puede especificar una colocación más dispersa de las fibras o se pueden colocar capas de tela a varios ángulos, como se sugiere en la figura 2-13.

Se debe tener cuidado al diseñar y al someter a prueba a estructuras armadas con vigas compuestas a causa de los múltiples modos de falla posibles. La estructura puede fallar en la región de esfuerzo de tensión elevado por la falla de las fibras o la matriz o por el desprendimiento de las fibras de la matriz. Pero tal vez un modo de falla más probable de un compuesto laminado es la falla por cortante interlaminar en regiones de esfuerzo cortante elevado cerca del eje neutro, tal como se plantea en el capítulo 9. La falla también podría ocurrir en la región expuesta a esfuerzo de compresión por pandeo local del perfil o por deslaminación.

Cuando la viga se diseñó con la suposición de flexión en un cierto plano, es esencial que las cargas se apliquen correctamente y que el perfil mismo promueva la flexión pura y no una combinación de flexión y torsión. Se debe repasar el análisis del *centro de flexión*, sección 8-9.

El perfil y las dimensiones de la sección transversal de una viga se pueden modificar según la magnitud del momento flexionante en varias posiciones en una viga. Por ejemplo, una viga en voladizo que soporta una carga concentrada en su extremo libre experimenta el momento flexionante máximo en el punto de apoyo y su magnitud disminuye linealmente hacia su extremo libre. Por tanto, la sección transversal puede ser más alta en el apoyo y progresivamente más baja hacia el extremo libre. Una viga simplemente apoyada con una carga en el centro experimenta su momento flexionante máximo en el centro y disminuye hacia cada apoyo. Por consiguiente la viga puede ser más gruesa en el centro y más delgada hacia los extremos.

Las vigas con superficies planas o curvas generosas, como las alas de un avión, se deben diseñar para rigidez de los amplios paneles, lo mismo que para una resistencia adecuada. Puede suceder que la piel del panel tenga que ser soportada por nervaduras internas para dividirlo en áreas más pequeñas.

Las penetraciones en una viga compuesta se deben diseñar con cuidado para garantizar la transferencia uniforme de las cargas de una parte a otra de la viga. De ser factible,

la colocación de las penetraciones se hará en las regiones de esfuerzo reducido. Asimismo, los sujetadores se diseñarán con cuidado para garantizar el acoplamiento adecuado en el material compuesto fibroso. Se puede pensar en protuberancias engrasadas, en donde se van a colocar los sujetadores. Se puede reducir al mínimo el número de sujetadores mediante la configuración inteligente de la estructura, como, por ejemplo, mediante el moldeo de ménsulas integradas a la estructura principal.

En suma, el diseñador de vigas compuestas ha de analizar con cuidado la distribución del esfuerzo en la viga e intentar optimizar la colocación del material para aprovechar al máximo el perfil y las dimensiones de la viga. El diseñador debe visualizar la trayectoria de la transferencia de la carga desde su punto de aplicación hasta el último punto de apoyo.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Aluminum Association, *Specifications for Aluminum Structures*, Washington, D.C., 1986.
2. American Institute of Steel Construction, *Manual of Steel Construction*, 9th ed., Chicago, IL, 1989.
3. ASM INTERNATIONAL, *Composites, Engineered Materials Handbook, Volume 1*, Metals Park, OH, 1987.
4. *Design Guide for Advanced Composites Applications*, Advanstar Communications, Inc., Duluth, MN, 1993.
5. Mallick, P.K., *Fiber-Reinforced Composites: Materials, Manufacturing, and Design*, Marcel Dekker, New York, 1988.
6. Weeton, John W., Dean M. Peters, and Karyn L. Thomas, eds., *Engineers' Guide to Composite Materials*, ASM INTERNATIONAL, Metals Park, OH, 1987.

## PROBLEMAS

### Análisis de esfuerzos flexionantes

- 8-1.M Se usa una barra cuadrada de 30 mm de lado como viga simplemente apoyada sometida a un momento flexionante de 425 N·m. Calcule el esfuerzo máximo causado por flexión en la barra.
- 8-2.M Calcule el esfuerzo máximo originado por flexión en una varilla circular de 20 mm de diámetro cuando se somete a un momento flexionante de 120 N·m.
- 8-3.I Un momento flexionante de 5800 lb·plg se aplica a una viga de sección transversal rectangular de 0.75 plg × 1.50 plg. Calcule el esfuerzo flexionante máximo en la viga (a) si el lado vertical es de 1.50 plg, y (b) si el lado vertical es de 0.75 plg.
- 8-4.I Una viga de madera soporta un momento flexionante de 15 500 lb·plg. Su sección transversal es rectangular de 1.50 plg de ancho por 7.25 plg de altura. Calcule el esfuerzo máximo originado por flexión en la viga.
- 8-5.I La carga mostrada en la figura P6-4 debe ser soportada por una viga de acero W12 × 16. Calcule el esfuerzo causado por flexión.
- 8-6.I Una viga American Standard, S12 × 35, soporta la carga mostrada en la figura P6-11. Calcule el esfuerzo causado por flexión.
- 8-7.I La viga de 24 plg de largo mostrada en la figura P6-10 es un canal de aluminio, C4 × 2.331, colocado con las patas hacia abajo de tal modo que la cara plana de 4 plg soporta las cargas aplicadas. Calcule los esfuerzos máximos de tensión y compresión en el canal.
- 8-8.I La carga de 650 lb aplicada en el centro de la barra de 28 plg de largo mostrada en la figura P6-1 es soportada por un tubo de acero estándar, calibre 40 de 1½ plg. Calcule el esfuerzo en el tubo causado por flexión.
- 8-9.M La viga fabricada mostrada en la figura P6-2 debe soportar la carga mostrada en la figura P6-2. Calcule el esfuerzo causado por flexión.

- 8-10.C Una viga I de aluminio,  $19 \times 8.361$ , soporta la carga mostrada en la figura P6-8. Calcule el esfuerzo ocasionado por flexión en la viga.
- 8-11.I Una parte de un chasis de camión se compone de dos miembros acanalados, como se muestra en la figura 8-26. Si el momento en esa parte es de  $60\,000 \text{ lb}\cdot\text{pie}$ , calcule el esfuerzo flexionante en el chasis. Suponga que los dos canales actúan como una viga simple.

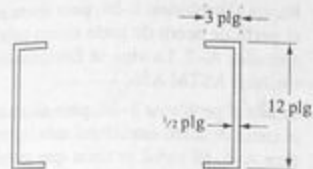


FIGURA 8-26 Componentes del chasis del camión del ejemplo 8-11.

#### Diseño de vigas

- 8-12.M Calcule el diámetro requerido de una barra circular utilizada como viga para soportar un momento flexionante de  $240 \text{ N}\cdot\text{m}$  con un esfuerzo no mayor que  $125 \text{ MPa}$ .
- 8-13.M Se va a usar una barra rectangular como una viga sometida a un momento flexionante de  $145 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Si su altura tiene que ser tres veces su ancho, calcule las dimensiones requeridas de la barra para limitar el esfuerzo a  $55 \text{ MPa}$ .
- 8-14.M La sección T mostrada en la figura P7-4 tiene que soportar un momento flexionante de  $28.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Se tiene que formar con placas de acero soldadas entre sí. Si la carga sobre la viga es una carga muerta, ¿sería satisfactorio el acero AISI 1020 laminado en caliente para las placas?
- 8-15.M La sección I modificada mostrada en la figura P7-5 se tiene que extraer de aluminio. Especifique una aleación de aluminio adecuada para que la viga soporte una carga repetida que produce un momento flexionante de  $275 \text{ N}\cdot\text{m}$ .
- 8-16.I Se tiene que usar un tubo de acero estándar como barra fija para hacer ejercicio. La barra tiene que ser de  $42 \text{ plg}$  de largo y estar simplemente apoyada en sus extremos. Especifique un tubo de diámetro adecuado si el esfuerzo de flexión debe limitarse a  $10\,000 \text{ lb}/\text{plg}^2$  cuando un hombre de  $280 \text{ lb}$  se cuelga de una mano en el centro.

- 8-17.I Un oleoducto tiene que ser soportado por vigas horizontales apoyadas en el suelo, de  $14 \text{ pies}$  de longitud. Considere las vigas como vigas simplemente apoyadas en sus extremos. Cada una soporta el peso combinado de  $50 \text{ pies}$  de tubo de  $48 \text{ plg}$  de diámetro y el petróleo que circula a través de él, aproximadamente  $42\,000 \text{ lb}$ . Suponiendo que la carga actúa en el centro de las vigas, especifique el módulo de sección requerido de la viga para limitar el esfuerzo flexionante a  $20\,000 \text{ lb}/\text{plg}^2$ . A continuación especifique un patín de ancho adecuado o una viga American Standard.
- 8-18.I Se tiene que construir una plataforma con madera de construcción terminada y madera contrachapada estándar utilizando la sección transversal mostrada en la figura P7-23. ¿Sería segura la plataforma si cuatro hombres de  $250 \text{ lb}$  cada uno, se pararan a  $2 \text{ pies}$  uno de otro, como se muestra en la figura 8-27? Considere sólo esfuerzos flexionantes (véase el capítulo 9 por lo que se refiere a esfuerzos cortantes).

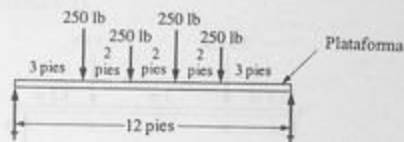


FIGURA 8-27 Cargas sobre la plataforma del ejemplo 8-18.

- 8-19.I Un trampolín tiene una sección transversal rectangular de  $30 \text{ plg}$  de ancho por  $3.0 \text{ plg}$  de espesor y está apoyado como se muestra en la figura 8-28. Calcule el esfuerzo máximo causado por flexión en él cuando una persona de  $300 \text{ lb}$  se para en su

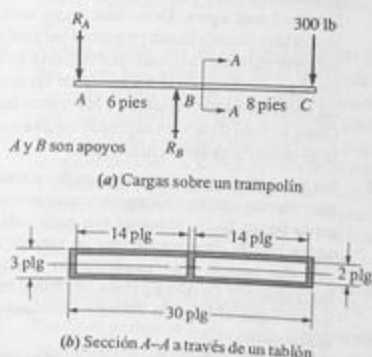


FIGURA 8-28 Trampolín del ejemplo 8-19.

extremo. ¿Sería seguro el trampolín si estuviera hecho de aluminio 6061-T4 extruido y la persona cayera en su extremo con un impacto?

- 8-20.M La carga mostrada en la figura P6-6 tiene que ser soportada por una viga de sección acopada de aluminio extruido cuya sección transversal es la mostrada en la figura P7-11. Calcule el esfuerzo máximo causado por flexión en la viga. Si se fabrica de aluminio 6061-T4 extruido y las cargas son cargas muertas, ¿sería segura la viga?
- 8-21.M El perfil extruido mostrado en la figura P7-12 se tiene que usar para soportar las cargas mostradas en la figura P6-5, el cual es un componente del armazón de una máquina industrial. Las cargas se deben a un motor montado en el armazón y se pueden considerar como cargas muertas. Especifique una aleación de aluminio adecuada para la viga.
- 8-22.M Se va a diseñar una viga para soportar las cargas mostradas en la figura 8-28. Las cuatro formas propuestas son: (a) una barra circular, (b) una ba-

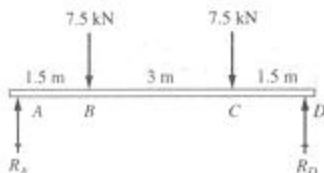


FIGURA 8-29 Viga del problema 8-22.

rra cuadrada, (c) una barra rectangular cuya altura es cuatro veces su espesor y (d) la viga American Standard más ligera. Determine las dimensiones requeridas de cada forma propuesta para limitar el esfuerzo máximo originado por flexión a 80 MPa. En seguida compare la magnitud de las áreas de las secciones transversales de las cuatro formas. Como el peso de la viga es proporcional a su área, la de menor área será la más ligera.

- 8-23.1 Un patio de juegos para niños incluye una viga que soporta cuatro columpios, como se muestra en la figura 8-30. Suponga que cada columpio carga 300 lb. Se pretende usar un tubo de acero estándar para la viga, manteniendo el esfuerzo originado por flexión a menos de 10 000 lb/plg<sup>2</sup>. Especifique el tubo de diámetro adecuado para usarlo como viga.
- 8-24.1 Un viga de 60 plg de largo simplemente apoyada en sus extremos tiene que soportar dos cargas de

4800 lb, cada una colocada a 14 plg de un extremo. Especifique el tubo de acero más ligero adecuado para la viga, cuadrado o rectangular, para producir un factor de diseño de 4 basado en la resistencia a la cedencia. El tubo se tiene que formar en frío con acero ASTM A500, grado A.

- 8-25.I Repita el problema 8-24, pero ahora especifique viga I de aluminio estándar más ligera del apéndice A-11. La viga se extruirá utilizando aleación 6061-T6.
- 8-26.I Repita el problema 8-24, pero ahora especifique el perfil de acero de patin ancho más ligero del apéndice A-7. La viga se fabricará de acero estructural ASTM A36.
- 8-27.I Repita el problema 8-24, pero ahora especifique el canal de acero estructural más ligero del apéndice A-6. El canal se tiene que instalar con las patas hacia abajo de modo que las cargas se puedan aplicar al dorso plano del alma del canal. El canal se fabricará de acero estructural ASTM A36.
- 8-28.I Repita el problema 8-24, pero ahora especifique el tubo de acero cédula 40 estándar más ligero del apéndice A-12. El tubo tiene que ser de acero ASTM A501 formado en caliente.
- 8-29.I Repita el problema 8-24, pero ahora diseñe la viga de cualquier material y perfil de su elección que sea segura y más ligera que las de los problemas 8-24 a 8-28.
- 8-30.I El perfil mostrado en la figura P7-15 tiene que ser de plástico extruido y usarse como viga simplemente apoyada, de 12 pies de largo, para soportar dos cables eléctricos cuyo peso total es de 6.5 lb/pe de longitud. Especifique un plástico adecuado para que la extrusión produzca un factor de diseño de 4.0 basado en la resistencia a la flexión.
- 8-31.C La carga mostrada en la figura P6-34 representa la carga sobre una viga de piso de un edificio comercial. Determine el momento flexionante máximo en la viga y, a continuación, especifique un patin de perfil ancho que limite el esfuerzo a 150 MPa.
- 8-32.M La figura P6-35 representa la carga sobre una flecha de motor; los dos apoyos son cojinetes en el bloque del motor. La carga mayor entre los apoyos se debe al rotor más las fuerzas dinámicas. La menor se debe a las cargas externas. Utilizando acero AISI 1141 OQT 1300 para la flecha, especifique un diámetro adecuado basado únicamente en el esfuerzo de flexión. Use un factor de diseño de 8 basado en la resistencia última.
- 8-33 a  
8-42. Utilizando la carga indicada especifique el perfil de patin ancho estándar más ligero (perfil W) que limite el esfuerzo originado por flexión al esfuerzo permisible de la especificación AISC. Todos



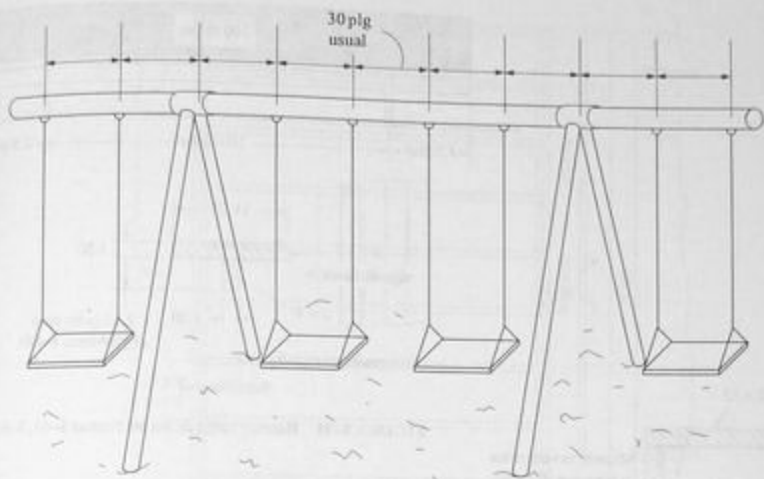


FIGURA 8-30 Columpios del problema 8-23.

las cargas son estáticas y las vigas son de acero estructural ASTM A36.

- 8-33.I Use la carga de la figura P6-3.  
 8-34.C Use la carga de la figura P6-7.  
 8-35.C Use la carga de la figura P6-8.  
 8-36.C Use la carga de la figura P6-11.  
 8-37.C Use la carga de la figura P6-16.  
 8-38.C Use la carga de la figura P6-36.  
 8-39.C Use la carga de la figura P6-40.  
 8-40.C Use la carga de la figura P6-52.  
 8-41.C Use la carga de la figura P6-63.  
 8-42.I Use la carga de la figura P6-64.
- 8-43 a Repita los problemas 8-33 a 8-42 pero ahora especifique la viga American Standard más ligera (perfil S).  
 8-52
- 8-53 a Repita los problemas 8-33 a 8-42 pero ahora use acero estructural de baja aleación y alta resistencia ASTM A572 grado 60.  
 8-62
- 8-63.I Una vigueta de piso de un edificio tiene que ser una vigueta de madera estándar seleccionada del apéndice A-4. Si la viga tiene que estar simplemente apoyada en sus extremos y soportar una carga uniformemente distribuida de 125 lb/pie a lo largo de

los 10 pies de longitud, especifique un tamaño adecuado para la viga. La viga será de pino del sur grado núm. 2. Considere sólo esfuerzo flexionante.

- 8-64.I Una banca para jugadores de fútbol debe soportar la carga mostrada en la figura 8-31 que se produce cuando 10 jugadores, cada uno de 300 lb de peso, se sientan muy cerca uno del otro de modo que cada uno ocupa 18 plg de longitud de la banca. Si la sección transversal de la banca es como se muestra en la figura 8-31, ¿sería segura para esfuerzo flexionante? La madera es de abeto grado núm. 2.
- 8-65.I Se va a diseñar una banca para jugadores de fútbol. Tiene que soportar la carga mostrada en la figura 8-31 que se produce cuando 10 jugadores, cada uno de 300 lb de peso, se sientan codo con codo de modo que cada uno ocupe 18 plg de la longitud de la banca. La banca debe tener perfil de T y estar hecha de abeto grado núm. 2, como se muestra el tablón de asiento de 2 x 12. Especifique el miembro vertical requerido de la T si la banca debe ser segura para esfuerzo flexionante.
- 8-66.I Repita el problema 8-65, pero ahora use la sección transversal mostrada en la figura 8-32.
- 8-67.I Repita el problema 8-65, pero utilice cualquier sección transversal de su elección hecha de vigas de madera estándar dadas en el Apéndice A-4.

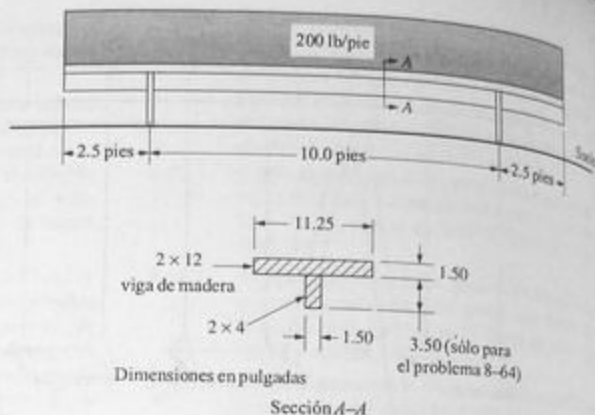


FIGURA 8-31 Banca y carga de los problemas 8-64, 8-65, 8-66 y 8-67



FIGURA 8-32 Sección transversal de la banca del problema 8-66.

Trate de lograr un diseño más ligero que el del problema 8-65 u 8-66. Observe que un diseño más ligero tendría una menor área de sección transversal.

- 8-68.I Se va a diseñar una cubierta de madera para soportar una carga uniformemente distribuida de 100 lb/pie<sup>2</sup> sobre toda su área. Las viguetas se tienen que disponer como se muestra en la figura 8-33, a 16 plg entre centros. Si la cubierta tiene que ser de 8 por 12 pies, determine el tamaño requerido de las viguetas. Use secciones de madera estándar del apéndice A-4 y abeto núm. 2.
- 8-69.I Repita el problema 8-68 con las viguetas dispuestas a lo largo de la longitud de 12 pies y no a lo largo del ancho de 8 pies.
- 8-70.I Repita el problema 8-68, con vigas de apoyo a 18 plg desde los extremos de las viguetas en lugar de en los extremos.
- 8-71.I Repita el problema 8-69, con vigas de apoyo a 18 plg de los extremos de las viguetas en lugar de en los extremos.
- 8-72.I Para el diseño de la cubierta mostrada en la figura 8-33 especifique un tamaño adecuado para las vigas transversales que soportan las viguetas.
- 8.73.I Diseñe un puente sobre un pequeño arroyo. Suponga que se dispone de apoyos rígidos en ambas márgenes del arroyo, separados 10 pies. El puente tiene que ser de 3.0 pies de ancho y soportar una carga uniformemente distribuida de 60 lb/pie<sup>2</sup> sobre toda su área. Diseñe sólo los tableros de la cubierta y las vigas. Use dos o más vigas de cual-

quier tamaño de las que vienen en el apéndice A-4 u otras de su propio diseño.

- 8-74.I ¿Sería seguro el puente que diseñó en el problema 8-73 si un caballo y su jinete que pesan 2200 lb pasaran lentamente a través de él?
- 8-75.I El montador de transmisiones en una fábrica tiene que suspender una máquina de 10 500 lb de una viga de 12.0 pies de longitud de modo que un camión pueda retroceder debajo de ella. Suponga que la viga está simplemente apoyada en sus extremos. Dos cables soportan la carga, cada uno a 3.0 pies de uno de los apoyos. Diseñe una viga adecuada. Considere vigas estándar de madera o acero o una de su propio diseño.
- 8-76.I En una producción de teatro experimental, un pirata debe cumplir con el castigo de "caminar sobre el tablón" hasta que se caiga al mar. Si el pirata pesa 220 lb, ¿sería seguro el diseño mostrado en la figura 8-34? De no serlo, diseñe uno que sí lo sea.
- 8-77.M Una rama de un árbol tiene las dimensiones aproximadas mostradas en la figura 8-35. Suponiendo que la resistencia a la flexión de la madera sea similar a la del abeto núm. 3, ¿sería seguro para una persona de 135 kg de masa sentarse en el colmo del pino?
- 8-78.I ¿Sería seguro utilizar un tabla estándar de 2x4 de pino del sur grado 2 como palanca, como se muestra en la figura 8-36, para levantar un lado de una máquina? Si no, ¿qué sugeriría utilizar?

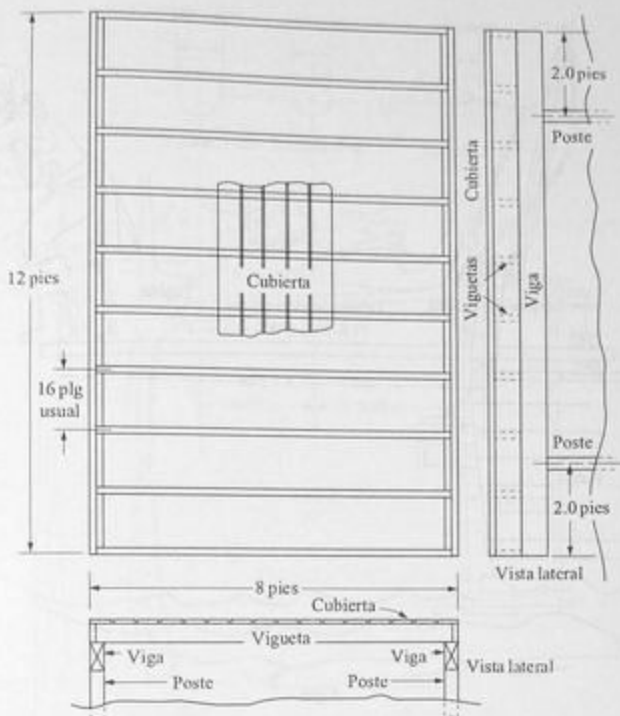


FIGURA 8-33 Diseño de la cubierta del problema 8-68.

- 8-79.M La figura P7-6 muestra la sección transversal de una viga de plástico extruido hecha de nylon 6/6. Especifique la carga máxima uniformemente distribuida en N/mm que la viga podría soportar al estar simplemente apoyada con un claro de 0.80 m. El esfuerzo máximo originado por flexión no debe ser de más de la mitad de la resistencia a la flexión del nylon.
- 8-80.M La viga I de la figura P7-9 debe soportar dos cargas concentradas idénticas de 2.25 kN cada una, simétricamente colocadas sobre una viga simplemente apoyada con un claro de 0.60 m. Cada carga actúa a 0.2 m de los extremos. ¿Cuál de los plásticos del apéndice A-19 soportaría estas cargas con un esfuerzo originado por flexión de no más de un tercio de su resistencia a la flexión?
- 8-81.M Un puente de un juego de construcción de juguete se tiene que fabricar de polipropileno con la resis-

tencia a la flexión dada en el apéndice A-19. En la figura P7-5 se muestra la sección transversal de una viga. ¿Qué carga concentrada máxima se podría aplicar a la mitad de la viga, si el claro fuera de 1.25 m y los extremos estuvieran simplemente apoyados? No sobrepase la mitad de la resistencia a la flexión del plástico.

- 8-82.M Un elemento estructural de una impresora de computadora debe soportar la carga mostrada en la figura 8-37 donde la carga uniformemente distribuida representa los componentes electrónicos montados en una tarjeta de circuito impreso y las cargas concentradas aplicadas por el suministro de energía. Se pretende fabricar la viga de policarbonato con la sección transversal mostrada en la figura P7-12. Calcule el esfuerzo en la viga y compárelo con la resistencia a la flexión del policarbonato del apéndice A-19.

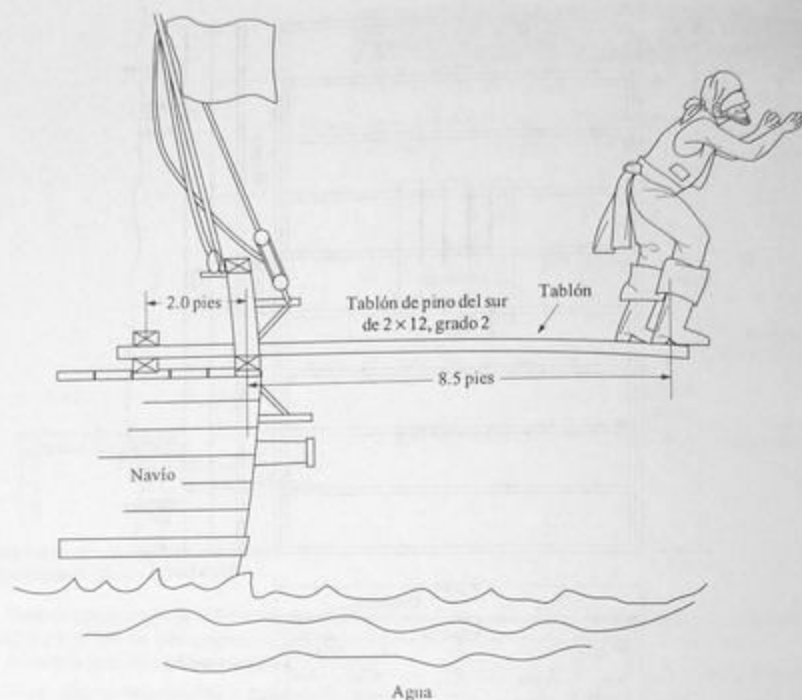


FIGURA 8-34 Pirata sometido al castigo de caminar sobre el tablón hasta caer al mar, problema 8-76.

- 8-83.I Se propone fabricar los escalones de una resbaladilla infantil de poliestireno moldeado con la sección transversal mostrada en la figura P7-20. Los escalones deben ser de 14.0 plg de ancho y estarán simplemente apoyados en sus extremos. ¿Qué peso máximo se puede aplicar en el centro de los escalones si el esfuerzo originado por flexión no debe exceder de un tercio de la resistencia a la flexión del policarbonato dado en el apéndice A-19?
- 8-84.I El perfil mostrado en la figura P7-15 se usa como viga de cochera sin puertas. El claro de la viga será de 8.0 pies. Calcule la carga uniformemente distribuida máxima que la viga puede soportar si se fabrica de aluminio 6061-T4. Use un factor de diseño de 2 basado en la resistencia a la cedencia.
- 8-85.I La figura P7-14 muestra la sección transversal de una viga de aluminio formada con una placa plana

sujeta a la parte inferior de un perfil acopado laminado. Si la viga se usa como viga en voladizo, de 24 plg de largo, calcule la carga concentrada permisible máxima que se puede aplicar al extremo si el esfuerzo máximo no debe ser de más de un octavo de la resistencia última del aluminio 2014-T4.

- 8-86.I Repita el problema 8-85 con la sección acopada sin la tapa.
- 8-87.I La figura P7-19 muestra la sección transversal de una viga que se tiene que extraer de aleación de aluminio 6061-T6. Si la viga se tiene que usar como voladizo, de 42 plg de largo, calcule la carga máxima permisible que se distribuye de modo uniforme y que podría soportar al mismo tiempo que se limita el esfuerzo causado por flexión a un sexto de la resistencia última del aluminio.
- 8-88.I Repita el problema 8-87 con la figura P7-20 como sección transversal y aleación de fundición 356.0-T6.

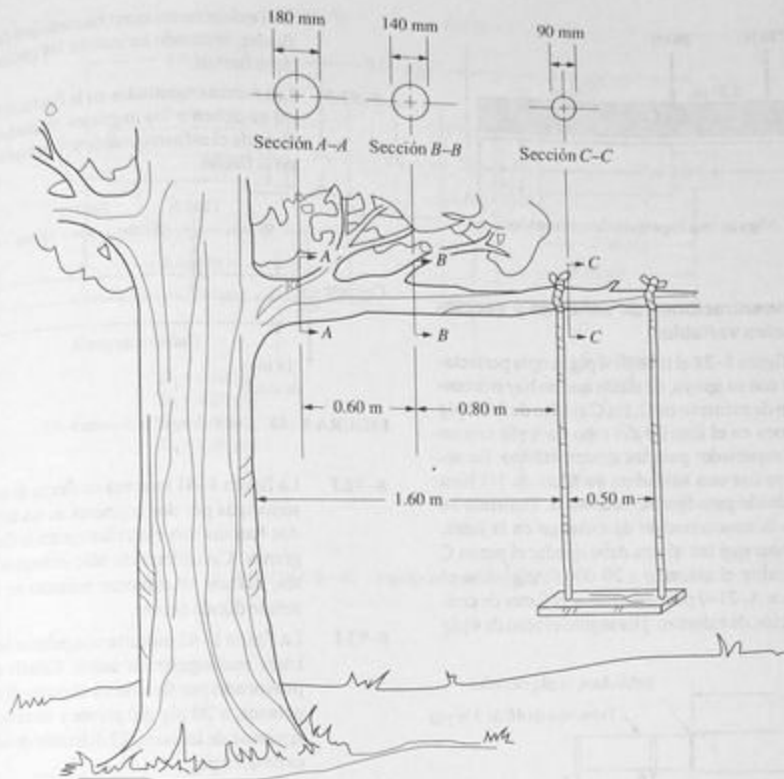


FIGURA 8-35 Rama y columpio del problema 8-77.



FIGURA 8-36 Tabla de 2 x 4 usada como palanca en el problema 8-78.

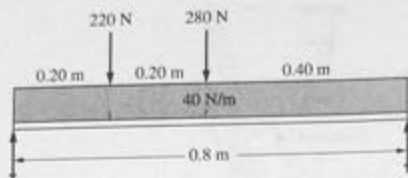


FIGURA 8-37 Viga de una impresora de computadora, problema 8-82.

### Vigas con concentraciones de esfuerzo y secciones transversales variables

8-89.I En la figura 8-38 el tubo de 4 plg acopla perfectamente con su apoyo, de modo que no hay concentración de esfuerzo en  $D$ . En  $C$  el tubo de 3 1/2 plg se coloca en el interior del tubo de 4 plg con un anillo espaciador para un ajuste perfecto. En seguida se usa una soldadura de filete de 1/4 bien redondeado para fijar las secciones. Teniendo en cuenta la concentración de esfuerzo en la junta, determine qué tan afuera debe quedar el punto  $C$  para limitar el esfuerzo a 20 000 lb/plg<sup>2</sup>. Use el apéndice A-21-9 para determinar el factor de concentración de esfuerzo. ¿Es seguro el tubo de 4 plg en  $D$ ?

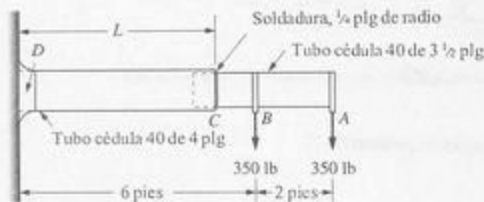


FIGURA 8-38 Datos para el problema 8-89.

8-90.M La figura 8-39 muestra una flecha circular de una transmisión. En los puntos  $A$ ,  $C$  y  $E$  se montan engranes. En  $B$  y  $D$  van los cojinetes de apoyo. Se muestran las fuerzas transmitidas por los engranes a la flecha, todas dirigidas hacia abajo. Calcule

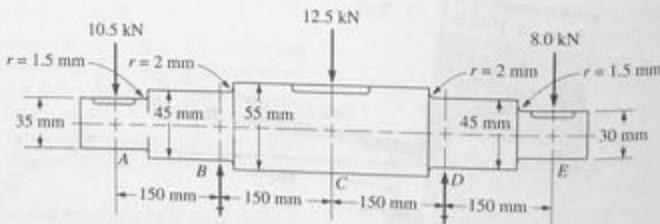


FIGURA 8-39 Datos para el problema 8-90.

le el esfuerzo máximo causado por flexión en la flecha, teniendo en cuenta las concentraciones de esfuerzo.

8-91.M Las fuerzas mostradas en la flecha de la figura 8-40 se deben a los engranes montados en  $B$  y  $C$ . Calcule el esfuerzo máximo originado por flexión en la flecha.

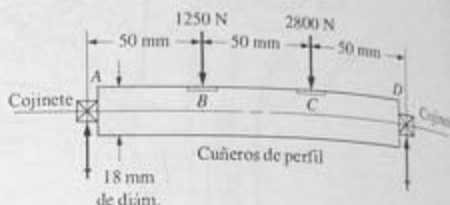


FIGURA 8-40 Datos para el problema 8-91.

8-92.I La figura 8-41 muestra un flecha de una máquina soportada por dos cojinetes en sus extremos. Las dos fuerzas son ejercidas contra la flecha por engranes. Considerando sólo esfuerzos flexionantes, calcule el esfuerzo máximo en la flecha y señale dónde ocurre.

8-93.I La figura 8-42 muestra una palanca hecha de una barra rectangular de acero. Calcule el esfuerzo provocado por flexión en el punto de apoyo de la palanca, a 20 plg del pivote y en cada uno de los agujeros de la barra. El diámetro de cada agujero es de 0.75 plg.

8.94.I Repita el problema 8-93, pero use el diámetro de los agujeros como de 1.38 plg.

8-95.I En la figura 8-42, los agujeros en la barra permiten cambiar la longitud de la palanca con respecto al pivote. Calcule el esfuerzo flexionante máximo en la palanca conforme el pivote se cambia a cada uno de los agujeros. Use el diámetro de los agujeros como de 1.25 plg.

8-96.M La ménsula mostrada en la figura 8-43 soporta las cargas opuestas creadas por un resorte. Si la fuerza  $F$  es de 2500 N, calcule el esfuerzo flexionante en una sección, como la  $A-A$ , afuera de los agujeros.

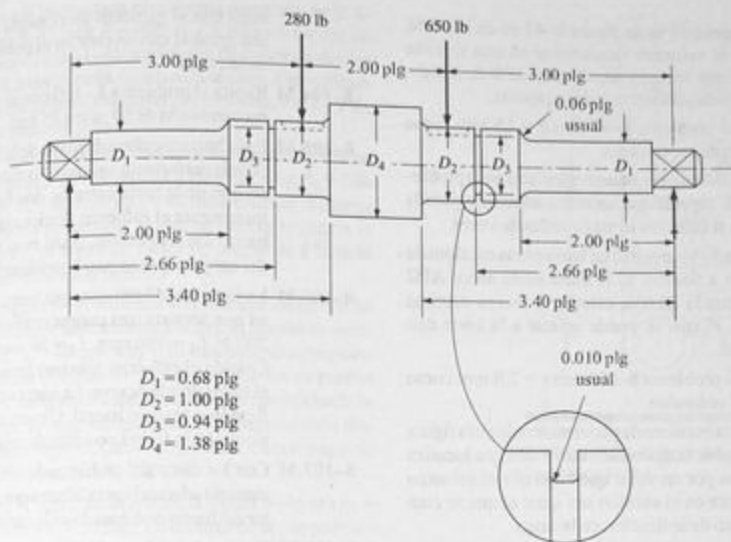


FIGURA 8-41 Flecha del problema 8-92.

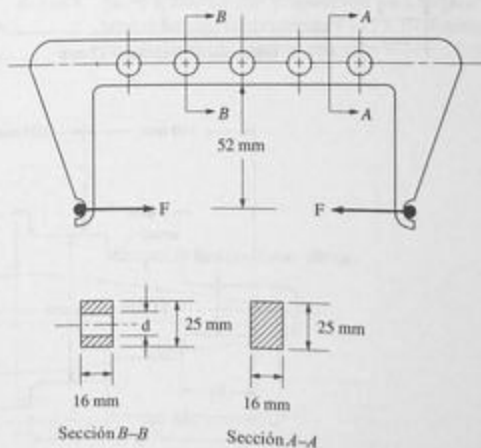
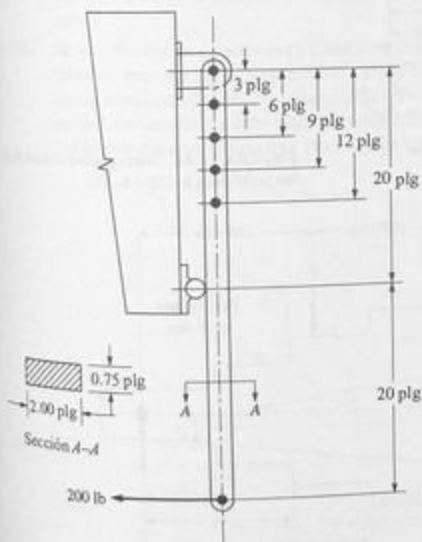
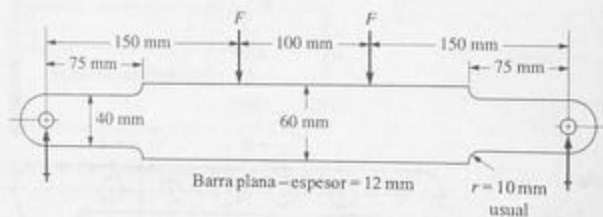


FIGURA 8-43 Ménsula de los problemas 8-96 a 8-99.

FIGURA 8-42 Palanca de los problemas 8-93 a 8-95.

- 8-97.M Si la fuerza,  $F$ , en la figura 8-43 es de 2500 N, calcule el esfuerzo flexionante en una sección que pase por los agujeros, tal como la  $B-B$ . Use  $d = 12$  mm como diámetro de los agujeros.
- 8-98.M Repita el problema 8-97 con  $d = 15$  mm como diámetro de los agujeros.
- 8-99.M Para el esfuerzo resultante calculado en el problema 8-98, especifique un acero adecuado para la ménsula si la fuerza se repite miles de veces.
- 8-100.M La figura 8-44 muestra una barra plana escalonada sometida a flexión. Si la barra es de acero AISI 1040 estirado en frío, calcule la fuerza máxima repetida,  $F$ , que se puede aplicar a la barra con seguridad.
- 8-101.M Repita el problema 8-100 con  $r = 2.0$  mm como radio del redondeo.
- 8-102.M En la barra escalonada plana mostrada en la figura 8-44 cambie la dimensión de 75 mm que localiza el escalón por un valor que haga que el esfuerzo flexionante en el escalón sea igual al que se crea en el punto de aplicación de la carga.
- 8-103.M En la barra escalonada plana mostrada en la figura 8-44 cambie el tamaño del radio de redondeo que



haga que el esfuerzo flexionante en el redondeo sea igual al que se crea en el punto de aplicación de la carga.

- 8-104.M Repita el problema 8-100 con el peralte de la barra cambiado de 60 mm a 75 mm.
- 8-105.M En la barra escalonada plana de la figura 8-44, ¿podría perforar un agujero a la mitad del peralte de 60 mm de la barra entre las dos fuerzas sin que se incremente el esfuerzo flexionante máximo en la barra? De ser posible, ¿cuál es el tamaño máximo del agujero que se puede perforar?
- 8-106.M La figura 8-45 muestra una barra escalonada plana que soporta tres cargas concentradas. Sea  $P = 200$  N,  $L_1 = 180$  mm,  $L_2 = 80$  mm y  $L_3 = 40$  mm. Calcule el esfuerzo máximo creado por flexión y el lugar donde ocurre. La barra se refuerza contra flexión y torsión lateral. Observe que las dimensiones en la figura no están dibujadas a escala.
- 8-107.M Con los datos del problema 8-106, especifique un material adecuado para la barra que produzca un factor de diseño de 8 basado en la resistencia última.
- 8-108.M Repita el problema 8-107 con  $r = 1.50$  mm como radio del redondeo.

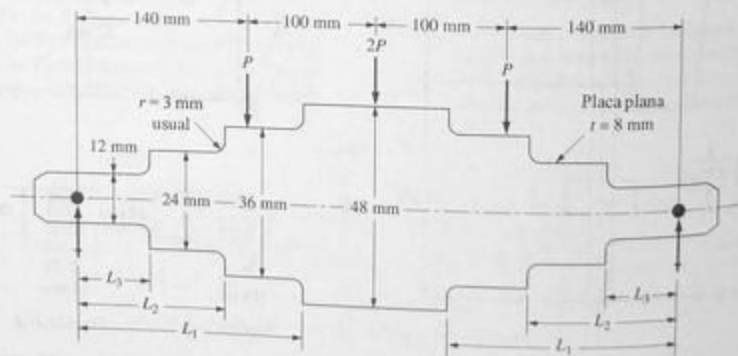


FIGURA 8-44 Barra plana escalonada de los problemas 8-100 a 8-105.

FIGURA 8-45 Placa plana escalonada de los problemas 8-106 a 8-110.



8-109.M Para la barra plana escalonada mostrada en la figura 8-45, sea  $P = 400\text{ N}$ . La barra debe ser de titanio Ti-6Al-4V y se desea un factor de diseño de 8 basado en la resistencia última. Especifique las longitudes máximas permisibles,  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  que serían seguras.

8-110.M La barra plana escalonada de la figura 8-45 debe ser de acero AISI 4140 OQT 1100. Use  $L_1 = 180\text{ mm}$ ,  $L_2 = 80\text{ mm}$  y  $L_3 = 40\text{ mm}$ . Calcule la fuerza máxima permisible  $P$  que se podría aplicar a la barra si se busca un factor de diseño de 8 basado en la resistencia última.

8-111.M La figura 8-46 muestra una barra plana que tiene un espesor uniforme de 20 mm. El peralte se reduce de  $h_1 = 40\text{ mm}$  a  $h_2 = 20\text{ mm}$  para ahorrar peso. Calcule el esfuerzo creado por flexión en puntos de la barra separados 40 mm de los apoyos hacia la carga. En seguida grafique el esfuerzo contra distancia al apoyo. La barra es simétrica con respecto a su centro. Sea  $P = 5.0\text{ kN}$ .

8-112.M Para la barra mostrada en la figura 8-46 sea  $h_1 = 60\text{ mm}$  y  $h_2 = 20\text{ mm}$ . La barra debe ser de policarbonato. Calcule la carga máxima permisible  $P$  que producirá un factor de diseño de 4 basado en la resistencia a la flexión del plástico. La barra es simétrica con respecto a su centro.

8-113.M En la figura 8-46 la carga  $P = 1.20\text{ kN}$  y la barra debe ser de acero AISI 5160 OQT 1300. Calcule las dimensiones requeridas  $h_1$  y  $h_2$  que producirán un factor de diseño de 8 basado en la resistencia última. La barra es simétrica con respecto a su centro.

8-114.I Se va a diseñar un soporte para almacenar tubos, como se muestra en la figura 8-47. Cada tubo ejerce una fuerza de 2500 lb sobre el brazo de soporte. La altura de éste debe disminuir de su extremo libre hacia su extremo fijo, pero el espesor se

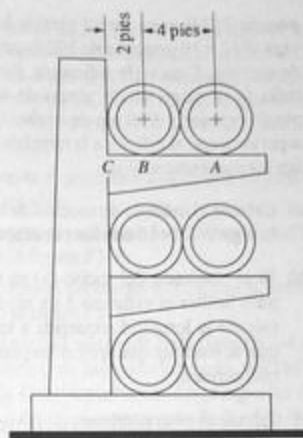


FIGURA 8-47 Soporte para almacenar tubos del problema 8-114.

mantendrá constante, 1.50 plg. Determine la altura requerida del brazo en las secciones B y C, considerando sólo esfuerzo flexionante. Use acero AISI 1040 laminado en caliente para fabricar los brazos y un factor de diseño de 4 basado en la resistencia a la cedencia.

8-115.I Especifique el perfil para viga de patín ancho más ligero (perfil W) que sea capaz de soportar una carga estática uniformemente distribuida de 2.5 kip/pie a todo lo largo del claro simplemente apoyado, de 12 pies de longitud. Use el acero estructural de la especificación AISC y el ASTM A36.

8-116.I Se va a evaluar una proposición para reducir el peso de la viga del problema 8-115. El resultado de ese problema requirió una viga W14 x 26 que

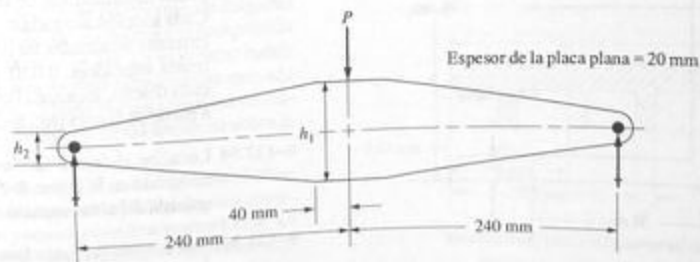


FIGURA 8-46 Barra plana abusada de los problemas 8-111 a 8-113.

pesaría 312 lb para los 12 pies de longitud. Una viga W12×16 pesaría sólo 192 lb pero su módulo de sección,  $S$ , no sería suficiente. Para incrementarlo, se propone añadir placas de acero de 0.25 plg de espesor y 3.50 plg de ancho, tanto al patín superior como al inferior a la mitad de la viga. Realice los siguientes análisis:

- Calcule el módulo de sección de la porción de la viga W12×16 con los cubreplacas.
- Si el resultado del inciso (a) es satisfactorio para limitar el esfuerzo a un nivel aceptable, calcule la longitud requerida a lo largo de la cual se tendrían que aplicar las placas al 0.5 pie más cercano.
- Calcule el peso resultante de la viga compuesta y compárelo con la viga original W14×26.

8-117.I La figura P7-26 muestra una viga compuesta de un canal y un perfil de viga American Standard. Si la viga está simplemente apoyada y soporta una carga uniformemente distribuida sobre un claro de 15.0 pies, calcule la carga permisible en la viga compuesta y en el mismo perfil  $S$  solo. La carga es estática y se debe usar la especificación del AISC para acero estructural A36.

#### Centro de flexión

8-118.M Localice el centro de flexión del canal mostrado en la figura 48 medido a partir de la cara izquierda del alma vertical.

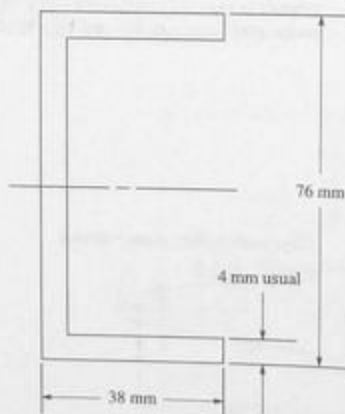


FIGURA 8-48 Canal del problema 8-118.

8-119.M Una compañía planea fabricar tres vigas de perfil en U laminándolas de lámina de aluminio plana. Cada canal debe tener las dimensiones mostradas en la figura 8-48, pero diferentes espesores, 0.50, 1.60 y 3.00 mm. Para cada diseño, calcule el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal y localice el centro de flexión, medido a partir de la cara izquierda del alma vertical.

8-120.I Localice el centro de flexión de la sección acopada que se muestra en la figura 8-49 y que se mide a partir de la cara izquierda del alma vertical.

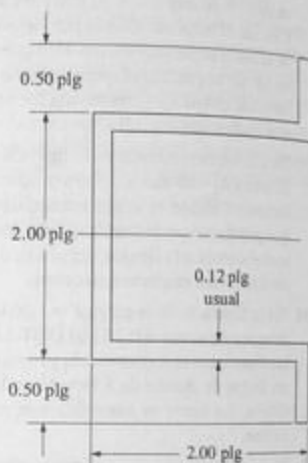


FIGURA 8-49 Sección acopada del problema 8-120.

8-121.I Una compañía planea fabricar tres secciones acopadas laminándolas de lámina de aluminio plana. Cada sección acopada debe tener las dimensiones externas mostradas en la figura 8-49, pero diferentes espesores, 0.020, 0.063 y 0.125 plg. Para cada diseño, localice el centro de flexión, medido a partir de la cara izquierda del alma vertical.

8-122.M Localice el centro de flexión del canal alabado mostrado en la figura 8-50, a partir de la cara izquierda del alma vertical.

8-123.M Una compañía planea fabricar tres canales alabados mediante un proceso de laminación con lámina de aluminio plana. Cada canal debe tener las

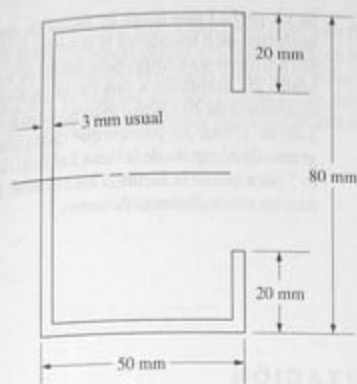


FIGURA 8-50 Canal alabiado del problema 8-122.

dimensiones externas mostradas en la figura 8-50, pero diferentes espesores, 0,50, 1,60 y 3,00 mm. Para cada diseño, localice el centro de flexión, medido a partir de la cara izquierda del alma vertical.

- 8-124.M Localice el centro de flexión de un tubo de 50 mm de diámetro externo y 4 mm de espesor de pared.
- 8-125.I En un canal de aluminio C2 × 0.577 con su alma en posición vertical, localice el centro de flexión. Ignore el efecto de los redondeos entre los patines y el alma.
- 8-126.M Si la sección acopada mostrada en la figura P7-11 se girara 90° a partir de la posición mostrada, localice su centro de flexión.

#### Vigas hechas de materiales anisotrópicos

- 8-127.I La sección de viga mostrada en la figura P7-15 se tiene que fabricar de aluminio 6061-T6 extruido. La resistencia a la tensión permisible es de 19 ksi. Debido a las patas largas relativamente delgadas en la parte superior, la resistencia a la compresión permisible es de sólo 14 ksi. La viga debe cubrir un claro de 6,5 pies y estará simplemente apoyada en sus extremos. Calcule la carga máxima permisible que se distribuye de modo uniforme sobre la viga.
- 8-128.I Repita el problema 8-127 con un giro de 180° en la sección. Con las patas hacia abajo, se ven sometidas a tensión y son capaces de soportar 19 ksi. La parte de la sección sometida a compresión en la parte superior ahora está perfectamente apoyada y puede soportar 21 ksi.

8-129.M El perfil de la figura P7-6 se somete a una carga concentrada única aplicada en el centro de su claro de 1200 mm. La resistencia permisible a tensión es de 100 MPa, mientras que la compresión es de más o menos 70 MPa. Calcule la carga permisible.

8-130.M Repita el problema 8-129 con un giro de 180° en la sección.

8-131.M Repita el problema 8-129 con el perfil mostrado en la figura P7-8.

8-132.M Repita el problema 8-129 con el perfil mostrado en la figura P7-9.

8-133.M El perfil T mostrado en la figura P7-4 se tiene que fabricar de hierro colado gris, ASTM A48 grado 40. Debe soportar dos cargas iguales  $P$ , aplicadas a 1,0 m de los extremos de la viga de 2,80 m de longitud. Especifique la carga estática máxima  $P$  que la viga podría soportar. Use  $N = 4$ .

8-134.M El perfil I modificado mostrado en la figura P7-5 debe soportar una carga estática uniformemente distribuida a todo lo largo de su longitud de 1,20 m. Especifique la carga máxima permisible considerando que la viga tiene que ser de hierro maleable, ASTM A220, clase 80002. Use  $N = 4$ .

8-135.M Repita el problema 8-134 con un giro de 180° en la viga.

8-136.M Para la viga mostrada en la figura 8-51 de hierro dúctil, ASTM A536, grado 120-90-2, calcule la carga máxima  $P$  que puede soportar con factor de

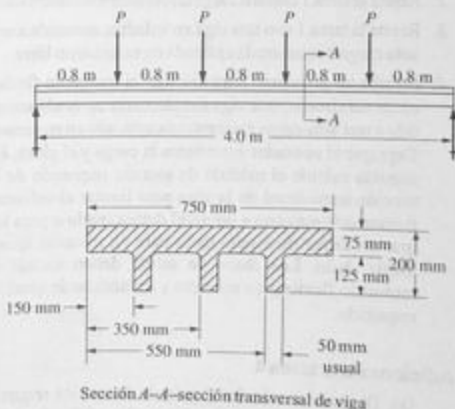


FIGURA 8-51 Viga ancha del problema 8-136.

diseño resultante de 10 basado ya sea en la resistencia última a la tensión o a la compresión.

- 8-137.M Repita el problema 8-136 con el peralte de las nervaduras verticales incrementado por un factor de 2.0.
- 8-138.M Los problemas del 8-133 al 8-137 ilustran que un perfil I modificado es el que casi optimiza el uso de la resistencia disponible de un material de diferentes resistencias a tensión y a compresión. Dise-

ñe un perfil I que tenga un factor de diseño con sea a tensión o a compresión, hecho de hierro gris, grado 20, sometido a una carga uniformemente distribuida de 20 kN/m a lo largo de su longitud de 1.20 m. (Nota: Es posible que desee usar el programa de cómputo de la tarea 3 al final del capítulo 7 para que se le faciliten los cálculos. Se puede usar un procedimiento de tanteo.)

## TAREAS DE COMPUTACIÓN

1. Escriba un programa para calcular el esfuerzo flexionante máximo en una viga simplemente apoyada sometida a una sola carga concentrada en su centro. Deje que el operador introduzca la carga, el claro y las propiedades de sección de la viga. Los datos de salida deben incluir el momento flexionante máximo y el esfuerzo flexionante máximo e indicar dónde ocurre el esfuerzo máximo.

### Adiciones a la tarea 1

- (a) Para el esfuerzo calculado, determine la resistencia del material requerida para que la viga produzca una factor de diseño dado.
  - (b) Además de (a) incluir una tabla de propiedades de un material seleccionado tal como los datos para acero del apéndice A-13. A continuación busque un acero adecuado en la tabla del cual se pueda hacer la viga.
2. Repita la tarea 1 con una carga uniformemente distribuida.
  3. Repita la tarea 1 con una viga en voladizo sometida a una sola carga concentrada aplicada en su extremo libre.
  4. Escriba un programa para calcular el momento flexionante máximo en una viga simplemente apoyada sometida a una sola carga concentrada aplicada en su centro. Deje que el operador introduzca la carga y el claro. En seguida calcule el módulo de sección requerido de la sección transversal de la viga para limitar el esfuerzo flexionante máximo a un nivel determinado o para lograr un factor de diseño dado para un material igualmente dado. Los datos de salida deben incluir el momento flexionante máximo y el módulo de sección requerido.

### Adiciones a la tarea 4

- (a) Después de calcular el módulo de sección requerido, haga que el programa termine el diseño de la sección transversal de la viga con un perfil general

determinado, tal como uno rectangular, con una relación específica de espesor a peralte (véase el problema 8-13), o circular.

- (b) Incluya una tabla de propiedades de secciones de viga estándar como las de los apéndices A-4 a A-12 y haga que el programa busque una sección de viga adecuada que produzca el módulo de sección requerido.
5. Repita la tarea 4, pero ahora con una carga uniformemente distribuida.
  6. Repita la tarea 4 con la carga descrita en el problema 8-22.
  7. Repita la tarea 4 con el patrón de carga asignado por el instructor.
  8. Escriba un programa de cómputo que facilite la solución del problema 8-138, incluido el cálculo de las propiedades de sección del perfil I modificado con las técnicas del capítulo 7. Use el patrón de carga de la figura P6-3, pero deje que el usuario especifique el claro de la viga, la magnitud de la carga y la ubicación de la misma.
  9. Escriba un programa de cómputo que facilite la solución de problemas como el problema 8-116. Generalice el programa, permitiendo que el usuario pueda introducir la carga sobre la viga, las propiedades de sección deseadas y las dimensiones de las placas que van a ser añadidas a la sección de viga básica.
  10. Escriba un programa de cómputo para realizar los cálculos exigidos en el problema 8-111, pero haga el programa más general y permita que el usuario introduzca los valores de la carga, el claro, las dimensiones de la sección transversal de la viga y el intervalo para calcular el esfuerzo flexionante. Haga que el programa dibuje la gráfica de esfuerzo contra posición en la viga.
  11. Escriba un programa de cómputo para localizar el centro de flexión de la sección en U generalizada mostrada en la figura 8-48. Permita que el usuario introduzca las dimensiones.

- o casi  
na, ya  
o gris,  
mente  
tud de  
l pro-  
apítu-  
puede
12. Escriba un programa para localizar el centro de flexión de la sección acopada generalizada mostrada en la figura 8-49. Permita que el usuario introduzca todas las dimensiones. Se pueden usar técnicas de ajuste de curvas e interpolación para interpretar la gráfica mostrada en la figura 8-21.

13. Escriba un programa de cómputo para localizar el centro de flexión del canal alabiado mostrado en la figura 8-50. Deje que el usuario introduzca todas las dimensiones. Se pueden usar técnicas de ajuste de curvas e interpolación para interpretar la gráfica de la figura 8-21.

12. Escriba un programa para localizar el centro de flexión de la sección acopada generalizada mostrada en la figura 8-49. Permita que el usuario introduzca todas las dimensiones. Se pueden usar técnicas de ajuste de curvas e interpolación para interpretar la gráfica mostrada en la figura 8-21.

13. Escriba un programa de cómputo para localizar el centro de flexión del canal alabiado mostrado en la figura 8-50. Deje que el usuario introduzca todas las dimensiones. Se pueden usar técnicas de ajuste de curvas e interpolación para interpretar la gráfica de la figura 8-21.



# 9

## Esfuerzos cortantes en vigas

### 9-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

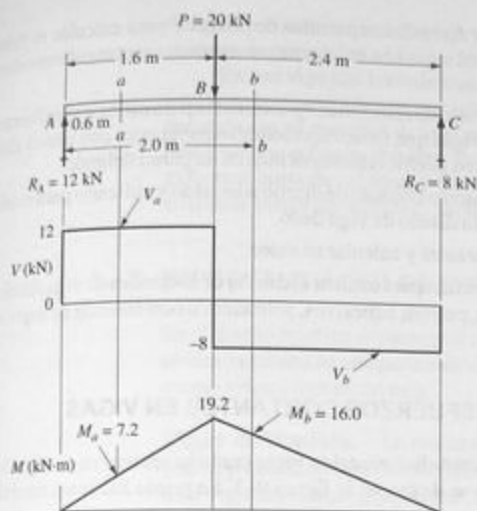
Continuando con el análisis de vigas, este capítulo se ocupa de los esfuerzos creados en una viga por la presencia de fuerzas cortantes. Tal como se muestra en la figura 9-1, las fuerzas cortantes se visualizan actuando en la sección de una viga, en forma transversal, es decir, perpendiculares al eje de la viga. Por tanto tienden a crear *esfuerzos cortantes transversales*, en ocasiones llamados *esfuerzos cortantes verticales*.

Pero si se aísla un pequeño elemento sometido a tales esfuerzos, como se muestra en la figura 9-2, se ve que también deben existir esfuerzos cortantes horizontales para que el elemento esté en equilibrio. De este modo, tanto los esfuerzos cortantes verticales como los horizontales, que tienen la misma magnitud en un punto dado, son creados por esfuerzos cortantes en vigas.

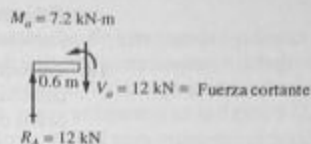
Después de terminar el estudio de este capítulo, el lector será capaz de:

1. Describir las condiciones en las cuales se crean los esfuerzos cortantes en vigas.
2. Calcular la magnitud de los esfuerzos cortantes en vigas con la fórmula general de cortante.
3. Definir y evaluar el *momento estático* requerido en el análisis de esfuerzos cortantes.
4. Especificar dónde ocurre el esfuerzo cortante máximo en la sección transversal de una viga.
5. Calcular el esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección transversal de una viga.

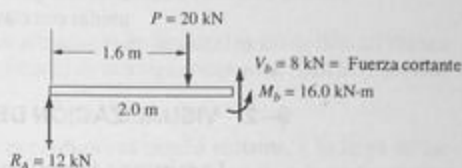




(a) Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante

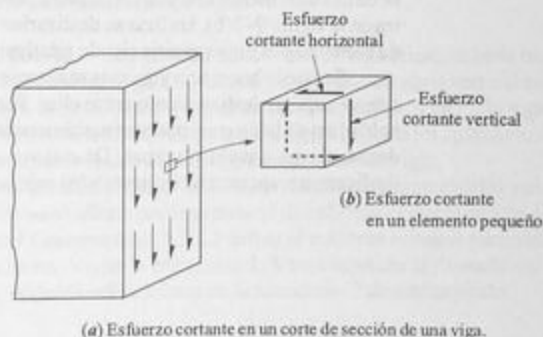


(b) Diagrama de cuerpo libre en a-a



(c) Diagrama de cuerpo libre en b-b

FIGURA 9-1 Fuerzas cortantes en vigas.



(a) Esfuerzo cortante en un corte de sección de una viga.

FIGURA 9-2 Esfuerzo cortante en una viga.

6. Describir la distribución general del esfuerzo cortante como función de la posición en la sección transversal de una viga.
7. Entender el fundamento para el desarrollo de la fórmula general del esfuerzo cortante.
8. Describir cuatro aplicaciones de diseño donde los esfuerzos cortantes podrían ser críticos en vigas.

9. Desarrollar y usar fórmulas especiales de cortante para calcular el máximo esfuerzo cortante en vigas con secciones transversales rectangulares o circulares sólidas.
10. Entender el desarrollo de relaciones aproximadas para estimar el esfuerzo cortante máximo en vigas que tienen secciones transversales con almas altas esbeltas o aquellas con perfiles tubulares huecos de pared delgada.
11. Especificar un esfuerzo cortante de diseño adecuado y aplicarlo para evaluar la aceptabilidad de un diseño de viga dado.
12. Definir *flujo de cortante* y calcular su valor.
13. Usar el flujo de cortante para evaluar el diseño de secciones de viga fabricadas, unidas con clavos, pernos, adhesivos, soldadura u otro método de sujeción.

## 9-2 VISUALIZACIÓN DE ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS

La existencia de esfuerzo cortante horizontal en vigas también se observa en vigas hechas de varias tiras planas, como se ilustra en la figura 9-3. Se puede hacer un modelo con cartón, lámina, plástico u otros materiales.

Una tira plana delgada sería una viga muy deficiente para usarse como viga simplemente apoyada en sus extremos y sometida a una carga concentrada a la mitad de su claro. La viga se deflexionaría muchísimo y tendería a romperse con una carga muy reducida.

Al colocar varias tiras una encima de la otra se produce una viga más resistente que se deflexiona menos con una carga dada, pero sólo hasta cierto grado. Tal como se muestra en la figura 9-3(b), las tiras se deslizarían una con respecto a la otra en las superficies de contacto y la viga seguiría siendo relativamente flexible y débil.

Se puede hacer una viga más resistente y más rígida sujetando las tiras de tal modo que se evite el deslizamiento entre ellas. Esto se puede hacer con adhesivo, soldadura, soldadura de latón o sujetadores mecánicos tales como remaches, tornillos, pernos, pasadores, clavos o incluso grapas. De esta manera, se evita la tendencia a que una tira se deslice con respecto a la siguiente y los sujetadores se ven sometidos a una fuerza cortante

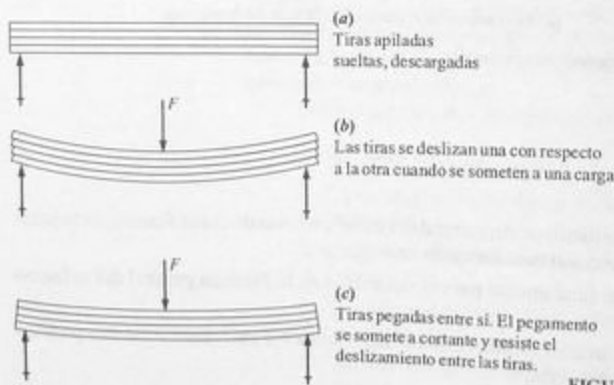


FIGURA 9-3 Ilustración de la presencia de esfuerzo cortante en una viga.

dirigida horizontal, paralela al eje neutro de la viga. Así es como se visualiza el *esfuerzo cortante horizontal* en una viga. Véase la figura 9-3(c).

En una viga maciza existe una condición similar. En este caso la tendencia al deslizamiento horizontal de una parte de la viga con respecto a otra encima o debajo de ella es resistida por el *material de la viga*. Por consiguiente, en cualquier plano horizontal se desarrolla un esfuerzo cortante. Por otra parte, según se muestra en la figura 9-2, existen esfuerzos cortantes al mismo tiempo en el plano vertical para mantener el equilibrio de cualquier elemento infinitesimal sometido a esfuerzo.

### 9-3 IMPORTANCIA DE LOS ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS

En el diseño práctico se presentan varias situaciones en las que el modo de falla tal vez sea el cizallamiento de una parte o de un sujetador de una viga compuesta. Aquí se describen cuatro situaciones como ésas.

**Vigas de madera.** La madera es por naturaleza débil a cortante, a lo largo de los planos paralelos a su veta. Considérese la viga mostrada en la figura 9-4, la cual es similar a las viguetas usadas en estructuras de piso y techo de construcciones de madera. La veta generalmente corre paralela al eje largo en la madera de construcción comercialmente disponible. Cuando se somete a cargas transversales, es probable que la falla inicial en una viga de madera sea por separación a lo largo de la veta de la madera, a causa de un esfuerzo cortante horizontal excesivo. Nótese en el apéndice A-18 que el esfuerzo cortante permisible en clases comunes de madera varía de sólo 70 a 95 lb/plg<sup>2</sup> (0.48 a 0.66 MPa), valores que son extremadamente bajos.

**Vigas de alma esbelta.** Una sección transversal de viga eficiente sería una con patines horizontales relativamente gruesos arriba y abajo con un alma vertical esbelta que los conectara. Ésta es la descripción general de la conocida "viga en I", la viga de patín ancho o la viga American Standard, ilustrada en la figura 9-5. En los apéndices A-7, A-8 y A-11 se dan dimensiones reales de este tipo de secciones de viga.

Pero si el alma es excesivamente esbelta, no tendría suficiente rigidez y estabilidad para mantener su forma y fallaría por la presencia de esfuerzo cortante en ella. El American Institute of Steel Construction (AISC) define el esfuerzo cortante permisible en las almas de vigas de acero. Véase la referencia 1. Véase también la *fórmula del esfuerzo cortante en almas*, definida más adelante en la sección 9-7 de este capítulo.

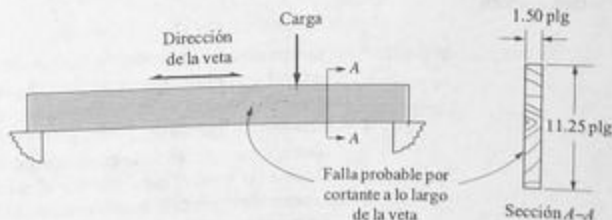


FIGURA 9-4 Falla por cortante en una viga de madera.

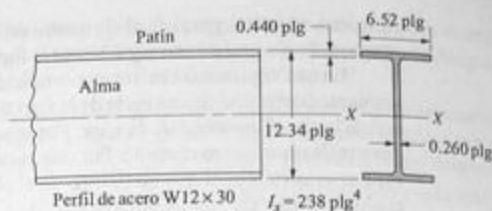


FIGURA 9-5 Ejemplo de un perfil de viga de alma esbelta.

**Vigas cortas.** En vigas muy cortas, es probable que el momento flexionante y por tanto el esfuerzo flexionante, alcancen valores reducidos. En vigas de ese tipo, el esfuerzo cortante puede ser el esfuerzo limitante.

**Sujetadores en vigas fabricadas.** Tal como se muestra en la figura 9-3, los sujetadores en una sección de viga compuesta están sometidos a esfuerzos cortantes. El concepto de *flujo de cortante*, desarrollado más adelante, se usa para evaluar la seguridad de las vigas como ésas o para especificar el tipo, el número y la separación requeridos de los sujetadores que van a ser utilizados. Asimismo, las vigas hechas de materiales compuestos son ejemplos de vigas fabricadas. La separación de las capas del compuesto, llamada *cortante interlamina*, es un modo potencial de falla.

**Estructuras recubiertas de láminas de metal sometidas a esfuerzo.** Las estructuras de aviones y naves espaciales y algunos vehículos terrestres y equipo industrial se fabrican utilizando un diseño de *lámina de metal sometida a esfuerzo*. Las llamadas en ocasiones estructuras *monocasco* están diseñadas para soportar la mayor parte de la carga en sus delgadas capas metálicas. Por lo general se usa el método del flujo de cortante para evaluar estructuras como ésas, aunque éste no se desarrolla en este libro.

## 9-4 FÓRMULA GENERAL DE CORTANTE

Aquí se presenta la fórmula general de cortante con la que se puede calcular la magnitud del esfuerzo cortante en un punto cualquiera de una sección transversal de una viga sometida a una fuerza vertical. En la sección 9-7 se desarrolla la fórmula. Es posible que se desee estudiar la fórmula junto con esta sección.

La fórmula general de cortante se expresa como sigue:

 **Fórmula general de cortante**

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad (9-1)$$

en donde  $V$  = fuerza cortante vertical en la sección de interés. El valor de  $V$  puede calcularse con el diagrama de fuerza cortante descrito en el capítulo 6. En general, se usa el valor máximo absoluto de  $V$ , ya sea positivo o negativo.

$I$  = momento de inercia de la sección transversal completa de la viga con respecto a su eje centroidal. Éste es el mismo valor de  $I$  usado en la fórmula de la flexión ( $\sigma = Mc/I$ ) para calcular el esfuerzo flexionante.

$t$  = espesor de la sección transversal medido en el eje donde se va a calcular el esfuerzo cortante.

$Q$  = momento estático.

El *momento estático* se define como el momento, con respecto al eje centroidal general, del área de la parte de la sección transversal alejada del eje donde se va a calcular el esfuerzo cortante. Por definición:



### Momento estático

$$Q = A_p \bar{y} \quad (9-2)$$

en donde  $A_p$  = área de la *parte* de la sección transversal distante del eje donde se va a calcular el esfuerzo cortante.

$\bar{y}$  = distancia al centroide  $A_p$  medida a partir del eje centroidal de la sección transversal completa.

Nótese que el momento estático es el *momento de un área*; es decir, área por distancia. Por consiguiente, sus unidades serán de longitud al cubo, tales como  $\text{plg}^3$ ,  $\text{m}^3$  o  $\text{mm}^3$ .

La evaluación cuidadosa del momento estático  $Q$  es crítica para el uso correcto de la fórmula de cortante. Es conveniente bosquejar la sección transversal de la viga y en seguida realzar el área parcial  $A_p$ . Luego se localiza el centroide del área parcial en el bosquejo. La figura 9-6 muestra un ejemplo de lo anterior. En éste, el objetivo es calcular el esfuerzo cortante en el eje  $a-a$ . El área sombreada es  $A_p$ , mostrada como la parte que está alejada del eje  $a-a$ .

Los tres ejemplos siguientes ilustran el método para calcular  $Q$ . En cada uno de ellos, se usa el procedimiento siguiente.

### Método para calcular el momento estático, $Q$

1. Localice el eje centroidal de la sección transversal completa.
2. Trace el eje donde se va a calcular el esfuerzo cortante.
3. Identifique el área parcial  $A_p$ , alejada del eje de interés y sombréela para resaltarla.

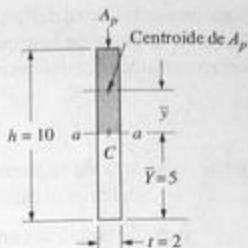
Si el área parcial  $A_p$  es un área simple en la que ya se localizó el centroide por medio de cálculos simples, use los pasos 4-7 para calcular  $Q$ . De lo contrario, use los pasos 8-11.

4. Calcule la magnitud de  $A_p$ .
5. Localice el centroide del área parcial.
6. Calcule la distancia  $\bar{y}$  del centroide de toda la sección al centroide del área parcial.
7. Calcule  $Q = A_p \bar{y}$ .

Cuando el área parcial es un área compuesta de varias partes, se utilizan los pasos 8-11.

8. Divida el área  $A_p$  en sus componentes, las cuales son áreas simples, y designelas  $A_1, A_2, A_3$ , etc. Calcule sus valores.
9. Localice el centroide de cada una de las áreas componentes.
10. Determine las distancias del eje centroidal de toda la sección transversal al centroide de cada área componente y designelas  $y_1, y_2, y_3$ , y así sucesivamente.
11. Calcule con  $A = A_p \bar{y}$  de:

$$Q = A_p \bar{y} = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \dots \quad (9-3)$$



Todas las dimensiones están en pulgadas

FIGURA 9-6 Ejemplo de  $A_p$  y  $\bar{y}$  que debe usarse en el cálculo de  $Q$ .

**Ejemplo 9-1** Para la sección rectangular ilustrada en la figura 9-6, calcule el momento estático  $Q$  que se emplearía en la fórmula general de cortante para calcular el esfuerzo cortante vertical en la sección marcada  $a-a$ .

**Solución** **Objetivo** Calcular el valor de  $Q$ .

**Datos** El perfil y las dimensiones de la sección transversal mostrada en la figura 9-6.

**Análisis** Se usa el método definido en esta sección.

**Resultados** **Paso 1.** El eje neutro de esta sección se localiza a la mitad de su altura,  $h/2$ , desde la base. En este problema  $h/2 = 5.00$  plg.

**Paso 2.** El eje de interés es  $a-a$  y en este ejemplo coincide con el eje neutro.

**Paso 3.** El área parcial,  $A_p$ , es la sombreada en la parte superior del rectángulo, como se muestra en la figura.

Como el área parcial es un rectángulo simple, se usan los pasos 4-7 para calcular  $Q$ .

**Paso 4.** El área parcial es:

$$A_p = t(h/2) = (2.0 \text{ plg})(5.0 \text{ plg}) = 10 \text{ plg}^2$$

**Paso 5.** El centroide del área parcial está a la mitad de su altura,  $a$ , 2.5 plg sobre  $a-a$ .

**Paso 6.** Como el eje centroidal coincide con el eje  $a-a$ ,  $\bar{y} = 2.5$  plg.

**Paso 7.** Ahora ya se puede calcular  $Q$ :

$$Q = A_p \bar{y} = (10.0 \text{ plg}^2)(2.5 \text{ plg}) = 25.0 \text{ plg}^3$$

**Ejemplo 9-2**

Para la sección I de la figura 9-7, calcule el momento estático  $Q$  que se usaría en la fórmula general de cortante para calcular el esfuerzo cortante vertical en la sección  $a-a$ .

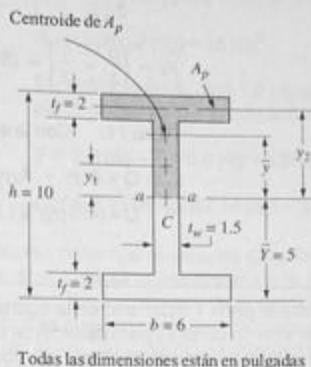


FIGURA 9-7 Perfil I del ejemplo 9-2.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular el valor de $Q$ .
	<b>Datos</b>	El perfil y las dimensiones de la sección transversal de la figura 9-7.
	<b>Análisis</b>	Se usa el método definido en esta sección.
	<b>Resultados</b>	<p><b>Paso 1.</b> El perfil I es simétrico y, por consiguiente, el eje neutro queda a la mitad de la altura a partir de su base, o sea a 5,0 plg.</p> <p><b>Paso 2.</b> El eje de interés <math>a-a</math>, coincide con el eje neutro en este ejemplo.</p> <p><b>Paso 3.</b> El área parcial <math>A_p</math> es la parte superior sombreada del perfil I.</p>

Como el área parcial tiene forma de "T", se usan los pasos 8-11 para calcular  $Q$ .

**Paso 8.** El perfil T se descompone en dos partes: la mitad superior del alma vertical es la parte 1 y el patín de arriba es la parte 2. Las magnitudes de estas áreas son:

$$A_1 = \left(\frac{h}{2} - t_f\right)(t_w) = (5.0 \text{ plg} - 2.0 \text{ plg})(1.5 \text{ plg}) = 4.5 \text{ plg}^2$$

$$A_2 = bt_f = (6.0 \text{ plg})(2.0 \text{ plg}) = 12.0 \text{ plg}^2$$

**Paso 9.** Cada una de las partes es un rectángulo donde el centroide está a media altura, como se muestra en la figura.

**Paso 10.** Las distancias requeridas son:

$$y_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - t_f \right) = \frac{1}{2} (5.0 \text{ plg} - 2.0 \text{ plg}) = 1.5 \text{ plg}$$

$$y_2 = \left( \frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} \right) = (5.0 \text{ plg} - 1.0 \text{ plg}) = 4.0 \text{ plg}$$

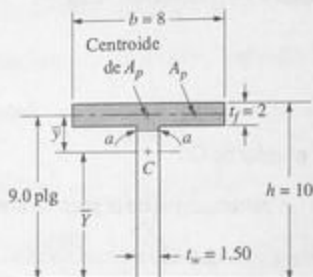
**Paso 11.** Con la ecuación (9-3) se obtiene:

$$Q = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

$$Q = (4.5 \text{ plg}^2)(1.5 \text{ plg}) + (12.0 \text{ plg}^2)(4.0 \text{ plg}) = 54.75 \text{ plg}^3$$

**Ejemplo 9-3**

Para el perfil T mostrado en la figura 9-8, calcule el momento estático  $Q$  de la fórmula general de cortante para determinar el esfuerzo cortante vertical en la sección a-a, o sea, el extremo superior del alma justo abajo de donde se une al patín.



Todas las dimensiones están en pulgadas

FIGURA 9-8 Perfil T del ejemplo 9-3.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular el valor de $Q$ .
	<b>Datos</b>	El perfil y sus dimensiones dadas en la figura 9-8.
	<b>Análisis</b>	Se usa el método definido en esta sección.
	<b>Resultados</b>	<b>Paso 1.</b> Localice el centroide.

$$\bar{Y} = \frac{A_w y_w + A_f y_f}{A_w + A_f}$$

donde el subíndice  $w$  se refiere al alma vertical y el subíndice  $f$  al patín superior. Entonces:

$$\bar{Y} = \frac{(12)(4) + (16)(9)}{12 + 16} = 6.86 \text{ plg}$$



**Paso 2.** El eje de interés,  $a-a$ , está en el extremo superior del alma, justo abajo del patín.

**Paso 3.** El área parcial sobre el eje  $a-a$  es todo el patín.

**Paso 4.**  $A_p = (8 \text{ plg})(2 \text{ plg}) = 16 \text{ plg}^2$

**Paso 5.** El centroide de  $A_p$  está 1.0 plg abajo de la cara superior del patín, el cual está a 9.0 plg sobre la base de la T.

**Paso 6.**  $\bar{y} = 9.0 \text{ plg} - \bar{Y} = 9.0 \text{ plg} - 6.86 \text{ plg} = 2.14 \text{ plg}$

**Paso 7.**  $Q = A_p \bar{y} = (16 \text{ plg}^2)(2.14 \text{ plg}) = 34.2 \text{ plg}^3$

**Comentario** Es de hacerse notar que el valor de  $Q$  sería el mismo aunque el eje de interés  $a-a$  se hubiera considerado en la cara inferior del patín justo arriba del alma. Pero el espesor de la sección,  $t$ , sería igual al ancho del patín, mientras que con el eje  $a-a$  utilizado en este problema, se usa el espesor del alma. Los esfuerzos cortantes resultantes serían por completo diferentes. Esto se demostrará más adelante.

**Uso de la fórmula general de cortante.** Los ejemplos se presentan para ilustrar el uso de la fórmula general de cortante [ecuación (9-1)] para calcular el esfuerzo cortante vertical en una viga. El procedimiento siguiente es el usual en la solución de problemas de ese tipo.

**Instrucciones para  
calcular esfuerzos  
cortantes en vigas**

El objetivo general es calcular el esfuerzo cortante en cualquier posición especificada en la viga y en cualquier eje especificado en la sección transversal con la fórmula general de cortante:

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad (9-1)$$

1. Determine la fuerza cortante vertical  $V$  en la sección de interés. Puede que se requiera trazar el diagrama completo de fuerza cortante siguiendo los procedimientos del capítulo 6.
2. Localice el centroide de la sección transversal completa y trace el eje neutro a través del centroide.
3. Calcule el momento de inercia de la sección con respecto al eje neutro.
4. Identifique el eje con respecto al cual se va a calcular el esfuerzo cortante y determine el espesor  $t$  en dicho eje. Incluya todas las partes componentes de la sección cortada por el eje de interés cuando se calcule  $t$ .
5. Calcule el momento estático del área parcial desde el eje de interés con respecto al eje neutro. Use el procedimiento desarrollado en esta sección.
6. Calcule el esfuerzo cortante con la ecuación (9-1).

**Ejemplo 9-4** Calcule el esfuerzo cortante en el eje  $a-a$  de la viga de sección transversal rectangular mostrada en la figura 9-6. La fuerza cortante,  $V$ , en la sección de interés es de 1200 lb.

- Solución**
- Objetivo** Calcular el esfuerzo cortante en el eje  $a-a$ .
- Datos** El perfil y las dimensiones dadas en la figura 9-6.  $V = 1200$  lb.
- Análisis** Se siguen las *instrucciones para calcular esfuerzos cortantes en vigas*.
- Resultados**
- Paso 1.**  $V = 1200$  lb (dato)
- Paso 2.** En un perfil rectangular, el centroide está a media altura como se muestra en la figura 9-6 y coincide con el eje  $a-a$ .  $\bar{Y} = 5.00$  plg.
- Paso 3.**  $I = bh^3/12 = (2.0)(10.0)^3/12 = 166.7$  plg<sup>4</sup>.
- Paso 4.** Espesor =  $t = 2.0$  plg en el eje  $a-a$ .
- Paso 5.** Normalmente se calcularía  $Q = A_p\bar{y}$  con el método mostrado con anterioridad en este capítulo. Pero el valor de  $Q$  para la sección de la figura 9-6 se calculó en el ejemplo 9-1. Use  $Q = 25.0$  plg<sup>3</sup>.
- Paso 6.** Con la ecuación (9-1):

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(1200 \text{ lb})(25.0 \text{ plg}^3)}{(166.7 \text{ plg}^4)(2.0 \text{ plg})} = 90.0 \text{ lb/plg}^2$$

**Ejemplo 9-5** Calcule el esfuerzo cortante en los ejes  $a-a$  y  $b-b$  de una viga T como se muestra en la figura 9-8. El eje  $a-a$  está en el extremo superior del alma vertical, justo abajo del patín. El eje  $b-b$  está en la cara inferior del patín. La fuerza cortante,  $V$ , en la sección de interés es de 1200 lb.

- Solución**
- Objetivo** Calcular el esfuerzo cortante en los ejes  $a-a$  y  $b-b$ .
- Datos** El perfil y las dimensiones dadas en la figura 9-8.  $V = 1200$  lb.
- Análisis** Se siguen las *instrucciones para calcular esfuerzos cortantes en vigas*.
- Resultados** Para el eje  $a-a$ :
- Paso 1.**  $V = 1200$  lb (dato).
- Paso 2.** Este perfil T particular se analizó en el ejemplo 9-3. Use  $\bar{Y} = 6.86$  plg.
- Paso 3.** Se utilizarán los métodos del capítulo 7 para calcular  $I$ . Sea el alma la parte 1 y el patín la parte 2. Para cada una de las partes,  $I = bh^3/12$  y  $d = \bar{Y} - \bar{y}$ .

Parte	$I$	$A$	$d$	$Ad^2$	$I + Ad^2$
1	64.00	12.0	2.86	98.15	162.15
2	5.33	16.0	2.14	73.27	78.60
					$I_{\text{total}} = 240.75 \text{ plg}^4$

**Paso 4.** Espesor =  $t = 1.5$  plg en el eje  $a-a$  en el alma.

**Paso 5.** Normalmente se calcularía  $Q = A_p \bar{y}$  con el método mostrado con anterioridad en este capítulo. Pero el valor de  $Q$  para la sección de la figura 9-8 se calculó en el ejemplo 9-3. Use  $Q = 34.2$  plg<sup>3</sup>.

**Paso 6.** Con la ecuación (9-1):

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(1200 \text{ lb})(34.2 \text{ plg}^3)}{(240.75 \text{ plg}^4)(1.5 \text{ plg})} = 114 \text{ lb/plg}^2$$

Para el eje  $b-b$ . Algunos de los datos serán los mismos que para el eje  $a-a$ .

**Paso 1.**  $V = 1200$  lb (dato).

**Paso 2.** De nuevo, use  $\bar{Y} = 6.86$  plg.

**Paso 3.**  $I = 240.75$  plg<sup>4</sup>.

**Paso 4.** Espesor =  $t = 8.0$  plg en el eje  $b-b$  en el patín.

**Paso 5.** De nuevo, use  $Q = 34.2$  plg<sup>3</sup>. El valor es el mismo que en el eje  $a-a$  porque tanto  $A_p$  como  $\bar{y}$  son los mismos.

**Paso 6.** Con la ecuación (9-1):

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(1200 \text{ lb})(34.2 \text{ plg}^3)}{(240.75 \text{ plg}^4)(8.0 \text{ plg})} = 21.3 \text{ lb/plg}^2$$

**Comentario** Observe la extraordinaria reducción del valor del esfuerzo cortante cuando se traslada del alma al patín.

## 9-5 DISTRIBUCIÓN DEL ESFUERZO CORTANTE EN VIGAS

La mayoría de las aplicaciones requieren que se determine el esfuerzo cortante máximo para evaluar la aceptabilidad del esfuerzo con respecto a algunos criterios de diseño. En la mayoría de las secciones usadas para vigas, el esfuerzo cortante máximo ocurre en el eje neutro, coincidente con el eje centroidal, con respecto al cual ocurre la flexión. Se puede usar la regla siguiente para decidir cuándo aplicar esta observación.

Siempre que el espesor en el eje centroidal no sea mayor que en algún otro eje, el esfuerzo cortante máximo en la sección transversal de una viga ocurre en el eje centroidal.

De este modo el cálculo del esfuerzo cortante únicamente en el eje centroidal daría el esfuerzo cortante máximo en la sección, lo que hace que los cálculos en otros ejes sean innecesarios.

La lógica detrás de esta regla se puede visualizar examinando la ecuación (9-1), la fórmula general de cortante. Para calcular el esfuerzo cortante en cualquier eje, los valores de la fuerza cortante  $V$  y el momento de inercia  $I$  son los mismos. Como el espesor,  $t$ , está en el denominador, el espesor mínimo tendería a producir el esfuerzo cortante máxi-

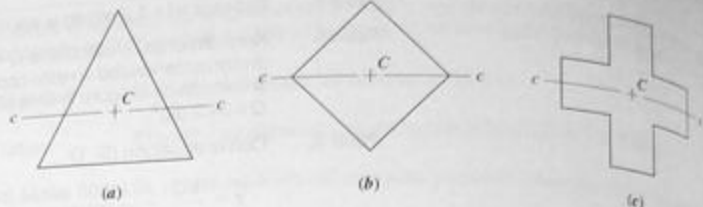


FIGURA 9-9 Secciones transversales de viga en las que el esfuerzo cortante máximo no puede ocurrir en el eje centroidal  $c-c$ .

mo, tal como se sobreentiende en el enunciado de la regla. Pero el valor del momento estático  $Q$  también varía en diferentes ejes y disminuye a medida que el eje de interés se recorre hacia afuera de la sección. Recuérdese que  $Q$  es el producto del área parcial  $A_p$  y la distancia  $\bar{y}$  al centroide de  $A_p$ . En el caso de ejes alejados del eje centroidal, el área disminuye más rápido de lo que se incrementa, lo que provoca que el valor de  $Q$  disminuya. Por tanto, el valor máximo de  $Q$  será el que corresponde al esfuerzo calculado en el eje centroidal. Se desprende que el esfuerzo cortante máximo siempre ocurrirá en el eje centroidal, a menos que el espesor en algún otro eje sea menor que aquél en el eje centroidal.

Los perfiles mostrados en las figuras 9-6, 9-7 y 9-8 son ejemplos que acatan la regla de que el esfuerzo cortante máximo ocurre en el eje neutro porque el espesor mínimo de cada uno de ellos ocurre en el eje neutro. La figura 9-9 muestra tres ejemplos, donde la regla *no se aplica*. En ellos, en algunos ejes alejados del eje neutro, el espesor es menor que aquél en el eje neutro. En esos casos, el esfuerzo cortante máximo puede ocurrir en algún otro eje. El ejemplo siguiente ilustra esta observación con el análisis de una sección triangular.

Las secciones circulares sólidas y huecas son ejemplos importantes de dónde ocurre, en efecto, el esfuerzo cortante máximo en el eje neutro, aun cuando el espesor disminuya en otros ejes. Se puede demostrar que la relación  $Q/t$  disminuye de manera continua en ejes distantes del eje neutro en el diámetro.

Los ejemplos siguientes ilustran la distribución del esfuerzo cortante en vigas de distintos perfiles. Nótese los comentarios al final de cada ejemplo por lo que se refieren a algunas conclusiones generales.

**Ejemplo 9-6** Calcule la distribución del esfuerzo cortante con respecto a la posición en la sección transversal de la viga de perfil rectangular mostrada en la figura 9-6. Las dimensiones reales son 2.0 plg por 10.0 plg. Grafique los resultados. La fuerza cortante,  $V$ , en la sección de interés es de 1200 lb.

**Solución** **Objetivo** Calcular el esfuerzo cortante en varios ejes y graficar  $\tau$  contra la posición.

**Datos** El perfil y las dimensiones en la figura 9-6.  $V = 1200$  lb.

**Análisis** Se siguen las *instrucciones para calcular esfuerzos cortantes en vigas*. Como el perfil es simétrico con respecto al eje centroidal, se decide calcular los esfuerzos cortantes en la parte superior en los ejes  $a-a$ ,  $b-b$ ,  $c-c$  y  $d-d$ , como se muestra en la figura 9-10. Por tanto, los valores de

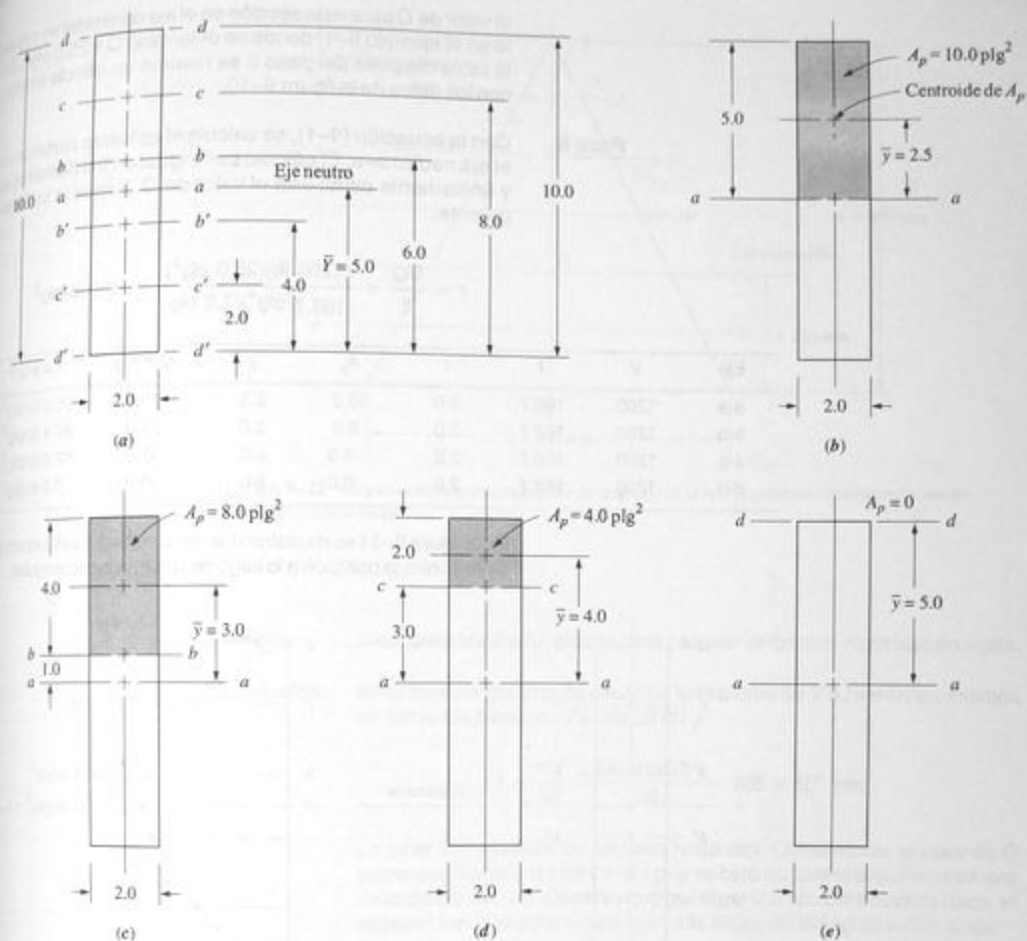


FIGURA 9-10 Datos para el cálculo del momento estático  $Q$  en el ejemplo 9-6.

los esfuerzos en la parte inferior en las secciones  $b'-b'$ ,  $c'-c'$  y  $d'-d'$  serán los mismos de los puntos correspondientes de arriba.

### Resultados

- Paso 1.**  $V = 1200$  lb (dato).
- Paso 2.** En la sección rectangular, el centroide está a la mitad de la altura, como se muestra en la figura 9-6 y coincide con el eje  $a-a$ .  $\bar{Y} = 5.00$  plg.
- Paso 3.**  $I = bh^3/12 = (2.0)(10.0)^3/12 = 166.7$  plg<sup>4</sup>
- Paso 4.** Espesor  $= t = 2.0$  plg en todos los ejes.
- Paso 5.** Se calculará  $Q = A_p \bar{y}$  y para cada uno de los ejes con el método descrito con anterioridad en este capítulo. Recuerde que

el valor de  $Q$  para esta sección en el eje centroidal se calculó en el ejemplo 9-1, donde se determinó  $Q = 25.0 \text{ plg}^3$ . En la tabla después del paso 6 se resume un cálculo similar con los datos de la figura 9-10.

**Paso 6.** Con la ecuación (9-1), se calcula el esfuerzo cortante en el eje neutro  $a-a$ . El cálculo sería igual en los demás ejes y únicamente cambiaría el valor de  $Q$ . Véase la tabla siguiente.

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(1200 \text{ lb})(25.0 \text{ plg}^3)}{(166.7 \text{ plg}^4)(2.0 \text{ plg})} = 90.0 \text{ lb/plg}^2$$

Eje	$V$	$I$	$t$	$A_p$	$y$	$Q = A_p y$	$\tau = VQ/It$
a-a	1200	166.7	2.0	10.0	2.5	25.0	90.0 lb/plg <sup>2</sup>
b-b	1200	166.7	2.0	8.0	3.0	24.0	86.4 lb/plg <sup>2</sup>
c-c	1200	166.7	2.0	4.0	4.0	57.6	57.6 lb/plg <sup>2</sup>
d-d	1200	166.7	2.0	0.0	5.0	0.0	0.0 lb/plg <sup>2</sup>

En la figura 9-11 se muestran los resultados del esfuerzo cortante contra la posición a lo largo de la sección rectangular.

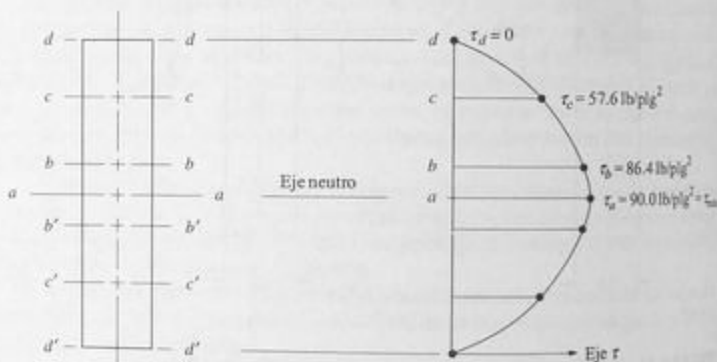


FIGURA 9-11 Distribución del esfuerzo cortante en la sección rectangular del ejemplo 9-6.

**Comentarios** Observe que el esfuerzo cortante máximo ocurre en el eje neutro, tal y como se esperaba. La variación del esfuerzo cortante con la posición es parabólica y termina con un esfuerzo de cero en las superficies superior e inferior.

**Ejemplo 9-7** Para la sección transversal triangular de viga mostrada en la figura 9-12, calcule el esfuerzo cortante que ocurre en los ejes  $a$  a  $g$ , separados 50 mm entre sí. Grafique la variación del esfuerzo con la posición en la sección. La fuerza cortante es de 50 kN.

**Solución** **Objetivo** Calcular el esfuerzo cortante en siete ejes y graficar  $\tau$  contra la posición.

**Datos** La sección transversal y las dimensiones dadas en la figura 9-12.  $V = 50 \text{ kN}$ .

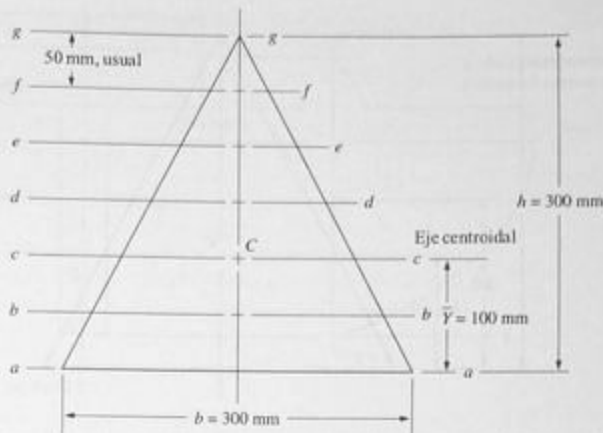


FIGURA 9-12 Sección transversal triangular de una viga en la que el esfuerzo cortante máximo ocurre en el eje centroidal.

**Análisis** Se siguen las *instrucciones para calcular esfuerzos cortantes en vigas*.

**Resultados** En la fórmula general de cortante, los valores de  $V$  e  $I$  serán los mismos en todos los cálculos.  $V$  es de 50 kN y:

$$I = \frac{bh^3}{36} = \frac{(300)(300)^3}{36} = 225 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

La tabla 9-1 muestra los cálculos restantes. Obviamente, el valor de  $Q$  correspondiente a los ejes  $a-a$  y  $g-g$  es cero porque el área hacia afuera de cada eje es cero. Observe que por el perfil único del triángulo dado, el espesor  $t$  en cualquier eje es igual a la altura del triángulo sobre el eje.

TABLA 9-1

Eje	$A_x$ (mm <sup>2</sup> )	$\bar{y}$ (mm)	$Q = A_x \bar{y}$ (mm <sup>3</sup> )	$t$ (mm)	$\tau$ (MPa)
$a-a$	0	100	0	300	0
$b-b$	13 750	75.8	$1.042 \times 10^6$	250	0.92
$c-c$	20 000	66.7	$1.333 \times 10^6$	200	1.48
$d-d$	11 250	100.0	$1.125 \times 10^6$	150	1.67
$e-e$	5 000	133.3	$0.667 \times 10^6$	100	1.48
$f-f$	1 250	166.7	$0.208 \times 10^6$	50	0.92
$g-g$	0	200	0	0	0

La figura 9-13 incluye una gráfica de estos esfuerzos. El esfuerzo cortante máximo ocurre a la mitad de la altura de la sección, y el esfuerzo en el centroide (a  $h/3$ ) es menor. Esto ilustra el enunciado general con respecto a que en secciones cuyo espesor mínimo no ocurre en el eje

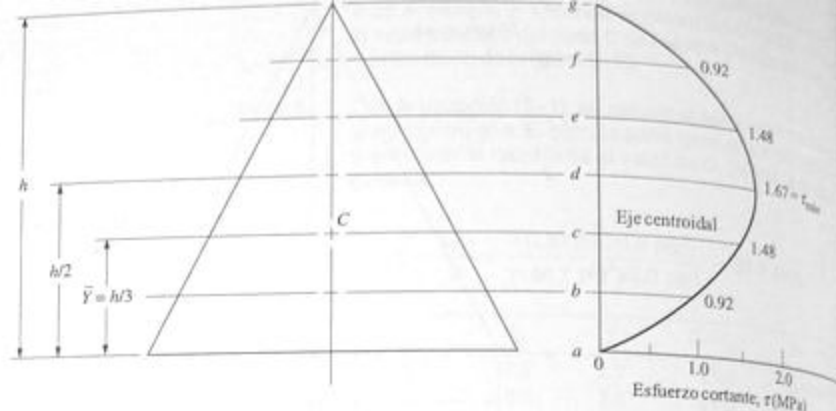


FIGURA 9-13 Distribución del esfuerzo cortante en la sección transversal triangular del ejemplo 9-7.

centroidal, el esfuerzo cortante puede ocurrir en algún eje aparte del eje centroidal.

**Comentario**

Una observación más puede hacerse con respecto a los cálculos de la sección triangular. Para el eje  $b-b$ , el área parcial  $A_p$  se tomó como el área *bajo*  $b-b$ . La sección resultante es el trapecoide entre  $b-b$  y la cara inferior de la viga. Para todos los demás ejes, el área parcial  $A_p$  se consideró como el área triangular *sobre* el eje. Se podría haber usado el área *bajo* el eje, pero los cálculos se habrían vuelto más difíciles. Cuando se va a calcular  $Q$ , no importa si se usa el área sobre o bajo el eje de interés para calcular  $A_p$  y  $\bar{y}$ .

Al revisar los resultados de los diversos ejemplos resueltos hasta aquí en este capítulo, se sacaron las siguientes conclusiones.

Resumen de observaciones sobre la distribución del esfuerzo cortante en la sección transversal de una viga

1. El esfuerzo cortante afuera de la sección lejos del eje centroidal es cero.
2. El esfuerzo cortante máximo en la sección transversal ocurre en el eje centroidal siempre que el espesor allí no sea mayor que en algún otro eje.
3. En una parte de la sección transversal donde el espesor es constante, la variación del esfuerzo cortante adopta la forma de una curva, disminuyendo conforme se incrementa la distancia al eje centroidal. La curva, de hecho, es una parte de una parábola.
4. En un eje donde el espesor cambia de manera repentina, como por ejemplo donde el alma de una T o un perfil I se une al patín, el esfuerzo cortante también cambia de manera repentina, puesto que es mucho menor en el patín que en el alma esbelta. Véase la figura 9-14.



## 9-6 DESARROLLO DE LA FÓRMULA GENERAL DE CORTANTE

Esta sección presenta la información básica sobre la fórmula general de cortante. La figura 9-15 muestra una viga sometida a dos cargas transversales y los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante correspondientes que ayudan a visualizar ciertas relaciones.

El principio de *momento-área* de los diagramas de vigas establece que *el cambio del momento flexionante entre dos puntos de una viga es igual al área bajo la curva de la fuerza cortante entre esos dos puntos*. Por ejemplo, considérense los dos puntos en el segmento  $A-B$  de la viga mostrada en la figura 9-15, marcados  $x_1$  y  $x_2$ , separados una pequeña distancia  $dx$ . El momento en  $x_1$  es  $M_1$  y en  $x_2$  es  $M_2$ . Por tanto, la regla de momento-área establece que:

$$M_2 - M_1 = V(dx) = dM$$

Esto también se puede establecer como:

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (9-4)$$

Es decir, el cambio diferencial del momento flexionante correspondiente a un cambio diferencial de la posición en la viga es igual a la fuerza cortante que ocurre en dicha posición.

También se puede llegar a la ecuación (9-4) examinando el diagrama de cuerpo libre del pequeño segmento de la viga entre  $x_1$  y  $x_2$ , como se muestra en la figura 9-16(a). Como esta sección se cortó de la viga, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes

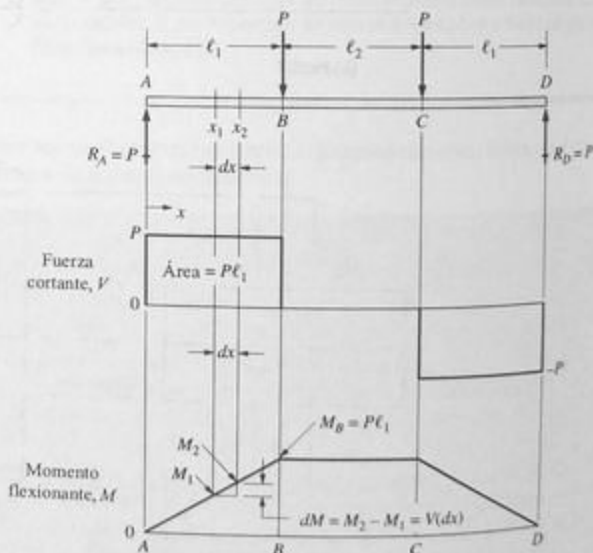


FIGURA 9-15 Diagramas de vigas usados para desarrollar la fórmula general de cortante.

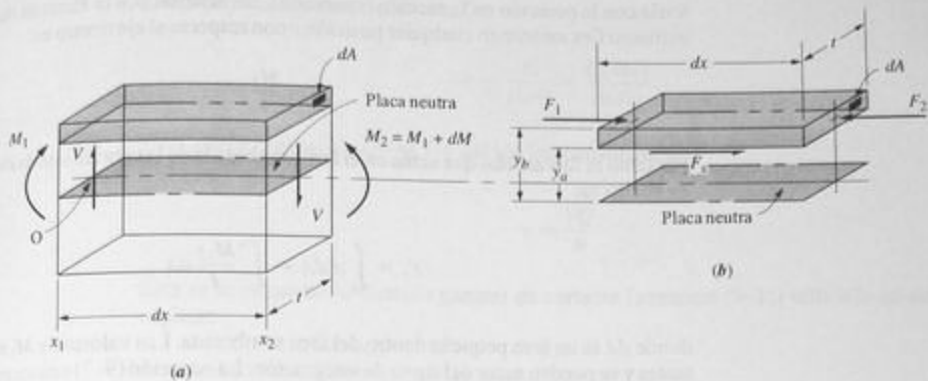


FIGURA 9-16 Fuerzas en una parte de un segmento cortado de una viga. (a) Diagrama de cuerpo libre de un segmento de viga. (b) Parte del segmento aislada.

internos se muestran actuando en las caras cortadas. Como la viga está en equilibrio, este segmento también está en equilibrio. Entonces la suma de momentos con respecto al punto  $O$  en la cara izquierda debe ser cero. Por tanto:

$$\sum M_O = 0 = M_1 - M_2 + V(dx) = -dM + V(dx)$$

O, como se demostró con anterioridad,

$$V = \frac{dM}{dx}$$

Cualquier parte del segmento de la viga mostrado en la figura 9-16(a) también debe estar en equilibrio. La parte sombreada y aislada en la figura 9-16(b) soporta fuerzas paralelas al eje de la viga. En el lado izquierdo,  $F_1$  se debe al esfuerzo cortante que actúa en esa sección del área. En el lado derecho,  $F_2$  se debe al esfuerzo cortante que actúa en esa sección del área. En general, los valores de  $F_1$  y  $F_2$  serán diferentes y debe haber una tercera fuerza que actúa en la cara inferior de la parte sombreada del segmento para mantener el equilibrio. Ésta es la fuerza cortante,  $F_3$ , que origina el esfuerzo cortante en la viga. La figura 9-16(b) muestra la fuerza  $F_3$  actuando en el área  $t(dx)$ . Por tanto, el esfuerzo cortante es:

$$\tau = \frac{F_3}{t(dx)} \quad (9-5)$$

Al sumar las fuerzas en la dirección horizontal, se obtiene:

$$F_3 = F_2 - F_1 \quad (9-6)$$

En seguida se desarrollarán las ecuaciones de las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$ . Cada fuerza es el producto del esfuerzo flexionante por el área en la cual actúa. Pero el esfuerzo flexionante

varía con la posición en la sección transversal. De acuerdo con la fórmula de flexión, el esfuerzo flexionante en cualquier posición y con respecto al eje neutro es:

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Por tanto la fuerza total que actúa en el área sombreada de la cara izquierda del segmento de la viga es:

$$F_1 = \int_A \sigma dA = \int_{y_a}^{y_b} \frac{M_1 y}{I} dA \quad (9-7)$$

donde  $dA$  es un área pequeña dentro del área sombreada. Los valores de  $M_1$  e  $I$  son constantes y se pueden sacar del signo de integración. La ecuación (9-7) entonces, queda:

$$F_1 = \frac{M_1}{I} \int_{y_a}^{y_b} y dA \quad (9-8)$$

La última parte de la ecuación (9-8) corresponde a la definición del centroide de la área sombreada. Es decir:

$$\int_{y_a}^{y_b} y dA = \bar{y} A_p \quad (9-9)$$

donde  $A_p$  es el área dentro de la parte sombreada de la cara izquierda del segmento y  $\bar{y}$  es la distancia del eje neutro al centroide de  $A_p$ . Este producto de  $\bar{y} A_p$  se llama *momento estático*  $Q$  en la fórmula general de cortante. Al sustituir en la ecuación (9-8) se obtiene:

$$F_1 = \frac{M_1}{I} \int_{y_a}^{y_b} y dA = \frac{M_1}{I} \bar{y} A_p = \frac{M_1 Q}{I} \quad (9-10)$$

Se puede usar un razonamiento similar para desarrollar la expresión de la fuerza  $F_2$  que actúa en la cara derecha del segmento:

$$F_2 = \frac{M_2 Q}{I} \quad (9-11)$$

Para completar el desarrollo de la expresión de la fuerza cortante se sustituyen  $F_1$  y  $F_2$  en la ecuación (9-6):

$$F_s = F_2 - F_1 = \frac{M_2 Q}{I} - \frac{M_1 Q}{I} = \frac{Q}{I} (M_2 - M_1) \quad (9-12)$$

Ya se había definido  $(M_2 - M_1) = dM$ . Por tanto:

$$F_s = \frac{Q(dM)}{I} \quad (9-13)$$

$$\tau = \frac{F_s}{t(dx)} = \frac{Q(dM)}{I t(dx)}$$

Pero, según la ecuación (9-4),  $V = dM/dx$ . Por consiguiente:

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

Ésta es la forma de la fórmula general de cortante [ecuación (9-1)] utilizada en este capítulo.

## 9-7 FÓRMULAS DEL CORTANTE ESPECIALES

Tal como se demostró en varios ejemplos, se puede usar la fórmula general de cortante para calcular el esfuerzo cortante en cualquier eje de cualquier sección transversal de una viga. Sin embargo, con frecuencia se desea conocer sólo el *esfuerzo cortante máximo*. Para muchos perfiles comunes usados como vigas, es posible desarrollar fórmulas simplificadas especiales que darán el esfuerzo cortante con rapidez. El rectángulo, el círculo, el tubo hueco de pared delgada se pueden analizar de esta manera. En esta sección se desarrollan las fórmulas.

En todas estas secciones, el esfuerzo cortante máximo ocurre en el eje neutro. El rectángulo y los perfiles de alma esbelta se ajustan a la regla enunciada en la sección 9-5 porque el espesor en el eje neutro no es mayor que en otros ejes en la sección. El círculo y el tubo de pared delgada no se ajustan a la regla. Sin embargo, se puede demostrar que la relación  $Q/t$  en la fórmula general de cortante disminuye de manera continua a medida que el eje de interés se aleja del eje neutro, lo que produce la disminución del esfuerzo cortante.

**Perfil rectangular.** La figura 9-17 muestra una sección transversal típica de espesor  $t$  y altura  $h$ . Los tres términos geométricos en la fórmula general de cortante se pueden expresar en términos de  $t$  y  $h$ .

$$I = \frac{th^3}{12}$$

$$t = t$$

$$Q = A_p \bar{y} \quad (\text{para el área sobre el eje centroidal})$$

$$Q = \frac{th}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{th^2}{8}$$

Al poner estos términos en la fórmula general de cortante se obtiene:

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} = V \cdot \frac{th^2}{8} \cdot \frac{12}{th^3} \cdot \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \frac{V}{th}$$

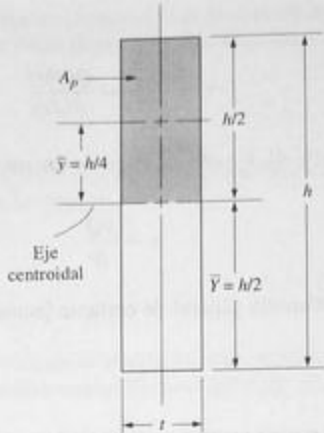


FIGURA 9-17 Perfil rectangular.

Pero como  $th$  es el área total de la sección:



**Fórmula de cortante especial para rectángulos**

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A} \quad (9-14)$$

La ecuación (9-14) puede usarse para calcular exactamente el esfuerzo cortante máximo en el eje centroidal de una viga rectangular.

Obsérvese que  $\tau = V/A$  representa el esfuerzo cortante *promedio* en la sección. Por tanto, el esfuerzo cortante máximo en una sección transversal rectangular es 1.5 veces más elevado que el promedio.

**Ejemplo 9-8** Calcule el esfuerzo cortante máximo que ocurriría en una sección transversal rectangular de una viga como la de la figura 9-17. El esfuerzo cortante es de 1000 lb,  $t = 2.0$  plg,  $h = 8.0$  plg.

**Solución** Con la ecuación (9-14) se obtiene:

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A} = \frac{3(1000 \text{ lb})}{2(2 \text{ plg})(8 \text{ plg})} = 93.8 \text{ lb/plg}^2$$

**Perfil circular.** La fórmula especial del cortante para el perfil circular se desarrolla de la misma manera que para el perfil rectangular. Las expresiones de  $Q$ ,  $I$  y  $t$  están escritas en función de la variable de tamaño principal del perfil circular, su diámetro. Por tanto, la fórmula general de cortante se simplifica (recurra a la figura 9-18).

$$t = D$$

$$I = \frac{\pi D^4}{64}$$

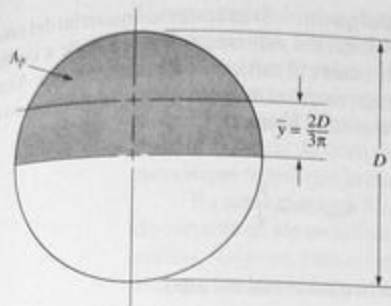


FIGURA 9-18 Perfil circular.

$$Q = A_p \bar{y} \quad (\text{para el semicírculo sobre el centroide})$$

$$Q = \frac{\pi D^2}{8} \cdot \frac{2D}{3\pi} = \frac{D^3}{12}$$

Entonces, el esfuerzo cortante máximo es:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{It} = V \times \frac{D^3}{12} \times \frac{64}{\pi D^4} \times \frac{1}{D} = \frac{64V}{12\pi D^2}$$

Para depurar la ecuación, considere un factor de 4 en el numerador y luego observe que el área total de la sección circular es  $A = \pi D^2/4$ .

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16(4)V}{12\pi D^2} = \frac{16V}{12A}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4V}{3A} \quad (9-15)$$

**Fórmula especial**  
del cortante  
para círculos

Esto demuestra que el esfuerzo cortante máximo es 1.33 veces mayor que el promedio en la sección circular.

**Ejemplo 9-9** Calcule el esfuerzo cortante máximo que ocurriría en una flecha circular, de 50 mm de diámetro, cuando se somete a una fuerza cortante vertical de 110 kN.

**Solución** La ecuación (9-15) dará el esfuerzo cortante máximo en el diámetro horizontal de la flecha.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4V}{3A}$$

Pero: 
$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(50 \text{ mm})^2}{4} = 1963 \text{ mm}^2$$

Por consiguiente: 
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4(110 \times 10^3 \text{ N})}{3(1963 \text{ mm}^2)} = 74.7 \text{ MPa}$$

**Perfil tubular hueco de pared delgada.** Si se entresaca material del centro de una sección transversal circular el valor local del esfuerzo cortante tiende a incrementarse, sobre todo cerca del diámetro donde ocurre el esfuerzo cortante máximo. Aunque no se da un desarrollo completo aquí, se observa que el esfuerzo cortante máximo en un tubo de pared delgada es casi dos veces el promedio. Esto es:

➔ **Fórmula especial del cortante para tubos de pared delgada**

$$\tau_{\max} = 2 \frac{V}{A} \quad (9-16)$$

en donde  $A$  es el área total de la sección transversal del tubo.

**Ejemplo 9-10** Calcule el esfuerzo cortante máximo aproximado que se produciría en un tubo de acero cédula 40 de 3 plg cuando se usa como viga y se somete a una fuerza cortante de 6200 lb.

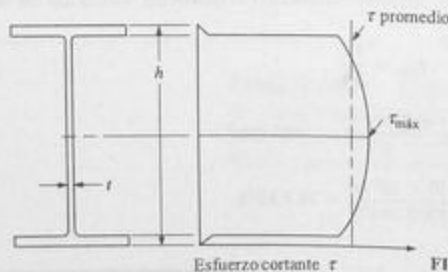
**Solución** Se debe usar la ecuación (9-16). En el apéndice A-12 se encuentra que el área de la sección transversal del tubo de acero cédula 40 de 3 plg es de 2.228 plg<sup>2</sup>. Entonces, una estimación del esfuerzo cortante máximo en el tubo, que ocurre cerca del diámetro horizontal, es:

$$\tau_{\max} = 2 \frac{V}{A} = \frac{2(6200 \text{ lb})}{2.28 \text{ plg}^2} = 5566 \text{ lb/plg}^2$$

**Perfiles de alma delgada.** Los perfiles estructurales como las vigas W y S disponen de almas relativamente esbeltas. La distribución del esfuerzo cortante en vigas como éstas es por lo general como la que se muestra en la figura 9-19. El esfuerzo cortante máximo ocurre en el eje centroidal. Disminuye un poco en el resto del alma y luego de manera drástica en los patines. Así la mayor parte de la resistencia a la fuerza cortante vertical es proporcionada por el alma. Además, el esfuerzo cortante promedio en el alma sería un poco menor que el esfuerzo máximo. Por estas razones, la *fórmula de cortante en almas* se usa con frecuencia para obtener una estimación rápida del esfuerzo cortante en perfiles de alma delgada.

➔ **Fórmula de cortante en almas para perfiles de alma delgada**

$$\tau_{\max} = \frac{V}{A_{\text{alma}}} = \frac{V}{th} \quad (9-17)$$



**FIGURA 9-19** Distribución del esfuerzo cortante en un perfil de alma esbelta.

El espesor del alma es  $t$ . El procedimiento más simple sería considerar a  $h$  como la altura total de la viga. Esto produciría un esfuerzo cortante casi 15% menor que el esfuerzo cortante máximo real en el eje centroidal de perfiles de viga representativos. Con sólo la altura del alma real en los patines se tendría una mejor aproximación del esfuerzo cortante máximo, probablemente menos del 10% más bajo que el valor real. En problemas que usan la fórmula de cortante en almas, se usa toda la altura de la sección transversal a menos que se indique lo contrario.

En suma, para perfiles de alma esbelta, calcule el esfuerzo cortante con la fórmula de cortante en almas utilizando toda la altura de la viga como  $h$  y el espesor real del alma como  $t$ . Así pues, para obtener una estimación más precisa del esfuerzo cortante máximo, incremente este valor en casi un 15%.

**Ejemplo 9-11** Con la fórmula de cortante en almas, calcule el esfuerzo cortante en una viga W12  $\times$  16 cuando se somete a una fuerza cortante de 25 000 lb.

**Solución** En el apéndice A-7 para vigas W se encontró que el espesor del alma es de 0.220 plg y que el peralte total (altura) de la viga es de 11.99 plg. Por consiguiente, con la ecuación (9-17) se obtiene:

$$\tau_{\max} = \frac{V}{th} = \frac{25\,000 \text{ lb}}{(0.220 \text{ plg})(11.99 \text{ plg})} = 9478 \text{ lb/plg}^2$$

## 9-8 ESFUERZO CORTANTE DE DISEÑO

El esfuerzo cortante de diseño depende en gran medida del material del cual se va a hacer la viga y de la forma del miembro sometido al esfuerzo cortante. En este libro se presenta una cantidad limitada de datos y el lector haría bien en consultar referencias más completas, como las referencias 1, 2 y 3.

Para vigas de madera, en el apéndice A-18 se dan valores de esfuerzo cortante horizontal permisible. Obsérvese que los valores son algo bajos, en general de menos de 100 lb/plg<sup>2</sup> (0.69 MPa). Con frecuencia, la falla por cortante es el factor limitante para vigas de madera.

Para esfuerzo cortante en las almas de perfiles de acero laminado, el AISC en general recomienda:

$$\tau = 0.40 s_y \quad (9-18)$$

Sin embargo, existen planteamientos extensos en la referencia 1 sobre casos especiales de vigas cortas, de vigas con almas inusualmente altas y esbeltas y de vigas con rigidizadores aplicados en la dirección vertical u horizontal. Se recomienda una consideración esmerada de estos factores.

La Aluminum Association también proporciona datos extensos por lo que se refiere a varias condiciones de carga y de geometría de vigas. Por ejemplo, la referencia 2 da valores reales de esfuerzo cortante permisible de las aleaciones de aluminio más conocidas para varias aplicaciones. No es práctico que se resuman tales datos en este libro.

Como recomendación general, se usará el mismo esfuerzo cortante de diseño para metales dúctiles sometidos a cargas estáticas del capítulo 3, tabla 3-4. Es decir, se sugiere



un factor de diseño de  $\phi = 0.75$ . El esfuerzo cortante en el material,  $s_{xy}$ , sometido a cortante. Y una aproximación del valor de  $s_{xy}$ , es la mitad de la resistencia a la cedencia a tensión,  $s_y$ . En suma:

$$\tau_d = \frac{s_{xy}}{N} = \frac{0.5s_y}{N} = \frac{s_y}{2N} \quad (9-19)$$

Con  $N=2$ :

$$\tau_d = \frac{s_y}{4} = 0.25s_y$$

## 9-9 FLUJO DE CORTANTE

Las secciones armadas usadas como vigas, como las mostradas en la figuras 9-20 y 9-21, se deben analizar para determinar el tamaño y la separación adecuados de los sujetadores. El planteamiento en las secciones precedentes demostraron que existen fuerzas cortantes horizontales en los planos unidos por los clavos, pernos y remaches. Por tanto, los sujetadores se someten a cortante. Por lo general, el tamaño y el material del sujetador permiten especificar una fuerza cortante permisible en cada uno de ellos. Luego, se debe analizar la viga para determinar la separación adecuada de los sujetadores que garantice que todas las partes de la viga actuarán como una sola.

El término *flujo de cortante* es útil para analizar secciones armadas. Llamado  $q$ , el flujo de cortante se determina multiplicando el esfuerzo cortante que actúa en una sección por el espesor en dicha sección. Esto es:

$$q = \tau t \quad (9-20)$$

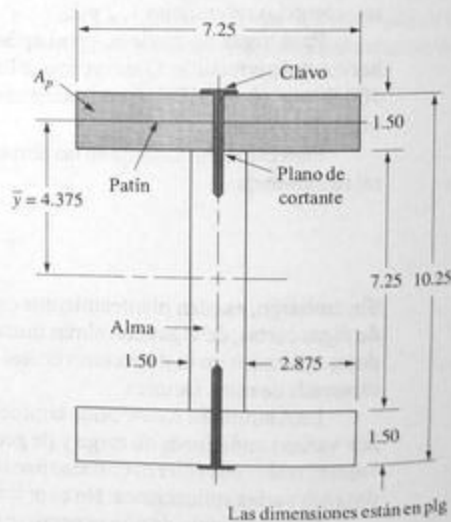
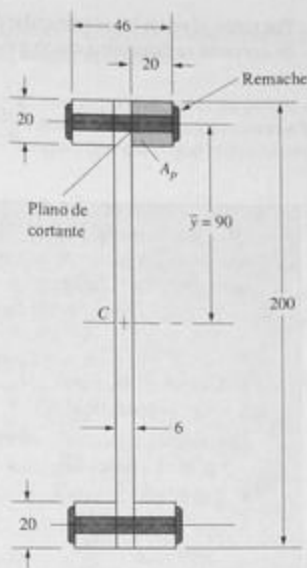


FIGURA 9-20 Perfil de viga del ejemplo 9-12.



Las dimensiones están en milímetros

FIGURA 9-21 Perfil armado del ejemplo 9-13.

Pero, según la fórmula general de cortante:

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

Entonces:

$$q = \tau t = \frac{VQ}{I} \quad (9-21)$$

Las unidades de  $q$  son *fuerza por unidad de longitud*, tales como N/m, N/mm o lb/plg. El flujo de cortante es una medida de qué tanta fuerza cortante debe ser resistida en una sección particular por unidad de longitud. Si se conoce la capacidad de resistir fuerza cortante de un sujetador, entonces se puede determinar una separación segura para los sujetadores.

Por ejemplo, si un estilo particular de clavo puede resistir con seguridad 150 lb de fuerza cortante, se definirá:

$$F_{sd} = 150 \text{ lb}$$

Por tanto, si en un lugar particular de una viga fabricada clavando tablas entre sí y el flujo de cortante se determina como  $q = 28.5 \text{ lb/plg}$ , la separación máxima,  $s$ , de los clavos es:

$$s = \frac{F_{sd}}{q} = \frac{150 \text{ lb}}{28.5 \text{ lb/plg}} = 5.26 \text{ plg} \quad (9-22)$$

**Instrucciones para especificar la separación de sujetadores**

El objetivo es especificar una separación adecuada de los sujetadores para mantener las partes de un perfil de viga compuesto unidas al mismo tiempo que resisten una fuerza cortante vertical aplicada.

*Datos requeridos:* Fuerza cortante aplicada,  $V$ .

Geometría de la sección transversal de la viga.

Fuerza cortante permisible en cada sujetador,  $F_{sd}$ .

1. Calcule el momento de inercia,  $I$ , de toda la sección transversal con respecto a su eje centroidal.
2. Calcule el valor del momento estático,  $Q$ , de la parte de la sección transversal afuera de los sujetadores. Use  $Q = A_p y$  definida en la sección 9-4.
3. Calcule el flujo de cortante,  $q$ , con:

$$q = \frac{VQ}{I}$$

El resultado será la cantidad de fuerza cortante a ser resistida por unidad de longitud a lo largo de la viga.

4. Calcule la separación máxima permisible,  $s$ , de los sujetadores con:

$$s = F_{sd}/q$$

5. Especifique una separación conveniente entre los sujetadores menor que la máxima permisible.

**Ejemplo 9-12**

Determine la separación adecuada de los clavos usados para afianzar las tablas patin al alma de la viga I armada, mostrada en la figura 9-20. Todas las tablas son perfiles de madera estándar de  $2 \times 8$ . Los clavos que deben utilizarse pueden resistir con seguridad 250 lb de fuerza cortante cada uno. La carga aplicada a la viga se muestra en la figura 9-15 con  $P = 500 \text{ lb}$ .

**Solución**

**Objetivo** Especificar una separación adecuada para los clavos.

**Datos**

La carga mostrada en la figura 9-15.  $P = 500 \text{ lb}$ ,  $F_{sd} = 250 \text{ lb/clavo}$ . El perfil y las dimensiones que aparecen en la figura 9-20.

**Análisis**

Se utilizan las *instrucciones para especificar la separación de sujetadores*.

**Resultados**

La fuerza cortante máxima en la viga es de 500 lb y se presenta entre los apoyos y las cargas aplicadas.

**Paso 1.** El momento de inercia se puede calcular restando los dos rectángulos de espacio abierto a los lados del alma del rectángulo completo que rodea el perfil I.

$$I = \frac{7.25(10.25)^3}{12} - \frac{2(2.875)(7.25)^3}{12} = 468.0 \text{ plg}^4$$

**Paso 2.** En el lugar donde los clavos unen las tablas,  $Q$  se evalúa para el área del patín superior (o inferior).

$$Q = A_p \bar{y} = (1.5 \text{ plg})(7.25 \text{ plg})(4.375 \text{ plg}) = 47.6 \text{ plg}^3$$

**Paso 3.** Entonces, el flujo de cortante es:

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(500 \text{ lb})(47.6 \text{ plg}^3)}{468 \text{ plg}^4} = 50.9 \text{ lb/plg}$$

Esto significa que las 50.9 lb de fuerza deben ser resistidas a lo largo de cada plg de longitud de la viga en el punto entre el patín y el alma.

**Paso 4.** Cada clavo es capaz de soportar 250 lb, y la separación máxima es:

$$s = \frac{F_{ad}}{q} = \frac{250 \text{ lb}}{50.9 \text{ lb/plg}} = 4.92 \text{ plg}$$

**Paso 5.** Una separación de 4.5 plg sería razonable.

El principio del flujo de cortante también se aplica a secciones como las mostradas en la figura 9-21, donde una sección de viga se fabrica remachando barras cuadradas a una placa vertical para formar un perfil I. El flujo de cortante parte del alma hacia los patines. Por tanto, cuando se evalúa el momento estático  $Q$ , se considera que el área parcial  $A_p$  es el área de una de las barras patín.

**Ejemplo 9-13**

Una viga se fabrica remachando barras cuadradas de aluminio a una placa vertical, como se muestra en la figura 9-21. Las barras son de 20 mm por lado. La placa es de 6 mm de espesor y de 200 mm de altura. Los remaches pueden soportar 800 N de fuerza cortante de un lado a otro de la sección. Determine la separación requerida de los remaches cuando se aplica una fuerza cortante de 5 kN.

**Solución****Objetivo**

Especificar una separación adecuada de los remaches.

**Datos**

Fuerza cortante = 5 kN,  $F_{ad} = 800 \text{ N/remache}$ . El perfil y las dimensiones que aparecen en la figura 9-21.

**Análisis** Se siguen las instrucciones para especificar la separación de sujetadores.

**Resultados** **Paso 1.**  $I$  es el momento de inercia de toda la sección transversal:

$$I = \frac{6(200)^3}{12} + 4 \left[ \frac{20^4}{12} + (20)(20)(90)^2 \right] \\ = 17.0 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

**Paso 2.**  $Q$  es el producto de  $A_p \bar{y}$ , correspondiente al área afuera de la sección donde se va a calcular el cortante. En este caso, el área parcial  $A_p$  es el área cuadrada de 20 mm de lado al costado del alma. Para la viga de la figura 9-19:

$$Q = A_p \bar{y} \quad (\text{para una barra cuadrada}) \\ = (20)(20)(90) \text{ mm}^3 = 36\,000 \text{ mm}^3$$

**Paso 3.** Entonces, con  $V = 5 \text{ kN}$ :

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(5 \times 10^3 \text{ N})(36 \times 10^3 \text{ mm}^3)}{17.0 \times 10^6 \text{ mm}^4} = 10.6 \text{ N/mm}$$

Así, una fuerza cortante de 10.6 N debe ser resistida por cada milímetro de longitud de la viga.

**Paso 4.** Como cada remache puede soportar 800 N de fuerza cortante, la separación máxima es:

$$s = \frac{F_{ad}}{q} = \frac{800 \text{ N}}{10.6 \text{ N/mm}} = 75.5 \text{ mm}$$

**Paso 5.** Especifique una separación  $s = 75 \text{ mm}$ .

## BIBLIOGRAFÍA

1. Aluminum Association, *Specifications for Aluminum Structures*, Washington, D.C., 1986.
2. American Institute of Steel Construction, *Manual of Steel Construction*, 9th ed., Chicago, 1989.
3. U.S. Department of Agriculture Forest Products Laboratory, *Handbook of Wood and Wood-Based Materials for Engineers, Architects, and Builders*, Hemisphere Publishing Corp., New York, 1989.

## PROBLEMAS

En los problemas del 9-1 al 9-20, calcule el esfuerzo cortante en el eje neutro horizontal de una viga que tiene la sección transversal mostrada en la figura dada para la fuerza cortante dada. Use la fórmula general de cortante.

**9-1.M** Use un perfil rectangular de 50 mm de ancho por 200 mm de altura.  $V = 7500 \text{ N}$ .

**9-2.M** Use un perfil rectangular de 38 mm de ancho por 180 mm de altura.  $V = 5000 \text{ N}$ .

**9-3.I** Use un perfil rectangular de 1.5 plg de ancho por 7.25 plg de altura.  $V = 12\,500 \text{ lb}$ .

**9-4.I** Use un perfil rectangular de 3.5 plg de ancho por 11.25 plg de altura.  $V = 20\,000 \text{ lb}$ .

- 9-5.M Use un perfil circular de 50 mm de diámetro.  $V = 4500$  N.
- 9-6.M Use un perfil circular de 38 mm de diámetro.  $V = 2500$  N.
- 9-7.I Use un perfil circular de 2.0 plg de diámetro.  $V = 7500$  lb.
- 9-8.I Use un perfil circular de 0.63 plg de diámetro.  $V = 850$  lb.
- 9-9.I Use el perfil mostrado en la figura P7-16.  $V = 1500$  lb.
- 9-10.I Use el perfil mostrado en la figura P7-2.  $V = 850$  lb.
- 9-11.I Use el perfil mostrado en la figura P7-3.  $V = 850$  lb.
- 9-12.M Use el perfil mostrado en la figura P7-4.  $V = 112$  kN.
- 9-13.M Use el perfil mostrado en la figura P7-17.  $V = 71.2$  kN.
- 9-14.M Use el perfil mostrado en la figura P7-18.  $V = 1780$  N.
- 9-15.M Use el perfil mostrado en la figura P7-5.  $V = 675$  N.
- 9-16.M Use el perfil mostrado en la figura P7-6.  $V = 2.5$  kN.
- 9-17.M Use el perfil mostrado en la figura P7-8.  $V = 10.5$  kN.
- 9-18.I Use el perfil mostrado en la figura P7-14.  $V = 1200$  lb.
- 9-19.I Use el perfil mostrado en la figura P7-15.  $V = 775$  lb.
- 9-20.I Use el perfil mostrado en la figura P7-33.  $V = 2500$  lb.

En los problemas del 9-21 al 9-30, suponga que el perfil indicado es la sección transversal de una viga de madera que tiene un esfuerzo cortante permisible de  $70 \text{ lb/plg}^2$ , la cual es de pino del sur grado núm. 2 enumerada en el apéndice A-18. Calcule la fuerza cortante máxima permisible para cada perfil. Use la fórmula general de cortante.

- 9-21.I Use una viga de madera estándar de  $2 \times 4$  con la dimensión larga en posición vertical.
- 9-22.I Use una viga de madera estándar de  $2 \times 4$  con la dimensión larga en posición horizontal.
- 9-23.I Use una viga de madera estándar de  $2 \times 12$  con la dimensión larga en posición vertical.

- 9-24.I Use una viga de madera estándar de  $2 \times 12$  con la dimensión larga en posición horizontal.
- 9-25.I Use una viga de madera estándar de  $10 \times 12$  con la dimensión larga en posición vertical.
- 9-26.I Use una viga de madera estándar de  $10 \times 12$  con la dimensión larga en posición horizontal.
- 9-27.I Use el perfil mostrado en la figura P7-21.
- 9-28.I Use el perfil mostrado en la figura P7-22.
- 9-29.I Use el perfil mostrado en la figura P7-23.
- 9-30.I Use el perfil mostrado en la figura P7-24.
- 9-31.I Para una viga que tiene el perfil I mostrado en la figura P7-2, calcule el esfuerzo cortante en ejes horizontales separados 0.50 plg entre sí entre el extremo inferior y el extremo superior. En los extremos del alma donde se une a los patines, calcule el esfuerzo tanto en el alma como en el patín. Use una fuerza cortante de 500 lb. Luego grafique los resultados.
- 9-32.I Para una viga que tiene la sección transversal tubular mostrada en la figura P7-3, calcule el esfuerzo cortante en ejes horizontales separados 0.50 plg entre sí entre el extremo inferior y el extremo superior. En los extremos de los lados verticales donde se unen a los patines, calcule el esfuerzo tanto en el alma como en el patín. Use una fuerza cortante de 500 lb. Luego grafique los resultados.
- 9-33.I Para una viga de acero estándar W14  $\times$  43, calcule el esfuerzo cortante en el eje neutro cuando se somete a una fuerza cortante de 33 500 lb. Use la fórmula general de cortante. Ignore los redondeos en la intersección del alma con los patines.
- 9-34.I Con las mismas condiciones del problema 9-33, calcule el esfuerzo cortante en varios ejes y grafique la variación del esfuerzo con la posición en la viga.
- 9-35.I Para una viga de acero estándar W14  $\times$  43, calcule el esfuerzo cortante con la fórmula de cortante en alma cuando soporta una fuerza cortante de 33 500 lb. Compare este valor con el que se calculó en el problema 9-33 y trácelo en la gráfica del problema 9-34.
- 9-36.I Para una viga Aluminum Association Standard 18  $\times$  6.181, calcule el esfuerzo cortante en el eje neutro cuando se somete a una fuerza cortante de 13 500 lb. Use la fórmula general de cortante. Ignore los redondeos en la intersección del alma con los patines.
- 9-37.I Con las mismas condiciones del problema 9-36, calcule el esfuerzo cortante en varios ejes y grafi-

que la variación del esfuerzo con la posición en la viga.

- 9-38.I Para una viga de aluminio I8 6.181, calcule la fuerza cortante con la fórmula de cortante en alma cuando la viga soporta una fuerza cortante de 13 500 lb. Compare este valor con el que se calculó en el problema 9-36 y trázelo en la gráfica del problema 9-37.

*Nota:* En los problemas que piden esfuerzos de diseño, use lo siguiente:

Para acero estructural:

$$\text{A flexión: } \sigma_d = 0.66s_y$$

$$\text{A cortante: } \tau_d = 0.4s_y$$

Para cualquier otro metal:

$$\text{A flexión: } \sigma_d = \frac{s_y}{N}$$

$$\text{A cortante: } \tau_d = 0.5 \frac{s_y}{N}$$

Para madera:

Use los esfuerzos permisibles del apéndice A-18.

- 9-39.I Una viga de acero W10  $\times$  15 debe soportar la carga mostrada en la figura P6-4. Calcule el esfuerzo cortante con la fórmula de cortante en alma. Además, calcule el esfuerzo flexionante máximo. Luego compare los esfuerzos con los esfuerzos de diseño para acero estructural ASTM A36.
- 9-40.I Especifique una viga de patín ancho adecuada de acero estructural ASTM A36 que soportará la carga mostrada en la figura P6-4 basada en el esfuerzo de diseño a flexión. En seguida, para la viga seleccionada, calcule el esfuerzo cortante con la fórmula de cortante en el alma y compárelo con el esfuerzo cortante de diseño.
- 9-41.I Especifique una viga de patín ancho adecuada de acero estructural ASTM A36 que soportará la carga mostrada en la figura P6-52 basada en el esfuerzo de diseño a flexión. En seguida, para la viga seleccionada, calcule el esfuerzo cortante con la fórmula de cortante en alma y compárelo con el esfuerzo cortante de diseño.
- 9-42.C Especifique una viga de patín ancho adecuada de acero estructural ASTM A36 que soportará la carga mostrada en la figura P6-54 basada en el esfuerzo de diseño a flexión. En seguida, para la viga seleccionada, calcule el esfuerzo cortante con la fórmula de cortante en alma y compárelo con el esfuerzo cortante de diseño.
- 9-43.I Especifique un tubo de acero estándar adecuado del apéndice A-12 que vaya a ser fabricado de acero AISI 1020 laminado en caliente que deba soportar la carga mostrada en la figura P6-51, basada en el esfuerzo de diseño a flexión con un factor de diseño de 3. A continuación, para el tubo seleccionado, calcule el esfuerzo cortante con la fórmula de cortante especial para tubos huecos y calcule el factor de diseño resultante con la fórmula de esfuerzo cortante de diseño.
- 9-44.I Se va a especificar un canal Aluminum Association estándar (apéndice A-10) que soporte la carga mostrada en la figura P6-9 con un factor de diseño de 4 a flexión. Las patas del canal deben apuntar hacia abajo. El canal es de aluminio 6061-T6. Para el canal seleccionado, calcule el esfuerzo cortante máximo.
- 9-45.I Una vigueta de madera en el piso de un edificio tiene que soportar una carga uniformemente distribuida de 200 lb/pie a lo largo de 12 pies. Especifique un perfil de madera estándar de abeto grado n.º 2 para la vigueta, para que sea segura tanto a flexión como a cortante (véanse los apéndices A-4 y A-18).
- 9-46.C Una viga de madera de una estructura para exteriores debe soportar la carga mostrada en la figura P6-53. Si se tiene que hacer de abeto Douglas grado n.º 3, especifique una viga de madera que sea segura, tanto a flexión como a cortante (véanse los apéndices A-4 y A-18).
- 9-47.I La viga tubular mostrada en la figura P7-22 debe ser de pino del sur grado n.º 1. Debe ser de 14 pies de longitud y soportar dos cargas concentradas iguales cada una a 3 pies de los extremos. La viga está simplemente apoyada en sus extremos. Especifique la carga máxima permisible para que la viga sea segura tanto a flexión como a cortante.
- 9-48.C Una viga I de aluminio, 19  $\times$  8.361, soporta la carga mostrada en la figura P6-8. Calcule el esfuerzo cortante en la viga con la fórmula de cortante en alma.
- 9-49.C Calcule el esfuerzo flexionante para la viga del problema 9-48.
- 9-50.I Una viga de piso de madera de 2  $\times$  8 en una casa está simplemente apoyada. Mide 12 pies de largo y soporta una carga uniformemente distribuida de 80 lb/pie. Calcule el esfuerzo cortante en la vigueta. ¿Sería segura si fuera de madera de pino del sur grado n.º 2?
- 9-51.I Se fabrica una viga de acero con sección rectangular, de 0.50 plg de ancho por 4.00 plg de altura.
- (a) Calcule el esfuerzo cortante en la viga si debe soportar la carga mostrada en la figura P6-11.
- (b) Calcule el esfuerzo causado por flexión.

- (c) Especifique un acero adecuado para la viga con un factor de diseño de 3, ya sea a flexión o a cortante.
- 9-52.M Se fabrica una viga de aluminio con sección rectangular, de 16 mm por 60 por mm de altura.
- (a) Calcule el esfuerzo cortante en la viga si soporta la carga mostrada en la figura P6-6.
- (b) Calcule el esfuerzo causado por flexión.
- (c) Especifique un aluminio adecuado para la viga con un factor de diseño de 3 ya sea a flexión o a cortante.
- 9-53.M Se piensa usar una barra rectangular para soportar la carga mostrada en la figura P6-47. Su espesor debe ser de 12 mm y estar hecha de aluminio 6061-T6. Determine la altura requerida del rectángulo para producir un factor de diseño de 4 a flexión basado en la resistencia a la cedencia. En seguida, calcule el esfuerzo cortante en la barra y el factor de diseño resultante a cortante.
- 9-54.M Una flecha circular, de 40 mm de diámetro, soporta la carga mostrada en la figura P6-48.
- (a) Calcule el esfuerzo cortante máximo en la flecha.
- (b) Calcule el esfuerzo máximo originado por flexión.
- (c) Especifique un acero adecuado para la flecha de manera que se produzca un factor de diseño de 4 basado en la resistencia a la cedencia, ya sea a flexión o a cortante.
- 9-55.M Calcule el diámetro requerido de una barra circular para soportar la carga mostrada en la figura P6-47 al mismo tiempo que se limita el esfuerzo causado por flexión a 120 MPa. A continuación, calcule el esfuerzo cortante resultante en la barra y compárelo con el esfuerzo flexionante.
- 9-56.I Calcule la fuerza cortante vertical máxima permisible en una clavija de alineación de madera de 1.50 plg de diámetro, si el esfuerzo cortante máximo permisible es de 70 lb/plg<sup>2</sup>.
- 9-57.I Se debe seleccionar un tubo de acero estándar del apéndice A-12 que se usará como barra fija en un gimnasio. Va a estar simplemente apoyada en los extremos de longitud de 36 plg. Se espera que hombres hasta de 400 lb de peso se cuelguen de ella con una o dos manos en cualquier lugar a lo largo de ella. El tubo tiene que ser de acero AISI 1020 laminado en caliente. Especifique un tubo adecuado para producir un factor de diseño de 6 basado en la resistencia a la cedencia, ya sea a flexión o a cortante.
- 9-58.I Un tubo de acero estándar debe estar simplemente apoyado en sus extremos y soportar una sola carga concentrada de 2800 lb en su centro. El tubo debe

ser de acero AISI 1020 laminado en caliente. El factor de diseño mínimo tiene que ser de 4 basado en la resistencia a la cedencia, ya sea a flexión o a cortante. Especifique un tamaño adecuado para el tubo del apéndice A-12 si su longitud es:

- (a) 1.5 plg  
 (b) 3.0 plg  
 (c) 4.5 plg  
 (d) 6.0 plg

### Problemas de flujo de cortante

- 9-59.I El perfil mostrado en la figura P7-14 se tiene que formar pegando la placa plana a la sección acopiada. Si la viga hecha con este perfil se somete a una fuerza cortante de 1200 lb, calcule el flujo de cortante en la unión. ¿Cuál debe ser la resistencia al cortante del adhesivo en lb/plg<sup>2</sup>?
- 9-60.I El perfil que aparece en la figura P7-26 se hizo para utilizarse en metal unido con adhesivo entre la viga S y el alma del canal. Calcule el flujo del cortante en la unión y la resistencia al cortante que se requiere del adhesivo para una fuerza cortante de 2500 lb.
- 9-61.I El perfil mostrado en la figura P7-33 se fabrica remachando la placa inferior a los ángulos y luego soldando la placa superior a los ángulos. Cuando se usa como viga, existen cuatro modos potenciales de falla: esfuerzo flexionante, esfuerzo cortante en los ángulos, cortante en las soldaduras y en los remaches. El perfil se tiene que usar como el asiento de una banca que soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo de un claro de 10.0 pies. Calcule la carga distribuida máxima permisible para los siguientes límites de diseño.
- (a) El material de todos los componentes es aluminio 6061-T4 y se requiere un factor de diseño de 4 ya sea a flexión o a cortante.
- (b) El flujo de cortante permisible en cada soldadura es de 1800 lb/plg.
- (c) Los remaches se colocan a 4 plg uno de otro a lo largo de la viga. Cada remache es capaz de soportar 600 lb de cortante.
- 9-62.I Un diseño alterno de la banca descrita en el problema 9-61 debe usar el perfil T armado mostrado en la figura P7-24. La madera tiene que ser de pino del sur grado núm. 3. Se tiene que hincar un clavo en cada una de las tablas verticales de 2 × 12. Cada clavo puede soportar 160 lb a cortante y los clavos están separados 6.0 plg entre sí a lo largo de la viga. Calcule la carga distribuida máxima permisible sobre la viga.
- 9-63.I El perfil mostrado en la figura P7-21 se forma pegando sus componentes entre sí y la resistencia al



cortante permisible del pegamento es de  $800 \text{ lb/plg}^2$ . Los componentes son de abeto Douglas grado núm. 2. Si la viga está simplemente apoyada y soporta una sola carga concentrada en su centro, calcule la carga máxima permisible. La longitud es de 10 pies.

- 9-64.I** La sección I mostrada en la figura P7-21 consta de tres tablas de madera clavadas a los patines superior e inferior. Cada clavo puede soportar 180 lb de fuerza cortante. Si una viga que tiene esta sección soporta una fuerza cortante vertical de 300 lb, ¿qué separación se requeriría entre los clavos?
- 9-65.I** La sección armada mostrada en la figura P7-22 se formó hincando un clavo en las tablas superior e inferior de  $1 \frac{1}{2}$  plg de espesor. Si cada clavo es capaz de soportar 150 lb de fuerza cortante, determine la separación requerida de los clavos cuando la viga se somete a una fuerza cortante vertical de 600 lb.

**9-66.I** La plataforma cuya sección transversal se muestra en la figura P7-23 se armó con pegamento. ¿Qué tanta fuerza por unidad de longitud de la plataforma debe soportar el pegamento si transmite una fuerza cortante vertical de 500 lb?

**9-67.C** La sección mostrada en la figura P7-25 se arma pasando dos remaches de  $\frac{3}{8}$  plg a través de las placas superior e inferior de la viga. Cada remache soportará 2650 lb de cortante. Determine la separación requerida de los remaches a lo largo de la viga si soporta una fuerza cortante de 175 kN.

**9-68.I** Una viga fabricada cuya sección transversal es la mostrada en la figura P7-26 soporta una fuerza cortante de 50 kN. El canal se remacha a la viga con dos remaches de  $\frac{1}{4}$  plg de diámetro y cada uno puede soportar 1750 lb a cortante. Determine la separación requerida de los remaches.



# 10

## El caso general de los esfuerzos combinados y el círculo de Mohr

### 10-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En los capítulos precedentes de este libro la atención se centró en el cálculo de esfuerzos simples, aquellos casos en los que sólo un tipo de esfuerzo era de interés. Se estudiaron los esfuerzos directos provocados por tensión, compresión, apoyo y cortante; esfuerzo cortante torsional; esfuerzo provocado por flexión; y esfuerzos cortantes en vigas. También se presentaron muchos problemas prácticos en los que el cálculo del esfuerzo simple era el método de análisis apropiado.

Pero un gran número de problemas reales prácticos incluyen *esfuerzos combinados*, situaciones en las que dos o más componentes diferentes de esfuerzo actúan en el mismo punto de un miembro estructural de carga. En este capítulo se desarrollan los procedimientos generales utilizados para combinar los esfuerzos de manera adecuada. En el capítulo 11 se desarrollan varios casos especiales prácticos que incluyen esfuerzos combinados.

Después de terminar el estudio de este capítulo, el lector será capaz de:

1. Reconocer los casos de esfuerzos combinados.
2. Representar la condición de esfuerzo en un elemento sometido a esfuerzo.
3. Comprender el desarrollo de las ecuaciones de esfuerzos combinados, con las que se puede calcular lo siguiente:
  - a. Los esfuerzos principales máximo y mínimo.
  - b. La orientación del elemento principal sometido a esfuerzo.
  - c. El esfuerzo cortante máximo en un elemento.
  - d. La orientación del elemento sometido a esfuerzo cortante máximo.

- f. Los esfuerzos normal y cortante que ocurren en el elemento orientado en cualquier dirección.
4. Construir el círculo de Mohr para esfuerzo biaxial.
  5. Interpretar la información disponible en el círculo de Mohr sobre la condición de esfuerzo en un punto orientado en cualquier dirección.
  6. Usar los datos del círculo de Mohr para dibujar el elemento sometido al esfuerzo principal y el elemento sometido a esfuerzo cortante.

## 10-2 ELEMENTO SOMETIDO A ESFUERZO

En general, esfuerzo combinado se refiere a los casos en que dos o más tipos de esfuerzos actúan en un punto dado al mismo tiempo. Los esfuerzos componentes pueden ser *normales* (es decir, de tensión o compresión) o esfuerzos *cortantes*.

Cuando un miembro de carga se somete a dos o más clases diferentes de esfuerzos, la primera tarea es calcular el esfuerzo provocado por cada componente. A continuación se toma una decisión sobre qué punto del miembro soporta la *combinación* de esfuerzos más elevada y se completa el análisis del esfuerzo combinado en dicho punto. En algunos casos especiales, se desea conocer la condición de esfuerzo dado sin cuidado de si es o no es el punto de esfuerzo máximo. Ejemplos serían los puntos cerca de soldaduras en una estructura fabricada, a lo largo de la veta de un miembro de madera, o cerca del punto de conexión entre miembros.

Con el punto de interés identificado, se determina, de ser posible, la condición de esfuerzo en dicho punto con las relaciones clásicas para el análisis de esfuerzo presentadas en este libro. En ocasiones, por la complejidad de la geometría del miembro o el patrón de carga, no se puede realizar un análisis de esfuerzo confiable completo por medio de cálculos. En esos casos puede utilizarse un análisis de esfuerzo experimental en el que medidores de deformación, modelos fotoelásticos o revestimientos sensibles a la deformación dan datos de manera experimental. Asimismo, con la ayuda de técnicas de análisis de esfuerzo por elemento finito basadas en la computadora, se puede determinar la condición de esfuerzo.

Luego de usar uno de estos métodos, se tendrá la información requerida para construir el *elemento sometido a esfuerzo inicial*, como se muestra en la figura 10-1. Se supone que el elemento es infinitesimalmente pequeño y que está alineado con las direcciones conocidas en el miembro que se va analizar. El elemento completo, como se muestra, podría tener un esfuerzo normal (de tensión o compresión) actuando en cada par de caras orientadas en direcciones mutuamente perpendiculares, generalmente designadas como ejes  $x$  y  $y$ . Tal como el nombre *esfuerzo normal* lo dice, estos esfuerzos actúan normales (perpendiculares) a las caras. Y tal como se indica,  $\alpha$  está alineado con el eje  $x$  y es un esfuerzo de tensión que tiende a jalar al elemento. Recuerdese que los esfuerzos de tensión se consideran positivos. Por tanto,  $\alpha$  es de compresión, puesto que tiende a aplastar al elemento. Los esfuerzos de compresión se consideran negativos.

Además, puede haber esfuerzos cortantes actuando a lo largo de las caras del elemento como si cada una estuviera siendo desprendida del material adyacente. Recuerdese que cuando se analizaron los esfuerzos cortantes se vio que en cualquier elemento en equilibrio existen cuatro cortantes, de magnitud igual. En dos caras opuestas cualesquiera.

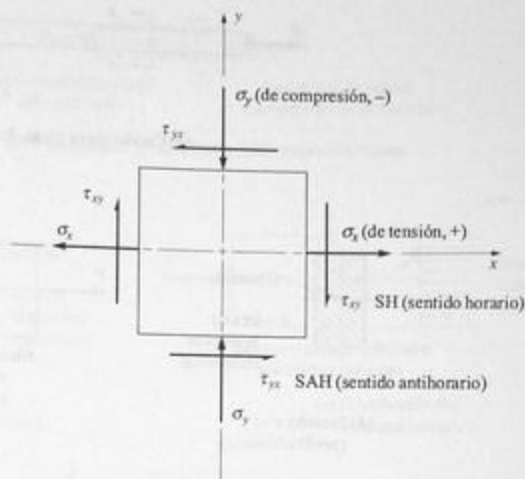


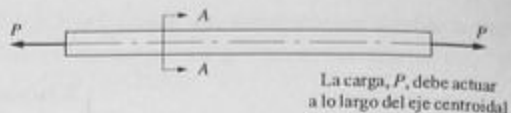
FIGURA 10-1 Elemento sometido a esfuerzo completo.

ra los esfuerzos cortantes actúan en direcciones opuestas, por lo que se crea un *par* que tiende a girar el elemento. Por tanto, debe existir un par de esfuerzos cortantes en las caras adyacentes que producen un par opuestamente dirigido para que el elemento esté en equilibrio. Cada *par* de cortantes se designará con una notación de subíndice doble. Por ejemplo,  $\tau_{xy}$  se refiere al esfuerzo cortante que actúa perpendicular al eje  $x$  y paralelo al eje  $y$ . Por otra parte,  $\tau_{yx}$  actúa perpendicular al eje  $y$  y paralelo al eje  $x$ . En lugar de establecer una convención para los signos de los esfuerzos cortantes, se hará referencia a ellos como *horarios* (H) (el sentido del movimiento de las manecillas del reloj o *antihorarios* (AH) (el sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj), según el sentido en que tiendan a girar al elemento sometido a esfuerzo.

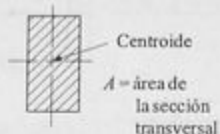
### 10-3 DISTRIBUCIÓN DEL ESFUERZO CREADA POR ESFUERZOS BÁSICOS

Las figuras 10-2, 10-3 y 10-4 muestran esfuerzos de tensión directa, compresión directa y flexión en los que se desarrollaron esfuerzos normales. Es importante conocer la distribución del esfuerzo en el miembro como se muestra en las figuras. También se muestran elementos sometidos a estas clases de esfuerzos. A continuación se dan las fórmulas principales para calcular el valor de estos esfuerzos.

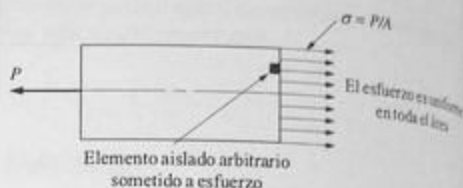
Tensión directa: (véase la figura 10-2)	$\sigma = \frac{P}{A}$	Uniforme en toda el área (capítulos 1 y 3)
Compresión directa: (véase la figura 10-3)	$\sigma = \frac{-P}{A}$	Uniforme en toda el área (capítulos 1 y 3)



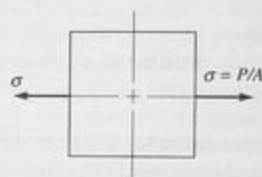
(a) Condición de carga-tensión directa



(b) Sección A-A (perfil arbitrario)



(c) Distribución del esfuerzo interno



(d) Elemento sometido a esfuerzo-esfuerzo de tensión normal

FIGURA 10-2 Distribución del esfuerzo normal en el caso de tensión directa.

Esfuerzo producido por flexión:  $\sigma_{\max} = \pm \frac{Mc}{I}$  Esfuerzo máximo en superficies externas (capítulo 8)  
(véase la figura 10-4)

$\sigma = \pm \frac{My}{I}$  Esfuerzo flexionante en cualquier punto (capítulo 8)

Las figuras 10-5, 10-6 y 10-7 ilustran tres casos en que se producen esfuerzos cortantes junto con las distribuciones de esfuerzo y los elementos sometidos a estos tipos de esfuerzo. A continuación se dan las fórmulas principales utilizadas para calcular esfuerzos cortantes.

Cortante directo:  $\tau = \frac{P}{A_v}$  Uniforme en toda el área (véase la figura 10-5) (capítulos 1 y 3)

Cortante torsional:  $\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$  Máximo en la superficie externa (véase la figura 10-6) (capítulo 5)

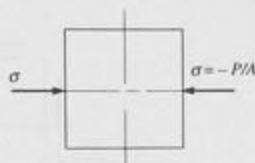
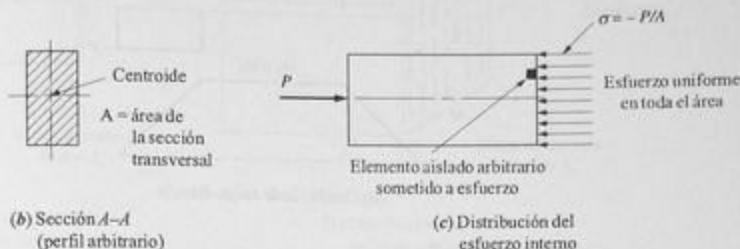
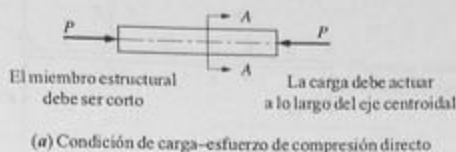


FIGURA 10-3 Distribución del esfuerzo normal en el caso de compresión directa.

Esfuerzos cortantes en vigas:  
(véase la figura 10-7)

$$\tau = \frac{Tr}{J} \quad \text{Cortante torsional en cualquier radio (capítulo 5)}$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad \text{(capítulo 9)}$$

#### 10-4 CREACIÓN DEL ELEMENTO SOMETIDO A ESFUERZO INICIAL

Un objetivo importante de este capítulo es desarrollar relaciones con las que se puedan determinar los *esfuerzos principales máximos* y el *esfuerzo cortante máximo*. Antes de que esto se pueda hacer, es necesario conocer el estado de esfuerzo en un punto de interés en alguna orientación. En esta sección se demuestra la determinación de la condición de esfuerzo inicial mediante cálculo directo con las fórmulas de los esfuerzos básicos.

La figura 10-8 muestra una palanca acodada empotrada en una superficie rígida con una carga  $P$  dirigida hacia abajo aplicada en su extremo libre. El segmento corto al frente de la palanca se carga como si fuera una viga en voladizo, como se muestra en la figura 10-9(a), con el momento en su extremo izquierdo resistido por el otro segmento de la palanca.

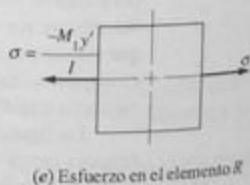
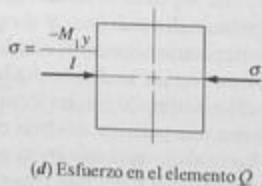
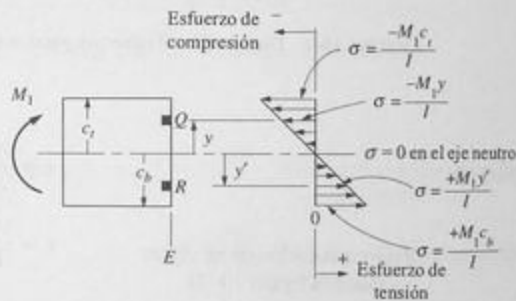
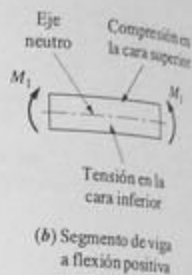
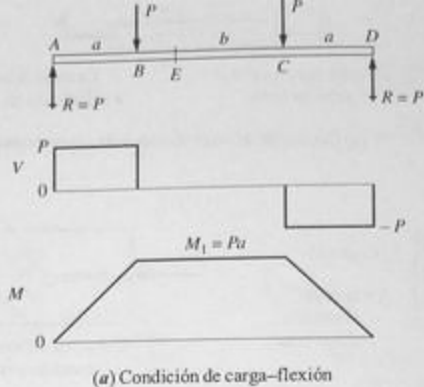
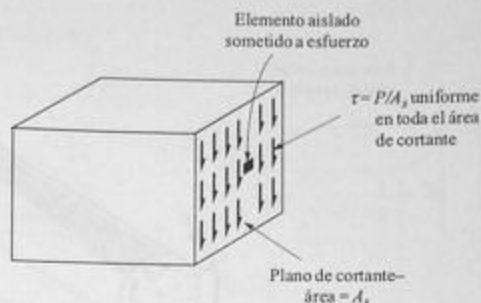


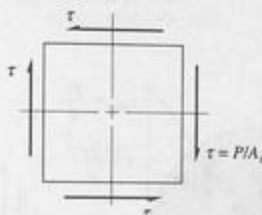
FIGURA 10-4 Distribución del esfuerzo normal en el caso de flexión.



(a) Condición de carga-cortante directo



(b) Distribución del esfuerzo interno



El esfuerzo cortante es igual en las cuatro caras

(c) Elemento sometido a esfuerzo-esfuerzo cortante

FIGURA 10-5 Distribución del esfuerzo cortante en el caso de cortante directo.

La figura 10-9(b) muestra al segmento más largo como un diagrama de cuerpo libre. Al frente, la fuerza  $P$  y el par de torsión  $T$  son las reacciones a la fuerza y al momento que actúan en el extremo izquierdo del segmento corto en (a). Por lo tanto, en la parte de atrás, debe haber las reacciones  $M$ ,  $P$  y  $T$  para mantener el equilibrio. La barra se ve sometida a una condición de esfuerzo combinado con los siguientes tipos de esfuerzos:

- Esfuerzo flexionante causado por el momento flexionante
- Esfuerzo cortante torsional causado por el par de torsión
- Esfuerzo cortante causado por la fuerza cortante vertical

Al revisar las figuras 10-4, 10-6 y 10-7, se concluye que uno de los puntos donde el esfuerzo probablemente alcanza su valor máximo se localiza en la cara superior del



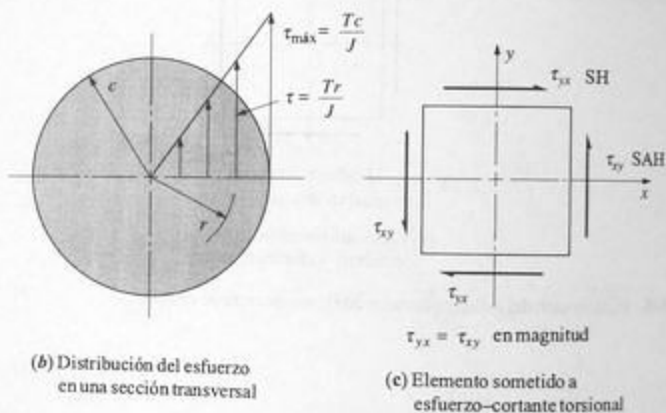
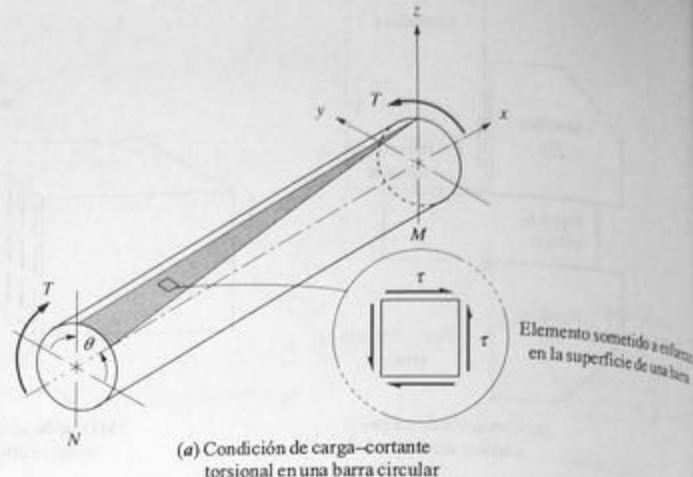
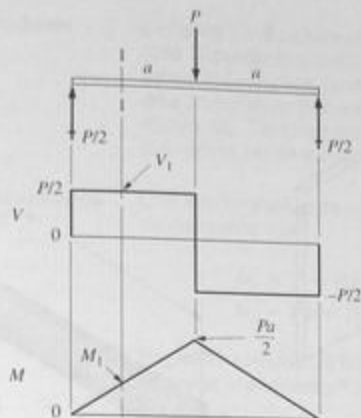


FIGURA 10-6 Distribución del esfuerzo cortante torsional en una flecha circular sólida.

segmento largo, cerca del apoyo. Llamado elemento  $K$  en la figura 10-9(b), se veía sometido al esfuerzo de tensión máximo y al esfuerzo cortante torsional máximo. Pero el esfuerzo cortante vertical sería cero por estar en la cara externa retirado del eje neutro.

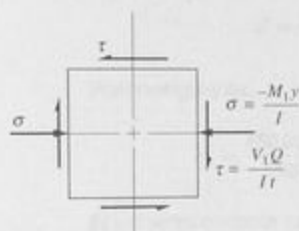
El elemento  $K$  está sometido entonces a un esfuerzo combinado, como se ilustra en la figura 10-10. El esfuerzo normal de tensión,  $\sigma_x$ , actúa paralelo al eje  $x$  a lo largo de la cara superior de la barra. El par de torsión aplicado tiende a producir un esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$  en la dirección y negativa en la en la cara en dirección hacia atrás. Juntos crean un par en sentido antihorario en el elemento. El elemento se completa ilustrando los esfuerzos cortantes  $\tau_{yx}$ , que producen un par en sentido horario en las demás caras.



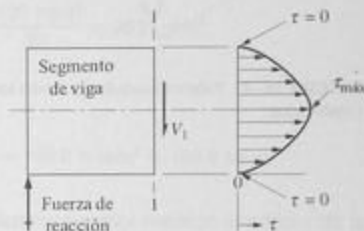
(a) Condición de carga-viga sometida a flexión



(b) Diagrama de cuerpo libre de un segmento a la izquierda de la sección 1-1



(c) Elemento sometido a esfuerzo



(d) Distribución del esfuerzo-cortante en la sección 1-1

FIGURA 10-7 Distribución del esfuerzo cortante en una viga.

El ejemplo mostrado a continuación incluye cálculos ilustrativos de los valores de los esfuerzos mostrados en la figura 10-10.

**Ejemplo 10-1**

La figura 10-8 muestra una palanca en forma de L que soporta una carga dirigida hacia abajo aplicada en su extremo. Calcule la condición de esfuerzo que existe en un punto de la cara superior de la palanca cerca del apoyo empotrado. Sea  $P = 1500 \text{ N}$ ,  $a = 150 \text{ mm}$ ,  $b = 300 \text{ mm}$  y  $D = 30 \text{ mm}$ . Muestre la condición de esfuerzo en un elemento.

**Solución**

**Objetivo**

Calcular la condición de esfuerzo y dibujar el elemento sometido a esfuerzo.

**Datos**

La geometría y las carga mostradas en la figura 10-8.  $P = 1500 \text{ N}$ . Dimensiones:  $a = 150 \text{ mm}$ ,  $b = 300 \text{ mm}$ ,  $D = 30 \text{ mm}$ .

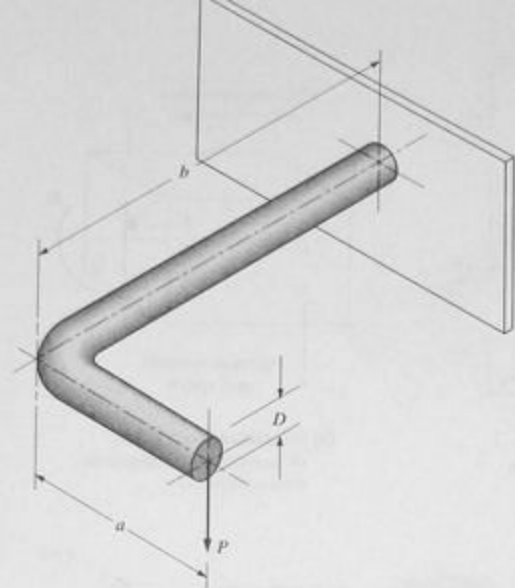


FIGURA 10-8 Palanca acodada que ilustra los esfuerzos combinados.

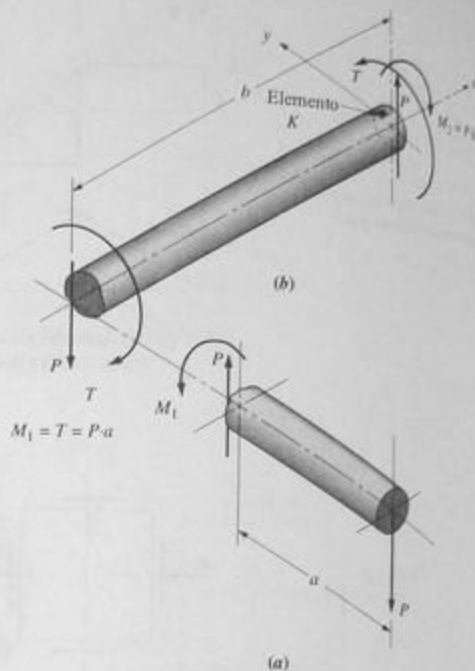


FIGURA 10-9 Diagramas de cuerpo libre de los segmentos de una palanca acodada. (a) Segmento corto de la palanca. (b) Segmento largo de la palanca.

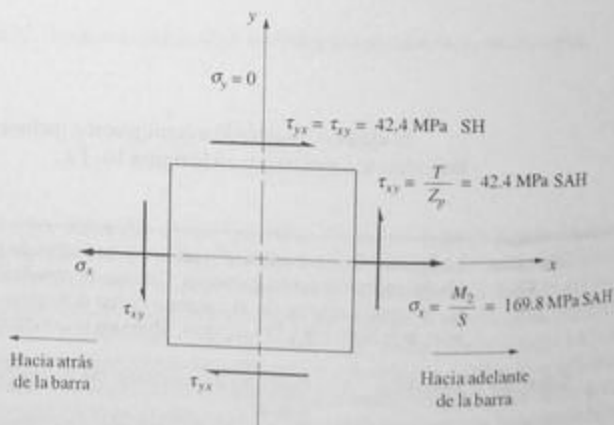


FIGURA 10-10 Elemento  $K$  de la figura 10-9 con los datos del ejemplo 10-1.

### Análisis

La figura 10-9 muestra la palanca dividida en dos diagramas de cuerpo libre. El punto de interés es el marcado como "elemento K" en el extremo derecho de la palanca donde se une al apoyo. El elemento está sometido a un esfuerzo flexionante originado por el momento de reacción en el apoyo,  $M_2$ . También está sometido a esfuerzo cortante torsional producido por el par de torsión,  $T$ .

### Resultados

Con los diagramas de cuerpo libre mostrados en la figura 10-9, se puede demostrar que:

$$M_1 = T = Pa = (1500 \text{ N})(150 \text{ mm}) = 225\,000 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$M_2 = Pb = (1500 \text{ N})(300 \text{ mm}) = 450\,000 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

Por tanto, el esfuerzo flexionante en la cara superior de la barra, mostrada como el elemento K en la figura 10-9(b) es:

$$\sigma_x = \frac{M_2 c}{I} = \frac{M_2}{S}$$

Pero el módulo de sección S es:

$$S = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{\pi(30 \text{ mm})^3}{32} = 2651 \text{ mm}^3$$

Por consiguiente:

$$\sigma_x = \frac{450\,000 \text{ N}\cdot\text{mm}}{2651 \text{ mm}^3} = 169.8 \text{ N/mm}^2 = 169.8 \text{ MPa}$$

El esfuerzo cortante torsional alcanza su valor máximo alrededor de la superficie externa de la barra, cuyo valor es:

$$\tau = \frac{T}{Z_p}$$

Pero el módulo polar de sección  $Z_p$  es:

$$Z_p = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi(30 \text{ mm})^3}{16} = 5301 \text{ mm}^3$$

Por tanto:

$$\tau = \frac{225\,000 \text{ N}\cdot\text{mm}}{5301 \text{ mm}^3} = 42.4 \text{ N/mm}^2 = 42.4 \text{ MPa}$$

### Comentarios

Los esfuerzos flexionante y cortante se muestran en el elemento K en la figura 10-10. Es probable que éste sea el punto donde ocurre el esfuerzo máximo combinado, el cual se analizará más adelante en este capítulo. En un punto en un lado de la barra sobre el eje y, existirá un esfuerzo cortante mayor porque el esfuerzo cortante torsional máximo se combina con el esfuerzo cortante vertical máximo producido por flexión. Pero el esfuerzo flexionante en dicho lugar es cero. Ese elemento también debe ser analizado.

## 10-5 ECUACIONES PARA DETERMINAR ESFUERZOS EN CUALQUIER DIRECCIÓN

El elemento sometido a esfuerzo inicial analizado en la sección 10-4 estaba orientado en una dirección conveniente con respecto al miembro que se estaba analizando. Los resultados de esta sección permiten calcular los esfuerzos en cualquier dirección y calcular los esfuerzos normales máximos y el esfuerzo cortante máximo de manera directa.

La figura 10-11 muestra un elemento con los ejes ortogonales  $u$  y  $v$  superpuestos en el elemento inicial, de tal modo que el eje  $u$  forma un ángulo  $\phi$  con respecto al eje  $x$  dado. En general, habrá un esfuerzo normal  $\sigma_u$  y un esfuerzo cortante  $\tau_{uv}$  actuando en la superficie inclinada  $AC$ . El desarrollo que sigue producirá las ecuaciones para calcular esos esfuerzos.

Antes de seguir adelante, nótese que la figura 10-11(a) muestra sólo dos dimensiones de un elemento que en realidad es un cubo tridimensional. La parte (b) de la figura muestra el cubo completo con la dimensión  $h$  en cada lado.

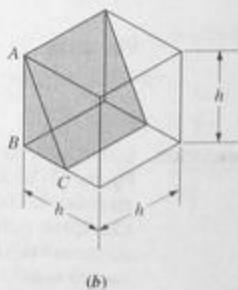
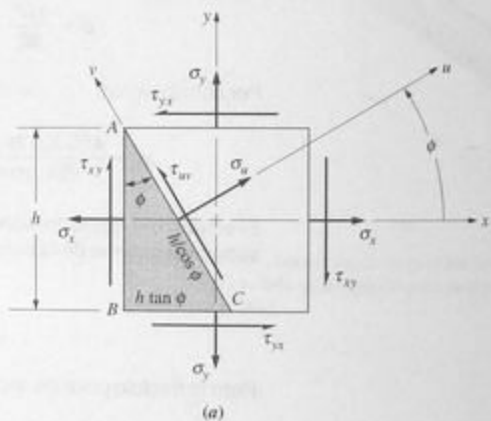


FIGURA 10-11 Elemento sometido a esfuerzo inicial con los ejes  $u$  y  $v$  incluidos. (a) Elemento con una cara inclinada. (b) Elemento tridimensional que muestra la cuña.

**Esfuerzo normal en la dirección  $u$ ,  $\sigma_u$ .** Se visualiza una parte en forma de cuña del elemento inicial como se muestra en la figura 10-12. Nótese cómo se localiza el ángulo  $\phi$ . El lado  $AB$  es el lado izquierdo original del elemento inicial cuya altura es  $h$ . La base de la cuña, el lado  $BC$ , es sólo una parte de la base del elemento inicial, donde la longitud queda determinada por el ángulo  $\phi$ .

$$BC = h \tan \phi$$

Asimismo, la longitud del lado inclinado de la cuña,  $AC$ , es:

$$AC = \frac{h}{\cos \phi}$$

Estas longitudes son importantes porque ahora se van a considerar todas las fuerzas que actúan en la cuña. Como fuerza es el producto de esfuerzo por área, se tiene que conocer el área sobre la que actúa cada uno de los esfuerzos. Por principio de cuentas  $\sigma_x$  actúa en toda la cara izquierda de la cuña cuya área es  $h^2$ . Recuérdese que el peralte de la cuña perpendicular al papel también es  $h$ . Por tanto:

$$\text{fuerza producida por } \sigma_x = \sigma_x h^2$$

Con un razonamiento similar:

$$\text{fuerza producida por } \sigma_y = \sigma_y h^2 \tan \phi$$

$$\text{fuerza producida por } \tau_{xy} = \tau_{xy} h^2$$

$$\text{fuerza producida por } \tau_{yx} = \tau_{yx} h^2 \tan \phi$$

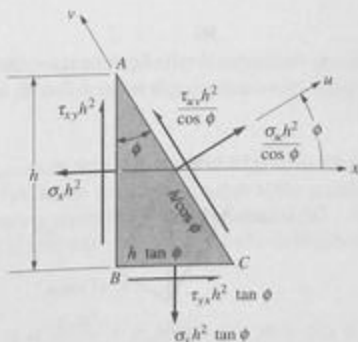


FIGURA 10-12 Diagrama de cuerpo libre de una cuña con las fuerzas que actúan en cada una de sus caras.

También se deben considerar los esfuerzos que actúan en la cara inclinada de la cuña.

$$\text{fuerza producida por } \sigma_u = \frac{\sigma_u h^2}{\cos \phi}$$

$$\text{fuerza producida por } \tau_{uv} = \frac{\tau_{uv} h^2}{\cos \phi}$$

Ahora, con el principio de equilibrio, se pueden sumar las fuerzas en la dirección  $u$ . La ecuación resultante se puede resolver para  $\sigma_u$ . El proceso se facilita descomponiendo todas las fuerzas en sus componentes perpendiculares y paralelas a la cara inclinada de la cuña. La figura 10-13 muestra lo anterior para cada una de las fuerzas excepto para las producidas por  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy}$ , las cuales ya están alineadas con los ejes  $u$  y  $v$ . Por tanto:

$$\sum F_u = 0 = \frac{\sigma_u h^2}{\cos \phi} - \sigma_x h^2 \cos \phi - \sigma_y h^2 \tan \phi \sin \phi + \tau_{xy} h^2 \sin \phi + \tau_{yx} h^2 \tan \phi \cos \phi$$

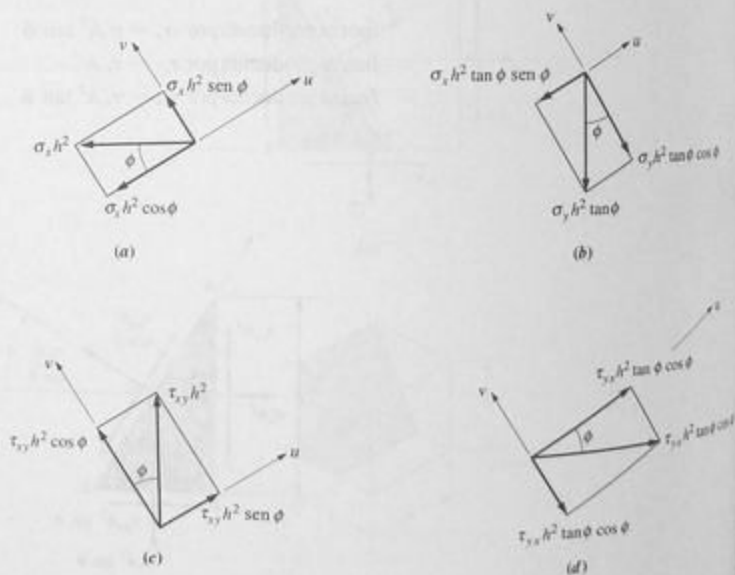


FIGURA 10-13 Descomposición de las fuerzas en las direcciones  $u$  y  $v$ . (a) Componentes de fuerza originadas por  $\sigma_x$ . (b) Componentes de fuerza originadas por  $\sigma_y$ . (c) Componentes de fuerza producidas por  $\tau_{xy}$ . (d) Componentes de fuerza producidas por  $\tau_{yx}$ .

Como primer paso para resolver la ecuación anterior para  $\sigma_n$ , todos los términos que incluyen  $h^2$ , se eliminan. Además, se observa que  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  y, por tanto,  $\tan \phi = \sin \phi / \cos \phi$ . La ecuación de equilibrio se vuelve entonces:

$$0 = \frac{\sigma_x}{\cos \phi} - \sigma_x \cos \phi - \frac{\sigma_y \sin \phi \sin \phi}{\cos \phi} + \tau_{xy} \sin \phi + \frac{\tau_{xy} \sin \phi \cos \phi}{\cos \phi}$$

Ahora, multiplíquese por  $\cos \phi$  para obtener:

$$0 = \sigma_x - \sigma_x \cos^2 \phi - \sigma_y \sin^2 \phi + \tau_{xy} \sin \phi \cos \phi + \tau_{xy} \sin \phi \cos \phi$$

Combinense los dos últimos términos y resuélvase para  $\sigma_n$ .

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \phi + \sigma_y \sin^2 \phi - 2\tau_{xy} \sin \phi \cos \phi$$

Esta fórmula se puede usar para calcular  $\sigma_n$ , aunque se puede obtener una forma más conveniente con las siguientes identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}\cos^2 \phi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi \\ \sin^2 \phi &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\phi \\ \sin \phi \cos \phi &= \frac{1}{2} \sin 2\phi\end{aligned}$$

Después de las sustituciones se obtiene:

$$\sigma_n = \frac{1}{2}\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_y \cos 2\phi + \frac{1}{2}\sigma_y - \frac{1}{2}\sigma_y \cos 2\phi - \tau_{xy} \sin 2\phi$$


Al combinar los términos, se obtiene:

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\phi - \tau_{xy} \sin 2\phi \quad (10-1)$$

La ecuación (10-1) se puede usar para calcular el esfuerzo normal en cualquier dirección siempre que la condición de esfuerzo en alguna dirección, indicada por los ejes  $x$  y  $y$ , se conozca.


**Esfuerzo cortante,  $\tau_{uv}$ , que actúa paralelo al plano de corte.** Ahora, se desarrollará la ecuación del esfuerzo cortante,  $\tau_{uv}$ , que actúa paralelo al plano de corte y perpendicular a  $\sigma_n$ . De nuevo, recurriendo a las figuras 10-12 y 10-13, se pueden sumar las fuerzas que actúan en el elemento en forma de cuña en la dirección  $v$ .

$$\begin{aligned}\sum F_v = 0 &= \frac{\tau_{uv} h^2}{\cos \phi} + \sigma_x h^2 \sin \phi - \sigma_y h^2 \tan \phi \cos \phi \\ &+ \tau_{xy} h^2 \cos \phi - \tau_{xy} h^2 \tan \phi \sin \phi\end{aligned}$$

 Esfuerzo normal en la dirección  $\mu$



Con las mismas técnicas anteriores, esta ecuación se puede simplificar y resolver para  $\tau_{xy}$  para obtener:

 **Esfuerzo cortante,  $\tau_{xy}$  que actúa en la cara del elemento**

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\phi - \tau_{xy} \cos 2\phi \quad (10-2)$$

La ecuación (10-2) se puede usar para calcular el esfuerzo cortante que actúa en la cara del elemento a cualquier orientación angular.

## 10-6 ESFUERZOS PRINCIPALES

En el diseño y en el análisis del esfuerzo, con frecuencia se requieren los esfuerzos mínimos para garantizar la seguridad del miembro de carga. Se puede usar la ecuación (10-1) para calcular el esfuerzo normal máximo si se sabe a qué ángulo ocurre  $\phi$ .

Por el estudio del cálculo, se sabe que el valor del ángulo  $\phi$  al que ocurre el esfuerzo normal máximo o mínimo se puede determinar diferenciando la función y haciendo el resultado igual a cero y luego resolviendo para  $\phi$ . Diferenciando la ecuación (10-1) se obtiene:

$$\frac{d\sigma_n}{d\phi} = 0 = 0 + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)(-\sin 2\phi)(2) - \tau_{xy} \cos 2\phi(2)$$


Dividiendo entre  $\cos 2\phi$  y simplificando da:

$$0 = -(\sigma_x - \sigma_y) \tan 2\phi - 2\tau_{xy}$$

Y resolviendo para  $2\phi$ :

$$\tan 2\phi = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-\tau_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)} \quad (10-3)$$

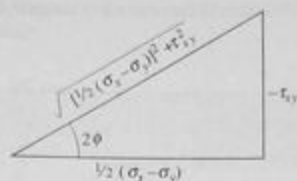
El ángulo  $\phi$  es, por tanto:

 **Ángulo que localiza el esfuerzo principal máximo,  $\phi_1$**

$$\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{-\tau_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)} \quad (10-4)$$

Si se sustituye el valor de  $\phi$  definido por las ecuaciones (10-3) y (10-4) en la ecuación (10-1), se deriva una ecuación para el esfuerzo normal máximo que actúa en el elemento. Además, se deriva la ecuación para el esfuerzo normal mínimo. Estos dos esfuerzos se llaman *esfuerzos principales*, usando  $\sigma_1$  para denotar el *esfuerzo principal máximo* y  $\sigma_2$  para denotar el *esfuerzo principal mínimo*.

Nótese en la ecuación (10-1) que se requieren los valores de  $\sin 2\phi$  y  $\cos 2\phi$ . La figura 10-14 es un auxiliar gráfico para obtener las expresiones de estas funciones. El triángulo rectángulo tiene los catetos opuestos y adyacentes definidos por los términos de la función tangente de la ecuación (10-3).



Triángulo definido por la ecuación (10-3):

$$\tan 2\phi = \frac{-\tau_{xy}}{1/2 (\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$\text{sen } 2\phi = \frac{-\tau_{xy}}{\sqrt{[1/2 (\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\text{cos } 2\phi = \frac{1/2 (\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{[1/2 (\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2}}$$

FIGURA 10-14 Desarrollo de sen  $2\phi$  y cos  $2\phi$  para las fórmulas de esfuerzo principal.

Sustituyendo en la ecuación (10-1) y simplificando se tiene:

Esfuerzo principal  
máximo,  $\sigma_1$

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (10-5)$$

Como la raíz cuadrada tiene dos valores posibles + y -, también se puede hallar la expresión para el esfuerzo principal mínimo,  $\sigma_2$ .

Esfuerzo principal  
mínimo,  $\sigma_2$

$$\sigma_{\text{mín}} = \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (10-6)$$

Se podría suponer que existe un esfuerzo cortante junto con estos esfuerzos normales. Pero se puede demostrar que sustituyendo el valor de  $\phi$  de la ecuación (10-4) en la ecuación (10-2) del esfuerzo cortante el resultado será cero. En conclusión:

En el elemento en el que actúan los esfuerzos principales, el esfuerzo cortante es cero.

## 10-7 ESFUERZO CORTANTE MÁXIMO

Se puede usar la misma técnica para determinar el esfuerzo cortante máximo trabajando por medio de la ecuación (10-2). Diferenciando con respecto a  $\phi$ , y haciendo que el resultado sea igual a cero se obtiene:

$$\frac{d\tau_{xy}}{d\phi} = 0 = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)(\cos 2\phi)(2) - \tau_{xy}(-\text{sen } 2\phi)(2)$$

Dividiendo entre  $\cos \phi$  y simplificando:

$$\tan 2\phi = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\tau_{xy}} \quad (10-7)$$

Resolviendo para  $\phi$  da:

$$\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\tau_{xy}} \quad (10-8)$$

➡ **Ángulo que localiza el esfuerzo cortante máximo,  $\tau_{\text{máx}}$**

Obviamente, el valor de  $\phi$  de la ecuación (10-8) es diferente del de la ecuación (10-4). De hecho, se verá que los valores están *siempre a 45° uno del otro*.

La figura 10-15 muestra el triángulo rectángulo con el que se pueden determinar  $\sin 2\phi$  y  $\cos 2\phi$  tal como se hizo en la figura 10-14. Sustituyendo estos valores en la ecuación (10-2) se obtiene el esfuerzo cortante máximo.

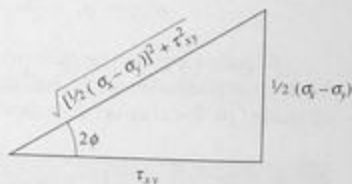
➡ **Esfuerzo cortante máximo,  $\tau_{\text{máx}}$**

$$\tau_{\text{máx}} = \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (10-9)$$

En este caso, se debe verificar para ver si existe un esfuerzo normal en el elemento sometido al esfuerzo cortante máximo. Al sustituir el valor de  $\phi$  de la ecuación (10-8) en la ecuación (10-1) del esfuerzo normal general se obtiene:

➡ **Esfuerzo normal que actúa en el elemento sometido a esfuerzo cortante máximo**

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (10-10)$$



Triángulo definido por la ecuación (10-7):

$$\tan 2\phi = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\tau_{xy}}$$

$$\sin 2\phi = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\phi = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2}}$$

FIGURA 10-15 Desarrollo de  $\sin 2\phi$  y  $\cos 2\phi$  para la fórmula de esfuerzo cortante máximo.

Esta es la fórmula que da el promedio de los esfuerzos normales iniciales,  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Por consiguiente, se puede concluir:

En el elemento en el que ocurre el esfuerzo cortante máximo también habrá un esfuerzo normal, igual al promedio de los esfuerzos normales iniciales.

## 10-8 CÍRCULO DE MOHR PARA ESFUERZO

El uso de las ecuaciones (10-1) a (10-10) a menudo presenta dificultades por las numerosas combinaciones posibles de los signos de los términos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  y  $\phi$ . Además, las dos raíces de la raíz cuadrada y el hecho de que la función tangente inversa puede producir ángulos en cualquiera de los cuatro cuadrantes presentan dificultades. Afortunadamente, existe un auxiliar gráfico, llamado *círculo de Mohr*, que puede ayudar a resolver estos problemas. El uso del círculo de Mohr debe proporcionarle a usted una mejor comprensión del caso general de esfuerzo en un punto.

Se puede demostrar que las dos ecuaciones (10-1) y (10-2), de los esfuerzos normal y cortante en un punto en cualquier dirección se pueden combinar y ordenar en la forma de la ecuación de un círculo. Presentado por primera vez por Otto Mohr en 1895, el círculo permite un cálculo rápido y exacto de:

1. Los esfuerzos principales máximo y mínimo [ecuaciones (10-5) y (10-6)]
2. El esfuerzo cortante máximo [ecuación (10-9)]
3. Los ángulos de orientación del elemento sometido al esfuerzo principal y del elemento sometido al esfuerzo cortante máximo [ecuaciones (10-4) y (10-8)]
4. El esfuerzo normal que existe junto con el esfuerzo cortante máximo sobre el elemento sometido al esfuerzo cortante máximo [ecuación (10-10)]
5. La condición de esfuerzo en cualquier orientación del elemento sometido a esfuerzo [ecuaciones (10-1) y (10-2)]

El círculo de Mohr se dibuja en un sistema de ejes perpendiculares con el esfuerzo cortante,  $\tau$ , marcado en el eje vertical y el esfuerzo normal,  $\sigma$ , en el eje horizontal, como se muestra en la figura 10-16. La convención siguiente se usa en este libro:

### Convenciones de signos:

1. Los esfuerzos normales positivos (de tensión) actúan hacia la derecha.
2. Los esfuerzos normales negativos (de compresión) actúan hacia la izquierda.
3. Los esfuerzos cortantes que tienden a girar al elemento sometido a esfuerzo en sentido horario (SH) se trazan hacia arriba en el eje  $\tau$ .
4. Los esfuerzos cortantes que tienden a girar al elemento sometido a esfuerzo en sentido antihorario (SAH) se trazan hacia abajo.

El procedimiento descrito a continuación se puede usar para dibujar el círculo de Mohr. Los pasos 1-7 se muestran en la figura 10-16. El elemento sometido a esfuerzo completo, tal como aparece en la figura 10-1 es la base de este ejemplo.

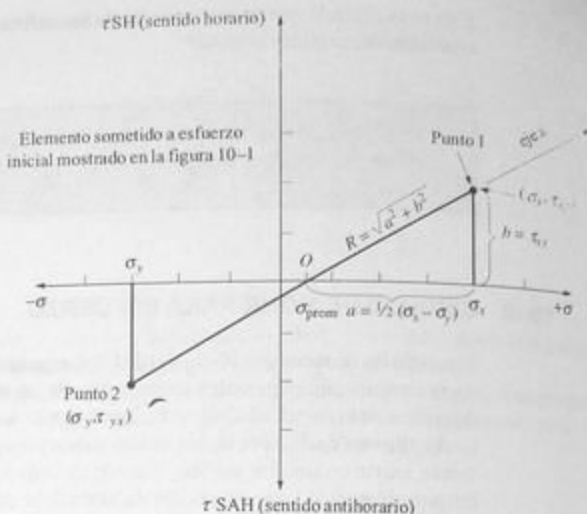


FIGURA 10-16 Pasos 1 al 7 del procedimiento de construcción del círculo de Mohr.

**Procedimiento  
para dibujar  
el círculo de Mohr**

1. Identifique la condición de esfuerzo en el punto de interés y representélo como el *elemento sometido a esfuerzo inicial* como se muestra en la figura 10-1.
2. La combinación de  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy}$  se marca como *punto 1* en el plano  $\sigma$ - $\tau$ .
3. La combinación de  $\sigma_y$  y  $\tau_{yx}$  se marca entonces como *punto 2*. Observe que  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{yx}$  siempre actúan en direcciones opuestas. Por consiguiente, un punto se marcará arriba del eje  $\sigma$  y el otro debajo.
4. Trace una línea recta entre los dos puntos.
5. Esta línea cruza el eje  $\sigma$  en el centro del círculo de Mohr, el cual también es el valor del *esfuerzo normal promedio* aplicado al elemento sometido a esfuerzo inicial. La localización del centro se puede observar con los datos utilizados para trazar los puntos o se puede calcular con la ecuación (10-10), repetida aquí:

$$\sigma_{prom} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y)$$

Por conveniencia, designe el centro como  $O$ .

6. Identifique la línea que parte de  $O$  y pasa por el punto 1 ( $\sigma_x, \tau_{xy}$ ) como eje  $x$ . Esta línea corresponde al eje  $x$  original y es esencial que se correlacionen los datos del círculo de Mohr con las direcciones originales  $x$  y  $y$ .
7. Los puntos  $O$ ,  $\sigma_x$  y el punto 1 forman un importante triángulo rectángulo porque la distancia de  $O$  al punto 1, la hipotenusa del triángulo, es igual al

radio del círculo,  $R$ . Si los otros dos lados se designan  $a$  y  $b$ , se pueden hacer los cálculos siguientes:

$$a = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$$

$$b = \tau_{xy}$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{[1/2(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2}$$

Observe que la ecuación de  $R$  es idéntica a la ecuación (10-9) que da el máximo esfuerzo cortante en el elemento. Por tanto:

La longitud del radio del círculo de Mohr es igual a la magnitud del esfuerzo cortante máximo.

En la figura 10-17 se muestran los pasos 8-11.

8. Dibuje el círculo completo con el centro en  $O$  y el radio  $R$ .
9. Trace el diámetro vertical del círculo. El punto en la parte superior del círculo tiene las coordenadas  $(\sigma_{\text{prom}}, \tau_{\text{máx}})$ , donde el esfuerzo cortante tiene la dirección horaria (SH). El punto en la parte inferior del círculo representa  $(\sigma_{\text{prom}}, \tau_{\text{máx}})$ , donde el esfuerzo cortante tiene la dirección antihoraria (SAH).

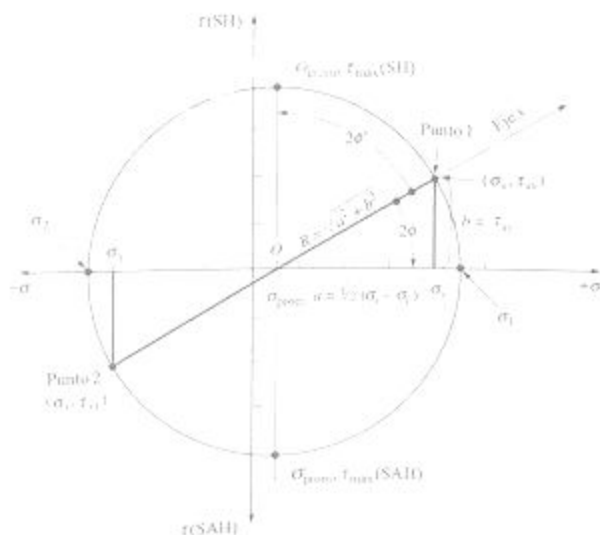


FIGURA 10-17 Círculo de Mohr terminado.

10. Identifique los puntos en el eje  $\sigma$  en los extremos del diámetro horizontal como  $\sigma_1$  a la derecha (el esfuerzo principal máximo) y  $\sigma_2$  a la izquierda (el esfuerzo principal mínimo). Observe que el esfuerzo cortante es cero en esos puntos.
11. Calcule los valores de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  con:

$$\sigma_1 = "O" + R \quad (10-11)$$

$$\sigma_2 = "O" - R \quad (10-12)$$

donde "O" representa la coordenada del centro del círculo,  $\sigma_{prom}$ , y  $R$  el radio. Por consiguiente las ecuaciones (10-11) y (10-12) son idénticas a las ecuaciones (10-5) y (10-6) de los esfuerzos principales.

Los pasos que siguen determinan los ángulos de orientación del elemento sometido a esfuerzo principal y del elemento sometido a esfuerzo cortante máximo. Un concepto importante a recordar es que los *ángulos obtenidos con el círculo de Mohr son el doble de los ángulos reales*. La razón de esto es que las ecuaciones en las que se basa son funciones de  $2\phi$ .

12. La orientación del elemento sometido a esfuerzo principal se determina calculando el ángulo del eje  $x$  al eje  $\sigma_1$ , designado como  $2\phi$  en la figura 10-17. Con los datos que hay en el círculo se puede ver que:

$$2\phi = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

El argumento de esta función tangente inversa corresponde al valor absoluto del argumento mostrado en la ecuación (10-4). Los problemas con

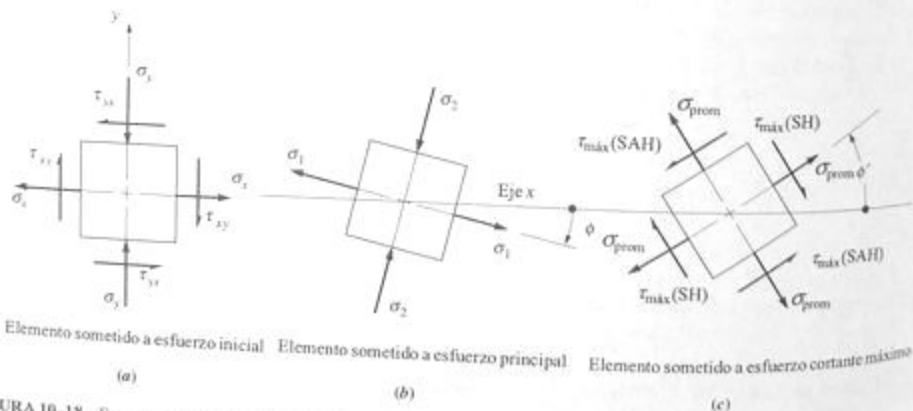


FIGURA 10-18 Forma general de los resultados finales del análisis con el círculo de Mohr.

signos para el ángulo resultante se evitan considerando la *dirección del eje  $x$  al eje  $\sigma_1$* , como horaria en este ejemplo. Luego, el elemento sometido a esfuerzo principal se hace girar *en la misma dirección* a partir del eje  $x$  en una cantidad  $\phi$  para localizar la cara en la que actúa el esfuerzo principal máximo,  $\sigma_1$ .

13. Dibuje el elemento sometido a esfuerzo principal en su orientación adecuada determinada con el paso 12 con los dos esfuerzos principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  mostrados [véase la figura 10-18(a) y (b)].
14. La orientación del elemento sometido a esfuerzo cortante máximo se determina con el ángulo *del eje  $x$  al eje  $\tau_{\max}$*  designado  $2\phi'$  en la figura 10-17. En este ejemplo:

$$2\phi' = 90^\circ - 2\phi$$

Con trigonometría se puede demostrar que esto equivale a determinar la tangente inversa de  $a/b$ , el recíproco del argumento usado para determinar  $2\phi$ . Por tanto, se trata de una evaluación efectiva de la ecuación (10-8), derivada para determinar el ángulo de orientación del elemento en el que actúa el esfuerzo cortante máximo.

De nuevo, los problemas con signos para el ángulo resultante se evitan considerando la *dirección del eje  $x$  al eje  $\tau_{\max}$*  en el círculo, como antihoraria en este ejemplo. Por tanto, el elemento sometido a máximo esfuerzo cortante se hace girar *en la misma dirección* a partir del eje  $x$  una cantidad  $\phi'$  para localizar la cara en la que actúa el esfuerzo cortante máximo.

15. Dibuje el elemento sometido a esfuerzo cortante máximo en su orientación apropiada determinada con el paso 14 con los esfuerzos cortantes y el esfuerzo normal promedio actuando en las cuatro caras [véase la figura 10-18(c)]. En general, la figura 10-18 es el resultado deseado de un análisis con el círculo de Mohr. Se muestran el elemento sometido a esfuerzo inicial que establece los ejes  $x$  y  $y$ , el elemento sometido a esfuerzo principal dibujado con su rotación apropiada con respecto al eje  $x$  y el elemento sometido a esfuerzo cortante máximo también dibujado con su rotación apropiada con respecto al eje  $x$ .

**Ejemplo 10-2** Se determinó que un punto de un miembro de carga se encuentra sometido a la siguiente condición de carga:

$$\sigma_x = 400 \text{ MPa} \quad \sigma_y = -300 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 200 \text{ MPa (SH)}$$

Realice lo siguiente:

- (a) Dibuje el elemento sometido a esfuerzo inicial.
- (b) Dibuje el círculo de Mohr completo con los puntos críticos marcados.



- (c) Dibuje el elemento sometido a esfuerzo principal completo.  
 (d) Dibuje el elemento sometido a esfuerzo cortante máximo.

**Solución**

Se utilizará el paso 15 del procedimiento antes descrito para resolver el problema. En la figura 10-20(a) se dibuja el elemento sometido a esfuerzo inicial y en la figura 10-19 se dibuja el círculo de Mohr. Los resultados numéricos de los pasos 1-7 se resumen a continuación.

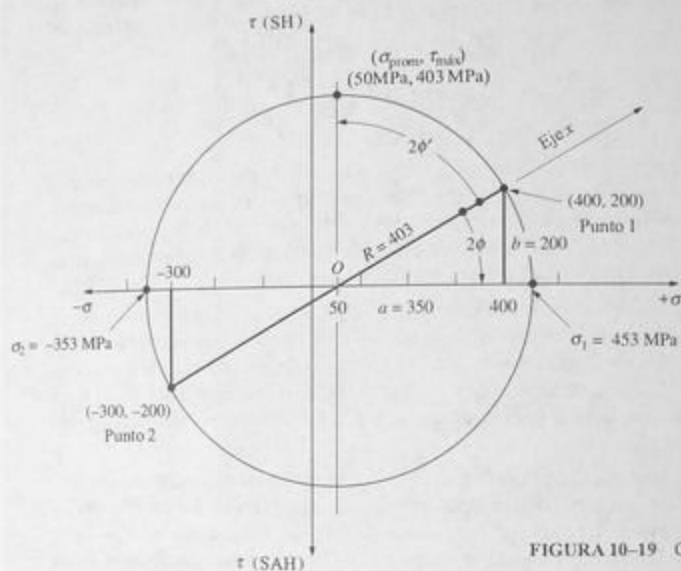


FIGURA 10-19 Círculo de Mohr completo del ejemplo 10-2

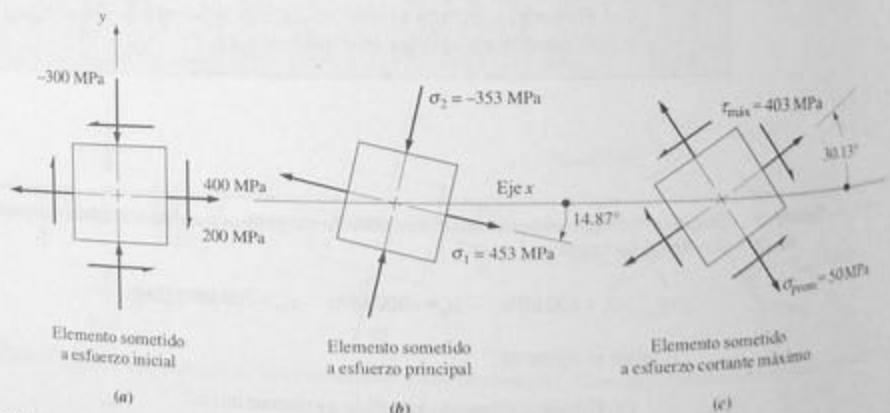


FIGURA 10-20 Resultados del ejemplo 10-2.

El centro  $O$  del círculo está en  $\sigma_{prom}$ :

$$\sigma_{prom} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}[400 + (-300)] = 50 \text{ MPa}$$

El lado inferior del triángulo:

$$a = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) = \frac{1}{2}[400 - (-300)] = 350 \text{ MPa}$$

El lado vertical del triángulo:

$$b = \tau_{xy} = 200 \text{ MPa}$$

El radio del círculo:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(350)^2 + (200)^2} = 403 \text{ MPa}$$

El paso 8 es el trazo del círculo. Los puntos correspondientes a datos significativos de los pasos 9–11 se resumen a continuación.

$$\sigma_{prom} = 50 \text{ MPa} \quad (\text{igual a la localización de } O)$$

$$\tau_{max} = 403 \text{ MPa} \quad (\text{igual al valor de } R)$$

$$\sigma_1 = O + R = 50 + 403 = 453 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = O - R = 50 - 403 = -353 \text{ MPa}$$

Los pasos 12–15 se completan en las figuras 10–19 y 10–20. Los cálculos de los ángulos se resumen a continuación.

$$2\phi = \tan^{-1} \frac{b}{a} = \tan^{-1} \frac{200}{350} = 29.74^\circ$$

Note que  $2\phi$  está medido en sentido horario a partir del eje  $x$  hacia  $\sigma_1$  en el círculo.

$$\phi = \frac{29.74^\circ}{2} = 14.87^\circ$$

Así pues, en la figura 10–20(b), el elemento sometido a esfuerzo principal se dibuja girado  $14.87^\circ$  en sentido horario a partir del eje original  $x$  hacia la cara en la que actúa  $\sigma_1$ .

$$2\phi' = 90^\circ - 2\phi = 90^\circ - 29.74^\circ = 60.26^\circ$$

Observe que  $2\phi'$  está medido en sentido antihorario a partir del eje  $x$  hacia  $\tau_{max}$  en el círculo.

$$\phi' = \frac{60.26^\circ}{2} = 30.13^\circ$$

Por tanto, en la figura 10–20(c) el elemento sometido a esfuerzo cortante máximo se dibuja girado  $30.13^\circ$  en sentido antihorario a partir del eje  $x$  original hacia la cara en la que actúa  $\tau_{max}$ .

Con esto queda terminado el ejemplo 10-2.

### Resumen de los resultados del ejemplo 10-2 Círculo de Mohr

**Datos**  $\sigma_x = 400 \text{ MPa}$   $\sigma_y = -300 \text{ MPa}$   $\tau_{xy} = 200 \text{ MPa SAH}$

**Resultados** Figuras 10-19 y 10-20.

$\sigma_1 = 453 \text{ MPa}$   $\sigma_2 = -353 \text{ MPa}$   $\phi = 14.87^\circ \text{ SH}$   
 $\tau_{\text{máx}} = 403 \text{ MPa}$   $\sigma_{\text{prom}} = 50 \text{ MPa}$   $\phi' = 30.13^\circ \text{ SAH}$

**Comentario** El eje x queda en el primer cuadrante.

## 10-9 EJEMPLOS DEL USO DEL CÍRCULO DE MOHR

Los datos del ejemplo 10-2 de la sección anterior y de los ejemplos 10-3 a 10-8 siguientes, se seleccionaron para demostrar una variedad de resultados. Una variable importante es el cuadrante donde queda el eje x y la definición correspondiente de los ángulos de rotación del elemento sometido a esfuerzo principal y del elemento sometido a esfuerzo cortante máximo.

Los ejemplos 10-6, 10-7 y 10-8 presentan los casos especiales de esfuerzo biaxial sin cortante, tensión uniaxial sin cortante y cortante puro. Éstos deben ayudar a entender el comportamiento de los miembros de carga sometidos a esos esfuerzos.

La solución de cada ejemplo es el círculo de Mohr junto con los elementos, adecuadamente marcados. En cada problema, los objetivos son:

- Dibujar el elemento sometido a esfuerzo inicial.
- Dibujar el círculo de Mohr completo con sus puntos críticos debidamente marcados.
- Dibujar el elemento sometido a esfuerzo principal completo.
- Dibujar el elemento sometido a esfuerzo cortante completo.

**Ejemplo 10-3** **Datos**  $\sigma_x = 60 \text{ ksi}$   $\sigma_y = -40 \text{ ksi}$   $\tau_{xy} = 30 \text{ ksi SAH}$   
**Círculo de Mohr**

**Resultados** Figura 10-21.

$\sigma_1 = 68.3 \text{ ksi}$   $\sigma_2 = -48.3 \text{ ksi}$   $\phi = 15.48^\circ \text{ SAH}$   
 $\tau_{\text{máx}} = 58.3 \text{ ksi}$   $\sigma_{\text{prom}} = 10 \text{ ksi}$   $\phi' = 60.48^\circ \text{ SAH}$

**Comentario** El eje x queda en el segundo cuadrante.

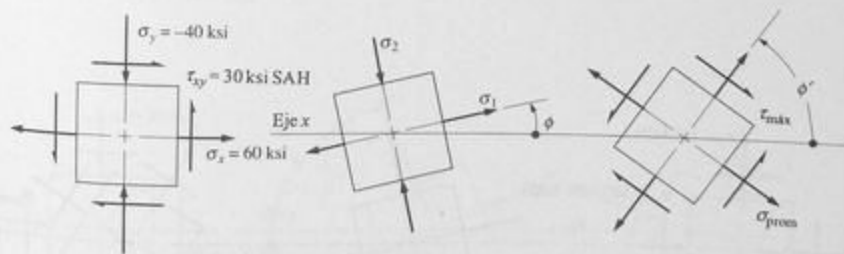
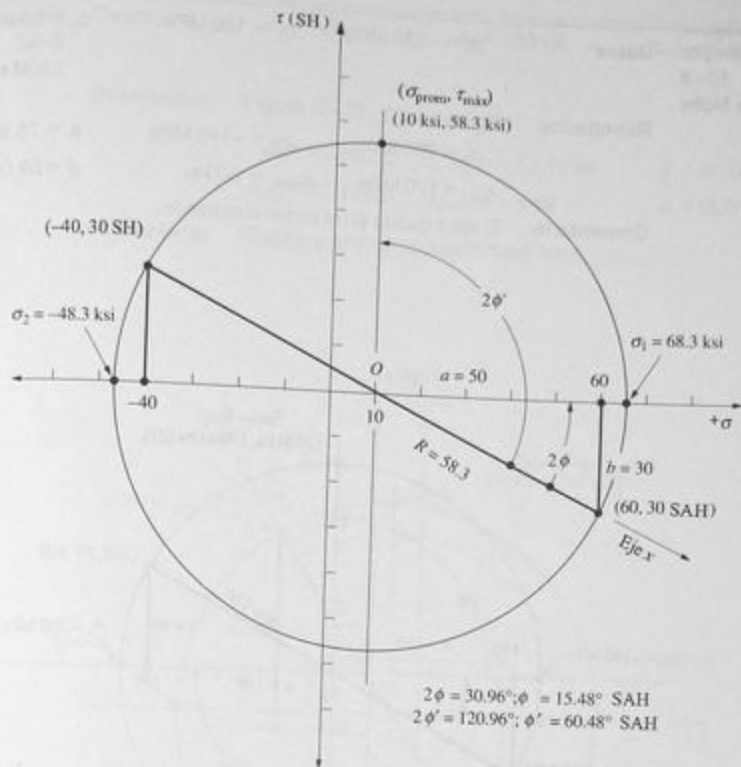


FIGURA 10-21 Resultados del ejemplo 10-3. El eje  $X$  se encuentra en el segundo cuadrante.

Ejemplo  
10-4  
Círculo de Mohr

Datos	$\sigma_x = -120 \text{ MPa}$	$\sigma_y = 180 \text{ MPa}$	$\tau_{xy} = 80 \text{ MPa SAH}$
Resultados	Figura 10-22.		
	$\sigma_1 = 200 \text{ MPa}$	$\sigma_2 = -140 \text{ MPa}$	$\phi = 75.96^\circ \text{ SAH}$
	$\tau_{\text{máx}} = 170 \text{ MPa}$	$\sigma_{\text{prom}} = 30 \text{ ksi}$	$\phi' = 59.04^\circ \text{ SH}$
Comentario	El eje x queda en el tercer cuadrante.		

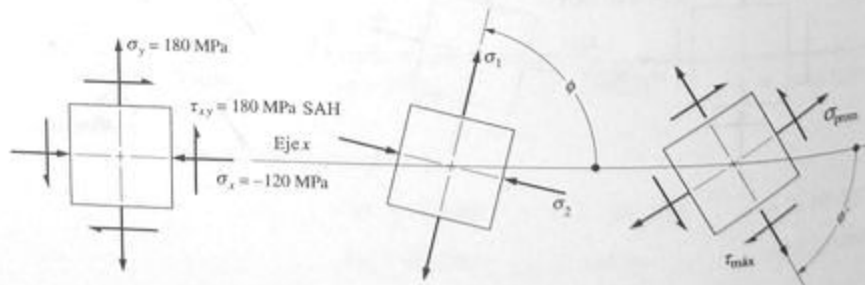
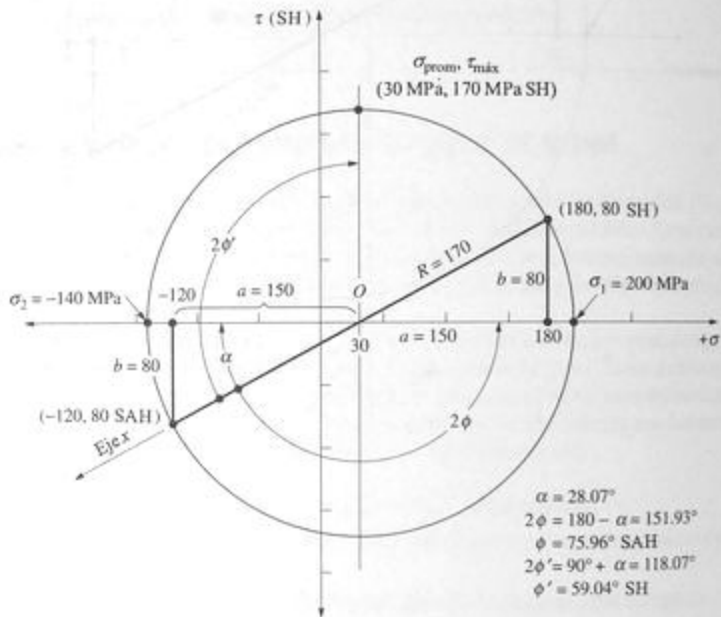


FIGURA 10-22 Resultados del ejemplo 10-4. El eje X se encuentra en el tercer cuadrante.

**Ejemplo 10-5**  
Circulo de Mohr

**Datos**  $\sigma_x = -30$  ksi  $\sigma_y = 180$  ksi  $\tau_{xy} = 40$  ksi SH

**Resultados** Figura 10-23.

$\sigma_1 = 42.17$  ksi  $\sigma_2 = -52.17$  ksi  $\phi = 61.0^\circ$  SH

$\tau_{m\acute{a}x} = 47.17$  ksi  $\sigma_{prom} = -5$  ksi  $\phi' = 16.0^\circ$  SH

**Comentario** El eje  $x$  queda en el cuarto cuadrante.

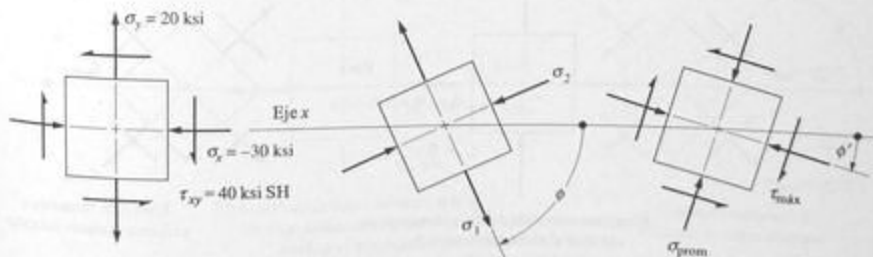
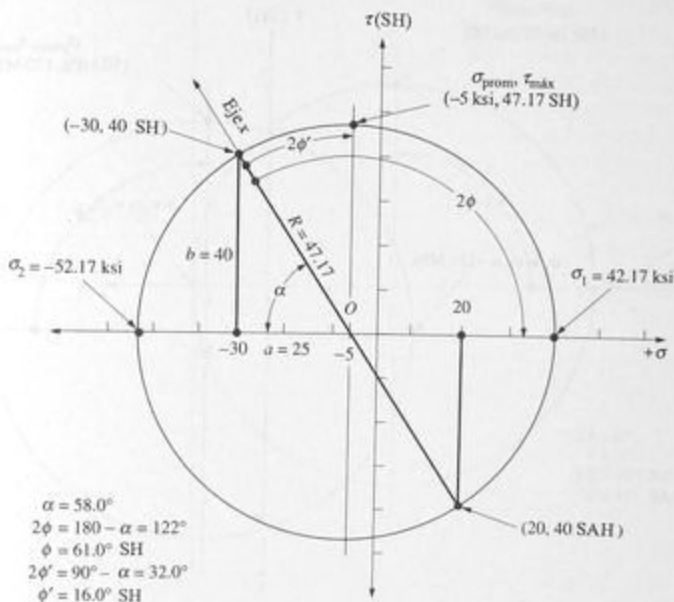


FIGURA 10-23 Resultados del ejemplo 10-5. El eje  $X$  se encuentra en el cuarto cuadrante.

Ejemplo  
10-6  
Círculo de Mohr

Datos  $\sigma_x = 220 \text{ MPa}$   $\sigma_y = -120 \text{ MPa}$   $\tau_{xy} = 0 \text{ MPa}$

Resultados Figura 10-24.

$\sigma_1 = 220 \text{ MPa}$   $\sigma_2 = -120 \text{ MPa}$   $\phi = 0^\circ$   
 $\tau_{\max} = 170 \text{ MPa}$   $\sigma_{\text{prom}} = 50 \text{ ksi}$   $\phi' = 45.0^\circ \text{ SAH}$

Comentario Caso especial de esfuerzo biaxial sin cortante en el elemento dado.

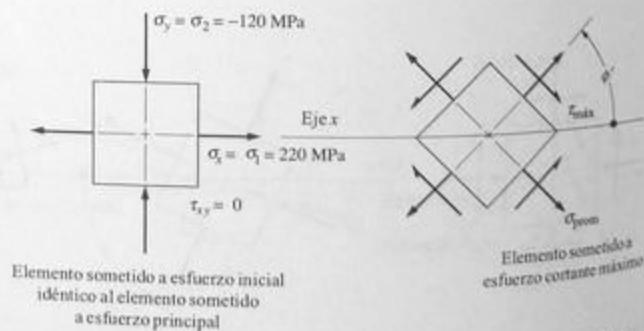
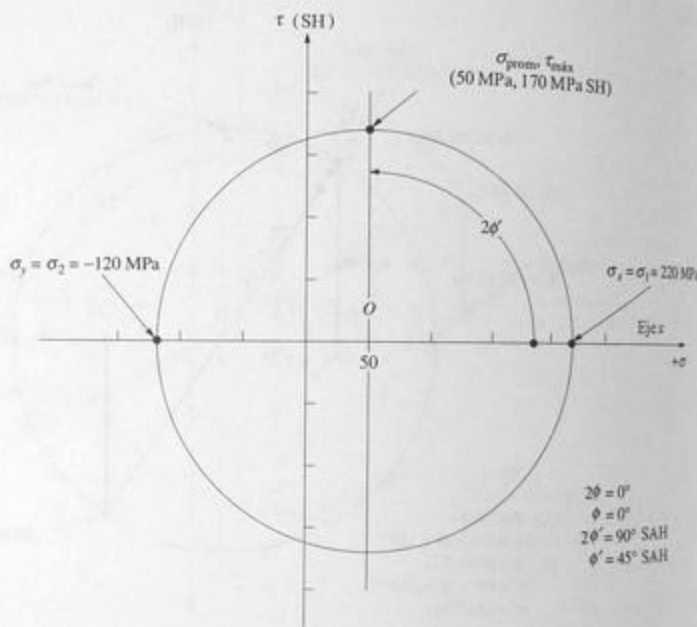


FIGURA 10-24 Resultados del ejemplo 10-6. Caso especial de esfuerzo biaxial sin cortante.

$$\sigma_x = 40 \text{ ksi}$$

$$\sigma_y = 0 \text{ ksi}$$

$$\tau_{xy} = 0 \text{ ksi}$$

Resultados Figura 10-25.

$$\sigma_1 = 40 \text{ ksi}$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ ksi}$$

$$\phi = 0^\circ$$

$$\tau_{\text{máx}} = 20 \text{ ksi}$$

$$\sigma_{\text{prom}} = 20 \text{ ksi}$$

$$\phi' = 45.0^\circ \text{ SAH}$$

Comentario Caso especial de tensión uniaxial sin cortante.

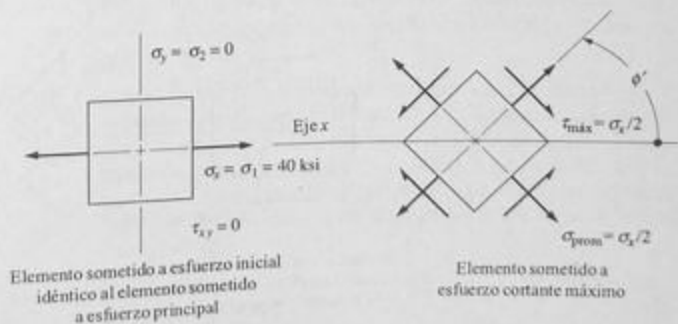
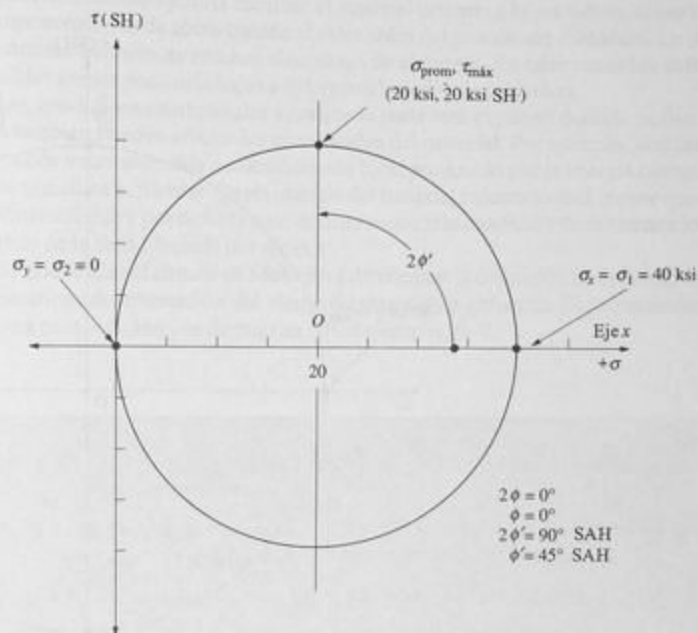


FIGURA 10-25 Resultados del ejemplo 10-7. Caso especial de tensión uniaxial.



Ejemplo  
10-8  
Círculo de Mohr

Datos

$$\sigma_x = 0 \text{ ksi}$$

$$\sigma_y = 0 \text{ ksi}$$

$$\tau_{xy} = 40 \text{ SH}$$

Resultados Figura 10-26.

$$\sigma_1 = 40 \text{ ksi}$$

$$\sigma_2 = -40 \text{ ksi}$$

$$\phi = 45^\circ \text{ SH}$$

$$\tau_{\text{máx}} = 40 \text{ ksi}$$

$$\sigma_{\text{prom}} = 0 \text{ ksi}$$

$$\phi' = 0^\circ$$

Comentario Caso especial de cortante puro.

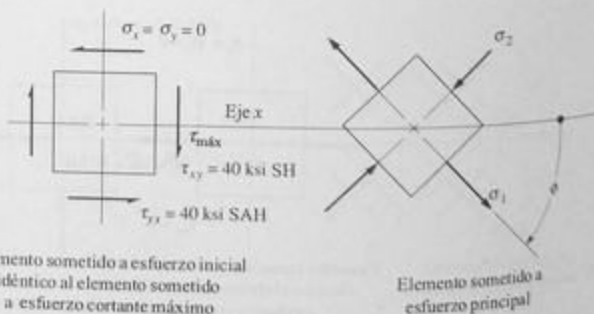
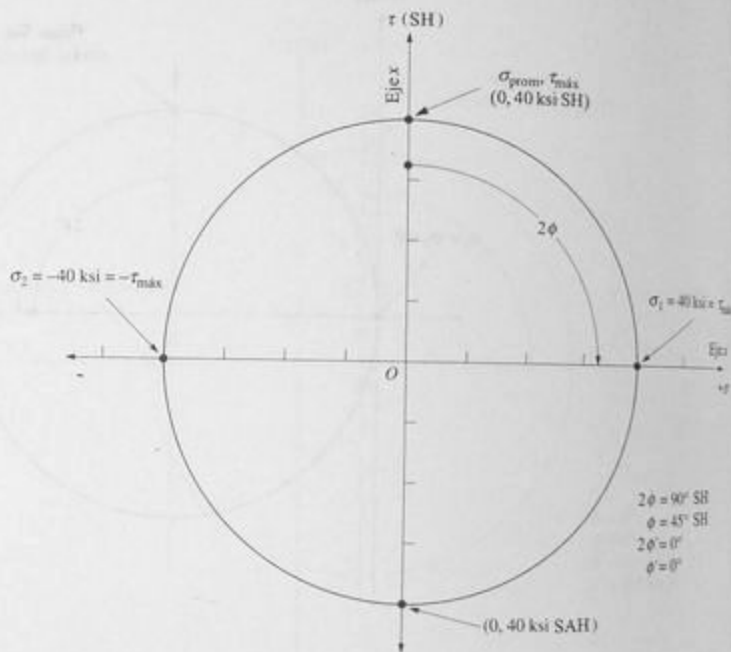


FIGURA 10-26 Resultados del ejemplo 10-8. Caso especial de cortante puro.

## 10-10 CONDICIÓN DE ESFUERZO EN PLANOS SELECCIONADOS

Existen algunos casos en los cuales conviene conocer la condición de esfuerzo en un elemento a un ángulo de orientación seleccionado con respecto a las direcciones de referencia. Las figuras 10-27 y 10-28 muestran ejemplos.

El bloque de madera en la figura 10-27 muestra que la veta de la madera está inclinada a un ángulo de  $30^\circ$  en sentido antihorario a partir del eje  $x$  dado. Como la madera es muy débil a cortante paralelo a la veta, es conveniente conocer los esfuerzos en esa dirección.

La figura 10-28 muestra un miembro estructural fabricado soldando dos componentes a lo largo de una costura inclinada a un cierto ángulo con respecto al eje  $x$  dado. La operación de soldadura podría debilitar el material cercano a la soldadura, sobre todo si los componentes son de acero tratado al calor antes del proceso de soldadura. Lo mismo puede decirse también de muchas aleaciones de aluminio. En tales casos los esfuerzos permisibles son un poco más bajos a lo largo del cordón de soldadura.

Las condiciones ambientales a las que la parte está expuesta durante su funcionamiento también pueden afectar las propiedades del material. Por ejemplo, una pieza de horno puede verse sometida a calentamiento local producido por la energía radiante a lo largo de una línea particular. La resistencia del material calentado será menor que la del que permanece frío y por tanto es conveniente conocer la condición de esfuerzo a lo largo del ángulo de la zona afectada por el calor.

Se puede usar el círculo de Mohr para determinar la condición de esfuerzo a ángulos específicos de orientación del elemento sometido a esfuerzo. El procedimiento se describe a continuación y se demuestra con el ejemplo 10-9.

### Procedimiento para determinar el esfuerzo a un ángulo específico

**Datos:** La condición de esfuerzo en el elemento dado alineado en las direcciones  $x$  y  $y$ .

**Objetivo:** Determinar los esfuerzos normal y cortante en el elemento a un ángulo específico,  $\beta$ , con respecto a la dirección  $x$  dada.

**Paso 1:** Dibuje el círculo de Mohr completo para el elemento.

**Paso 2:** Identifique la línea que representa el eje  $x$  en el círculo.

**Paso 3:** Mida el ángulo  $2\beta$  a partir del eje  $x$  y trace una línea por el centro del círculo de Mohr, prolongándola hasta las dos intersecciones con el círculo. Esta línea representa el eje alineado con la dirección de interés.

**Paso 4:** Con la geometría del círculo, determine las coordenadas  $(\sigma, \tau)$  del primer punto de intersección. El componente  $\sigma$  es el esfuerzo normal que actúa en el elemento en la dirección de  $\beta$ . El componente  $\tau$  es el esfuerzo cortante que actúa en las caras del elemento. Las coordenadas del segundo punto representan los esfuerzos normal y cortante que actúan en las caras del elemento de interés paralelos al eje  $\beta$ .

**Paso 5:** Dibuje el elemento de interés mostrando los esfuerzos normal y cortante que actúan en él.

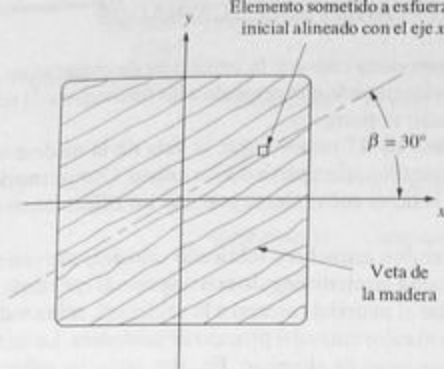


FIGURA 10-27 Sección transversal de un poste de madera con la veta a  $30^\circ$  con respecto al eje  $x$ .

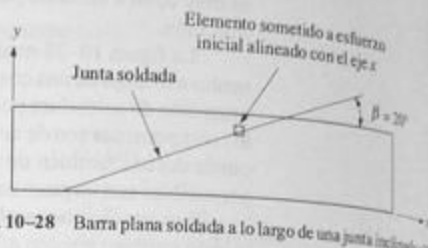


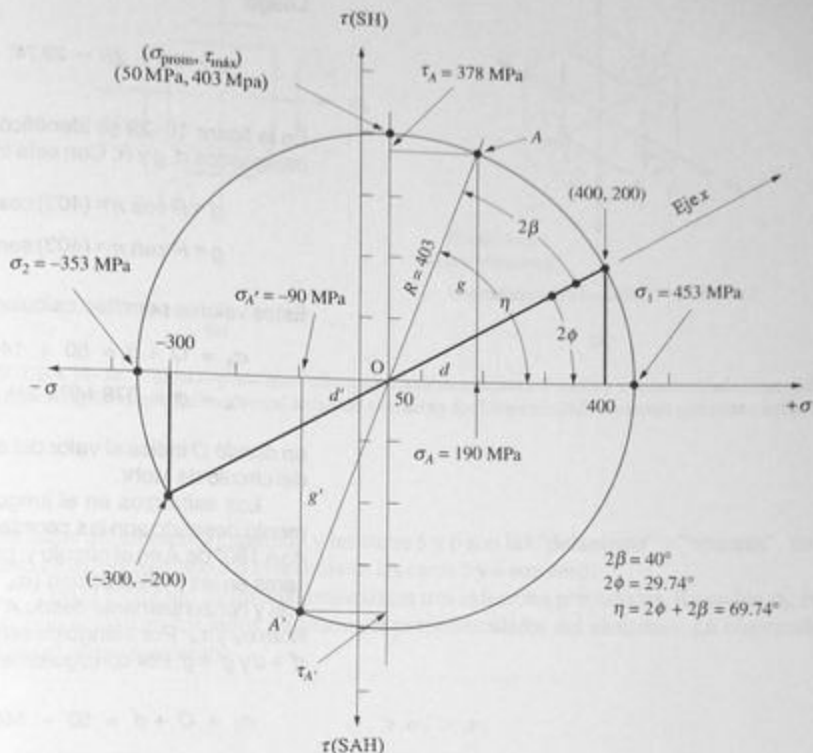
FIGURA 10-28 Barra plana soldada a lo largo de una junta inclinada a  $20^\circ$ .

**Ejemplo 10-9** En la barra plana soldada a lo largo de la junta que forma un ángulo de  $20^\circ$  en sentido antihorario con el eje  $x$ , el elemento paralelo a los ejes  $x$  y  $y$  está sometido a los esfuerzos siguientes:

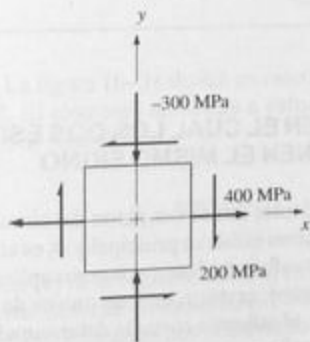
$$\sigma_x = 400 \text{ MPa} \quad \sigma_y = -300 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 200 \text{ MPa SH}$$

Determine la condición de esfuerzo en el elemento inclinado a un ángulo de  $20^\circ$  alineado con la junta soldada.

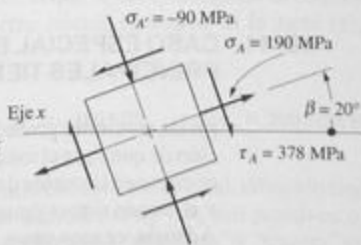
<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Dibujar el elemento sometido a esfuerzo alineado con la junta soldada a $20^\circ$ con respecto al eje $x$ .
	<b>Datos</b>	Observe que el elemento dado es el mismo del ejemplo 10-2. El círculo de Mohr básico de ese problema se muestra en la figura 10-19 y se reproduce en la figura 10-29.
	<b>Análisis</b>	Se sigue el <i>procedimiento para determinar el esfuerzo a un ángulo específico</i> .
	<b>Resultados</b>	<b>Los pasos 1 y 2</b> se muestran en el círculo de Mohr original.
	<b>Paso 3.</b>	El eje deseado es uno inclinado a $20^\circ$ en sentido antihorario a partir del eje $x$ . Recordando que los ángulos en el círculo de Mohr son el <i>doble</i> de los reales, se puede trazar una línea por el centro del círculo a un ángulo de $2\beta = 40^\circ$ en sentido antihorario a partir del eje $x$ . La intersección de esta línea con el círculo, marcada <i>A</i> en la figura, localiza el punto del círculo que define la condición de esfuerzo del elemento deseado. Las coordenadas de este punto $(\sigma_A, \tau_A)$ dan los esfuerzos normal y cortante que actúan en un juego de caras del elemento deseado.
	<b>Paso 4.</b>	Con trigonometría simple y la geometría básica del círculo se determinan $\sigma_A$ y $\tau_A$ proyectando líneas vertical y horizontalmente desde el punto <i>A</i> hasta los ejes $\sigma$ y $\tau$ , respectivamente. El ángulo total del eje $\sigma$ a los ejes hasta el eje que



(a) Círculo de Mohr



(b) Elemento sometido a un esfuerzo dado



(c) Elemento sometido a esfuerzo inclinado a  $20^\circ$

FIGURA 10-29 Círculo de Mohr completo del ejemplo 10-9 que muestra los esfuerzos en un elemento inclinado a  $20^\circ$  en sentido arbitrario a partir del eje  $x$ .

pasa por el punto A, llamado  $\eta$  (eta) en la figura, es la suma de  $2\phi$  y  $2\beta$ . En el ejemplo 10-2, se determinó  $2\phi = 29.74^\circ$ . Luego:

$$\eta = 2\phi + 2\beta = 29.74^\circ + 40^\circ = 69.74^\circ$$

En la figura 10-29 se identificó un triángulo con sus lados designados  $d$ ,  $g$  y  $R$ . Con este triángulo, se puede calcular

$$d = R \cos \eta = (403) \cos 69.74^\circ = 140$$

$$g = R \sin \eta = (403) \sin 69.74^\circ = 378$$

Estos valores permiten calcular:

$$\sigma_A = O + d = 50 + 140 = 190$$

$$\tau_A = g = 378 \text{ MPa SH}$$

en donde  $O$  indica el valor del esfuerzo normal en el centro del círculo de Mohr.

Los esfuerzos en el juego de caras restantes del elemento deseado son las coordenadas del punto  $A'$  localizado a  $180^\circ$  de  $A$  en el círculo y, por consiguiente, a  $90^\circ$  de las caras en las cuales actúan ( $\sigma_A$ ,  $\tau_A$ ). Proyectando líneas vertical y horizontalmente desde  $A'$  hasta los ejes  $\sigma$  y  $\tau$  se localizan  $\sigma_{A'}$  y  $\tau_{A'}$ . Por triángulos semejantes se puede decir que  $d' = d$  y  $g' = g$ . Por consiguiente:

$$\sigma_{A'} = O + d' = 50 - 140 = -190$$

$$\tau_{A'} = g' = 378 \text{ MPa SAH}$$

**Comentario** La figura 10-29(c) muestra el elemento final inclinado a  $20^\circ$  con respecto al eje  $x$ . Ésta es la condición de esfuerzo experimentada por el material a lo largo de la junta soldada.

## 10-11 CASO ESPECIAL EN EL CUAL LOS DOS ESFUERZOS PRINCIPALES TIENEN EL MISMO SIGNO

En las secciones precedentes que se ocuparon del círculo de Mohr, se utilizó la condición de que  $\sigma_1$  es el máximo esfuerzo principal y  $\sigma_2$  es el mínimo esfuerzo principal. Es cierto en los casos de esfuerzo plano (esfuerzos aplicados en un solo plano) cuando  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  tienen signos opuestos, es decir, cuando uno es de tensión y el otro de compresión. Además, en esos casos, el esfuerzo cortante determinado en la parte superior del círculo (igual al radio,  $R$ ) es el esfuerzo cortante máximo real que actúa en el elemento.

Sin embargo se debe tener un cuidado especial cuando el círculo de Mohr indica que  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  tienen el mismo signo. Aun cuando se trata de esfuerzo plano, el elemento sometido al esfuerzo real es tridimensional y se debe representar como un cubo en lugar de un cuadrado, como se muestra en la figura 10-30. Las caras 1, 2, 3 y 4 corresponden a las

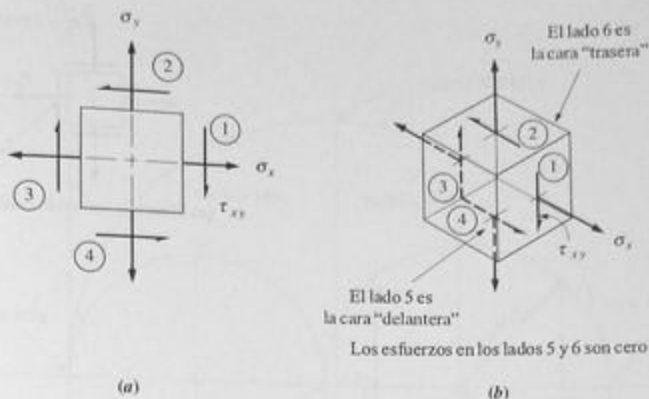


FIGURA 10-30 Esfuerzo plano mostrado como elementos bidimensionales y tridimensionales sometidos a esfuerzo. (a) Elemento bidimensional sometido a esfuerzo. (b) Elemento tridimensional sometido a esfuerzo.

los lados del elemento cuadrado y las caras 5 y 6 son las "delanteras" y "traseras". En el caso de esfuerzo plano los esfuerzos en las caras 5 y 6 son cero.

En el elemento tridimensional existen tres esfuerzos principales, llamados  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , que actúan en los lados mutuamente perpendiculares del elemento. La convención dicta el orden siguiente:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Por tanto,  $\sigma_3$  es el mínimo esfuerzo principal real y  $\sigma_1$  es el máximo esfuerzo principal. También se puede demostrar que el máximo esfuerzo cortante real se puede calcular con:

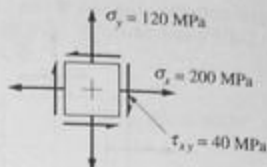
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (10-13)$$

La figura 10-31 ilustra un caso en el que se debe considerar el elemento tridimensional. El elemento sometido a esfuerzo inicial, mostrado en la parte (a), soporta los esfuerzos siguientes:

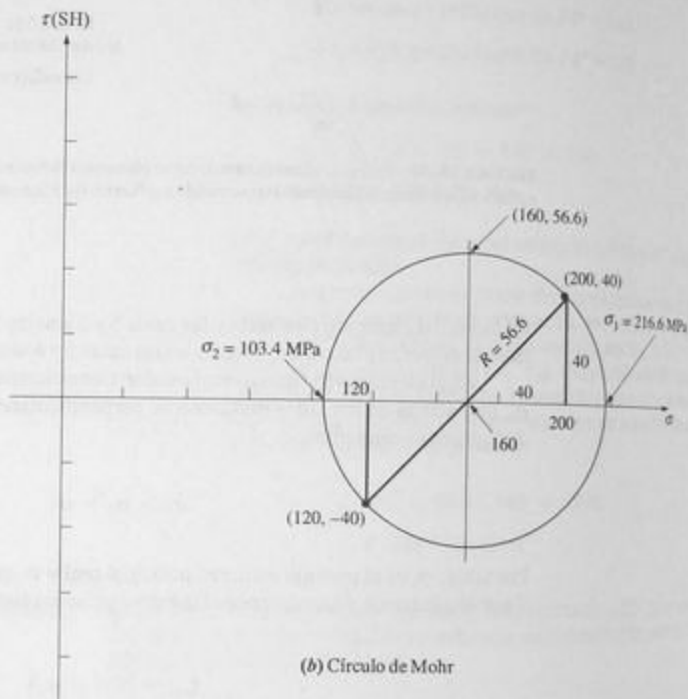
$$\sigma_x = 400 \text{ MPa} \quad \sigma_y = -300 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 200 \text{ MPa SH}$$

La parte (b) de la figura muestra el círculo de Mohr tradicional, dibujado según el procedimiento descrito en la sección 10-8. Nótese que  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son positivos o de tensión. Luego, considerando que el esfuerzo en las caras "delantera" y "trasera" es cero, éstos son los esfuerzos principales mínimos reales. Entonces, se puede decir que:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 216.6 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= 103.4 \text{ MPa} \\ \sigma_3 &= 0 \text{ MPa} \end{aligned}$$



(a) Elemento sometido a esfuerzo inicial



(b) Círculo de Mohr

FIGURA 10-31 Círculo de Mohr donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son positivos.

De acuerdo con la ecuación (10-13), el esfuerzo cortante máximo real es:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}(216.6 - 0) = 108.3 \text{ MPa}$$

Estos conceptos se pueden visualizar gráficamente con tres círculos de Mohr en vez de uno. La figura 10-32 muestra el círculo obtenido del elemento sometido a esfuerzo inicial, un segundo círculo que incluye  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  y un tercero que incluye  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ . De ese modo cada círculo representa el plano en el que actúan dos de los tres esfuerzos principales. El punto en la parte superior de cada círculo indica el esfuerzo cortante máximo que ocurriría en ese plano. Entonces, el círculo mayor, dibujado para  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ , produce el esfuerzo cortante máximo real y su valor concuerda con la ecuación (10-13).

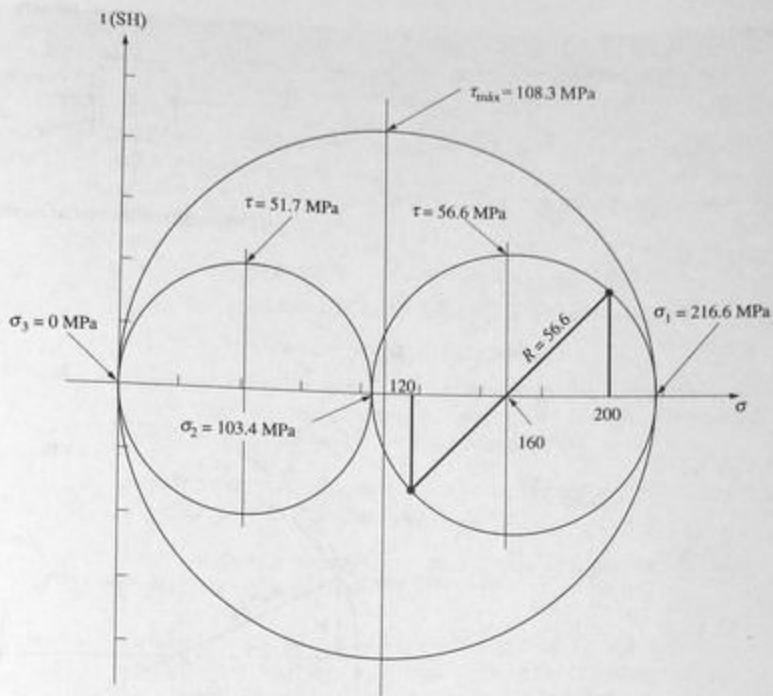


FIGURA 10-32 Tres círculos de Mohr relacionados que muestran  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  y  $\tau_{\max}$ .

La figura 10-33 ilustra otro caso en el que los esfuerzos principales del elemento sometido a esfuerzo inicial tienen el mismo signo, ambos negativos en este caso. Los esfuerzos iniciales son:

$$\sigma_x = -50 \text{ MPa} \quad \sigma_y = -180 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 30 \text{ MPa SAH}$$

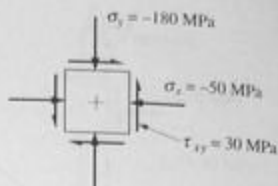
En este caso, también, se deben trazar los círculos complementarios. Pero, el esfuerzo cero en las caras "delantera" y "trasera" del elemento se transforma en el esfuerzo principal *máximo* ( $\sigma_1$ ). Es decir:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= -43.4 \text{ MPa} \\ \sigma_3 &= -186.6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

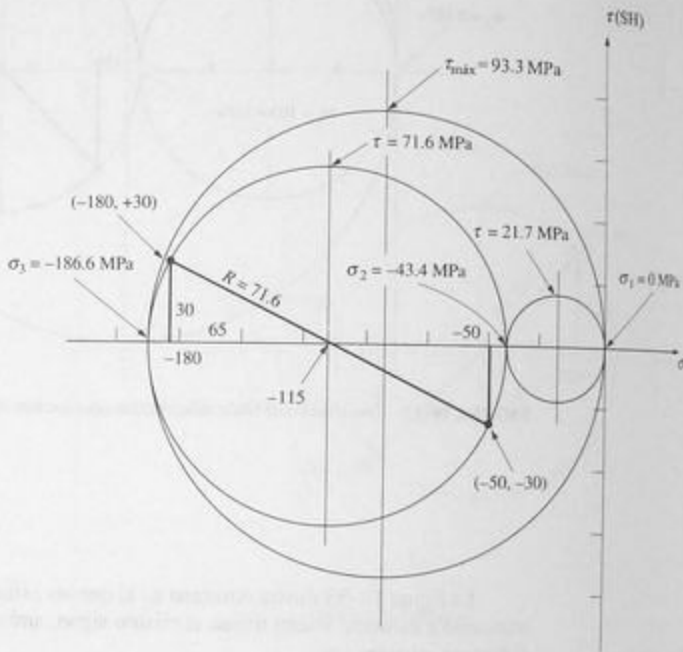
y el esfuerzo cortante máximo es:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}[0 - (-186.6)] = 93.3 \text{ MPa}$$





(a) Elemento sometido a esfuerzo inicial



(b) Círculo de Mohr

FIGURA 10-33 Tres círculos de Mohr relacionados que muestran  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  y  $\tau_{\max}$ .

**Resumen-  
Procedimientos para  
los casos en que el  
esfuerzo principal  
tiene el mismo signo**

Este resumen concierne a la situación en la que el análisis con el círculo de Mohr de un elemento sometido a esfuerzo plano (esfuerzos aplicados sólo en dos dimensiones) produce el resultado de que ambos esfuerzos principales ( $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ ) son del mismo signo; es decir, ambos son de tensión o ambos son de compresión. En esos casos, se deberá completar los pasos siguientes para obtener una imagen real de la condición de esfuerzo en el elemento tridimensional.

- A. Dibuje el círculo de Mohr completo para la condición de esfuerzo plano, e identifique los esfuerzos principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

B. Si los dos esfuerzos principales son de tensión (positivos): [Véase el ejemplo ilustrado en la figura 10-32.]

1. Considere que el *esfuerzo cero* que actúa en la dirección perpendicular al elemento sometido a esfuerzo inicial es el esfuerzo principal mínimo real. Entonces, es necesario definir *tres* esfuerzos principales como sigue:

$\sigma_1$  = Esfuerzo principal máximo del primer círculo de Mohr.

$\sigma_2$  = Esfuerzo principal mínimo del primer círculo de Mohr.

$\sigma_3$  = Cero (esfuerzo principal mínimo real).

2. Dibuje un círculo de Mohr secundario cuyo diámetro abarque de  $\sigma_1$  a  $\sigma_3$  en el eje  $\sigma$ . El centro del círculo quedará en el promedio de  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ ,  $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ . Pero, como  $\sigma_3 = 0$ , el promedio es  $\sigma_1/2$ .
3. El esfuerzo cortante máximo se localiza en la parte superior del segundo círculo y su valor también es  $\sigma_1/2$ .

C. Si los dos esfuerzos principales son de compresión (negativos): [Véase el ejemplo ilustrado en la figura 10-33.]

1. Considere que el *esfuerzo cero* que actúa en la dirección perpendicular al elemento sometido a esfuerzo inicial es el esfuerzo principal máximo real. Entonces, es necesario definir *tres* esfuerzos principales como sigue:

$\sigma_1$  = Cero (esfuerzo principal máximo real)

$\sigma_2$  = Esfuerzo principal máximo del primer círculo de Mohr.

$\sigma_3$  = Esfuerzo principal mínimo del primer círculo de Mohr.

2. Dibuje un círculo secundario cuyo diámetro abarque de  $\sigma_1$  a  $\sigma_3$  en el eje  $\sigma$ . El centro del círculo quedará en el promedio de  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$   $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ . Pero como  $\sigma_1 = 0$ , el promedio es  $\sigma_3/2$ .
3. El esfuerzo cortante máximo se localiza en la parte superior del círculo secundario y su magnitud es también  $\sigma_3/2$ .

## 10-12 TEORÍA DE FALLA DEL ESFUERZO CORTANTE MÁXIMO

Uno de los principios de diseño más ampliamente utilizados es la *teoría de falla del esfuerzo cortante máximo*, la cual establece que:

Es de esperarse que un material dúctil falle cuando el esfuerzo cortante máximo al cual está sometido el material sobrepasa la resistencia a la cedencia de éste a cortante.

Desde luego, para aplicar esta teoría, es necesario que se pueda calcular la magnitud del esfuerzo cortante máximo. Si el miembro se somete a cortante puro, tal como esfuerzo cortante torsional, esfuerzo cortante directo o esfuerzo cortante en vigas sometidas a flexión, el esfuerzo cortante máximo se puede calcular directamente con fórmulas como las que se desarrollaron en este libro. Pero si existe una condición de esfuerzo combinado se debe usar la ecuación (10-9) o el círculo de Mohr para determinar el esfuerzo cortante máximo.

Un caso especial de esfuerzo combinado que ocurre a menudo es aquel en que un esfuerzo normal en una sola dirección se combina con un esfuerzo cortante. Por ejemplo, una barra circular se podría someter a tensión axial directa al mismo tiempo que se fuerza. En muchos tipos de transmisiones de potencia mecánica, las flechas se someten a flexión y torsión simultáneamente. Cierta clase de sujetadores pueden someterse a tensión combinada con cortante directo.

Se puede desarrollar una fórmula simple para tales casos con el círculo de Mohr o la ecuación (10-9). Si sólo un esfuerzo normal en la dirección  $x$ ,  $\sigma_x$ , combinado con un esfuerzo cortante,  $\tau_{xy}$ , existe, el esfuerzo cortante es:

$$\tau_{\max} = \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (10-14)$$

Esta fórmula se puede desarrollar con la ecuación (10-9) haciendo  $\sigma_y = 0$ .

**Ejemplo 10-10** Una barra circular sólida de 45 mm de diámetro se somete a una fuerza de tensión axial de 120 kN combinada con un par de torsión de 1150 N·m. Calcule el esfuerzo cortante máximo en la barra.

**Solución**

**Objetivo** Calcular el esfuerzo cortante máximo en la barra.

**Datos** Diámetro =  $D = 45$  mm.  
Fuerza axial =  $F = 120$  kN = 120 000 N.  
Par de torsión =  $T = 1150$  N·m = 1 150 000 N·mm.

**Análisis** Se usa la ecuación (10-14) para calcular  $\tau_{\max}$ .

**Resultados** 1. En primer lugar, el esfuerzo normal aplicado se puede determinar con la fórmula del esfuerzo directo.

$$\sigma = F/A$$

$$A = \pi D^2/4 = \pi(45 \text{ mm})^2/4 = 1590 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = (120\,000 \text{ N})/(1590 \text{ mm}^2) = 75.5 \text{ N/mm}^2 = 75.5 \text{ MPa}$$

2. A continuación, el esfuerzo cortante aplicado se puede calcular con la fórmula del esfuerzo cortante torsional.

$$\tau = T/Z_p$$

$$Z_p = \pi D^3/16 = \pi(45 \text{ mm})^3/16 = 17\,892 \text{ mm}^3$$

$$\tau = (1\,150\,000 \text{ N}\cdot\text{mm})/(17\,892 \text{ mm}^3) = 64.3 \text{ N/mm}^2 = 64.3 \text{ MPa}$$

3. Luego con la ecuación (10-14) se obtiene:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{75.5 \text{ MPa}}{2}\right)^2 + (64.3 \text{ MPa})^2} = 74.6 \text{ MPa}$$

**Comentario** Este esfuerzo debe compararse con el esfuerzo cortante de diseño.

## BIBLIOGRAFÍA

- Murdi, B. B., and J. W. McNabb, *Engineering Mechanics of Materials*, 3rd ed., Springer-Verlag, New York, 1990.
- Popov, E. P., *Engineering Mechanics of Solids*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.
- Shigley, J. E., and C. R. Mischke, *Mechanical Engineering Design*, 5th ed., McGraw-Hill, New York, 1989.

## PROBLEMAS

A. En los problemas del 10-1 al 10-28, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo con el círculo de Mohr. Las series de datos siguientes dan los esfuerzos en el elemento sometido a esfuerzo inicial. Realice las operaciones siguientes:

- Dibuje el círculo de Mohr completo con los puntos críticos identificados incluidos  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\tau_{\max}$  y  $\sigma_{\text{prom}}$ .
- En el círculo de Mohr, indique la línea que representa el eje  $x$  en el elemento sometido a esfuerzo inicial.
- En el círculo de Mohr, indique los ángulos a partir de la línea que representa el eje  $x$  hacia el eje  $\sigma_1$  y el eje  $\tau_{\max}$ .
- Dibuje el elemento sometido a esfuerzo inicial y el elemento sometido a esfuerzo cortante máximo orientados adecuadamente con respecto al elemento sometido a esfuerzo inicial.

Problema	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$
10-1	300 MPa	-100 MPa	80 MPa SH
10-2	250 MPa	-50 MPa	40 MPa SH
10-3	80 MPa	-10 MPa	60 MPa SH
10-4	150 MPa	10 MPa	100 MPa SH
10-5	20 ksi	-5 ksi	10 ksi SAH
10-6	38 ksi	-25 ksi	18 ksi SAH
10-7	55 ksi	15 ksi	40 ksi SAH
10-8	32 ksi	-50 ksi	20 ksi SAH

Problema	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$
10-9	-900 kPa	600 kPa	350 kPa SAH
10-10	-580 kPa	130 kPa	75 kPa SAH
10-11	-840 kPa	-35 kPa	650 kPa SAH
10-12	-325 kPa	50 kPa	110 kPa SAH
10-13	-1800 lb/plg <sup>2</sup>	300 lb/plg <sup>2</sup>	800 lb/plg <sup>2</sup> SH
10-14	-6500 lb/plg <sup>2</sup>	1500 lb/plg <sup>2</sup>	1200 lb/plg <sup>2</sup> SH
10-15	-4250 lb/plg <sup>2</sup>	3250 lb/plg <sup>2</sup>	2800 lb/plg <sup>2</sup> SH
10-16	-150 lb/plg <sup>2</sup>	8600 lb/plg <sup>2</sup>	80 lb/plg <sup>2</sup> SH
10-17	260 MPa	0 MPa	190 MPa SAH
10-18	1450 kPa	0 kPa	830 kPa SAH
10-19	22 ksi	0 ksi	6.8 ksi SH
10-20	6750 lb/plg <sup>2</sup>	0 lb/plg <sup>2</sup>	3120 lb/plg <sup>2</sup> SAH
10-21	0 ksi	-28 ksi	12 ksi SH
10-22	0 MPa	440 MPa	215 MPa SH
10-23	0 MPa	260 MPa	140 MPa SAH
10-24	0 kPa	-1560 kPa	810 kPa SAH
10-25	225 MPa	-85 MPa	0 MPa
10-26	6250 lb/plg <sup>2</sup>	-875 lb/plg <sup>2</sup>	0 lb/plg <sup>2</sup>
10-27	775 kPa	-145 kPa	0 kPa
10-28	38.6 ksi	-13.4 ksi	0 ksi

B. En los problemas en que los esfuerzos principales calculados con el círculo de Mohr resulten con el mismo signo,

use los procedimientos de la sección 10-11 para dibujar círculos suplementarios y determinar lo siguiente:

- Los tres esfuerzos principales:  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ .
- El esfuerzo cortante máximo real.

Problema	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$
10-29	300 MPa	100 MPa	80 MPaSH
10-30	250 MPa	150 MPa	40 MPaSH
10-31	180 MPa	110 MPa	60 MPaSH
10-32	150 MPa	80 MPa	30 MPaSH
10-33	30 ksi	15 ksi	10 ksiSAH
10-34	38 ksi	25 ksi	8 ksiSAH
10-35	55 ksi	15 ksi	5 ksiSAH
10-36	32 ksi	50 ksi	20 ksiSAH
10-37	-840 kPa	-335 kPa	120 kPaSAH
10-38	-325 kPa	-50 kPa	60 kPaSAH
10-39	-1800 lb/plg <sup>2</sup>	-300 lb/plg <sup>2</sup>	80 lb/plg <sup>2</sup> SH
10-40	-6500 lb/plg <sup>2</sup>	-2500 lb/plg <sup>2</sup>	1200 lb/plg <sup>2</sup> SH

- C. En los problemas siguientes, use los datos del problema indicado para el elemento sometido a esfuerzo inicial para dibujar el círculo de Mohr. En seguida determine la condición de esfuerzo en el elemento al ángulo de rotación especificado con respecto al eje  $x$  dado. Dibuje el

elemento girado con la relación correcta que muestra el elemento sometido a esfuerzo inicial e indique los esfuerzos normal y cortante que actúan en él.

Problema	Datos para el problema de esfuerzo inicial	Ángulo de rotación respecto al eje $x$
10-41	10-1	
10-42	10-1	30 grados SAH
10-43	10-4	30 grados SH
10-44	10-6	70 grados SAH
10-45	10-8	20 grados SH
10-46	10-10	50 grados SAH
10-47	10-13	45 grados SH
10-48	10-15	10 grados SAH
10-49	10-16	25 grados SH
10-50	10-18	80 grados SH
		65 grados SH

- D. En los problemas siguientes, use la ecuación (10-14) para calcular la magnitud del esfuerzo cortante máximo con los datos del problema indicado.
- 10-51. Use los datos del problema 10-17.
- 10-52. Use los datos del problema 10-18.
- 10-53. Use los datos del problema 10-19.
- 10-54. Use los datos del problema 10-20.

## TAREAS DE COMPUTACIÓN

- Escriba un programa para computadora, hoja de cálculo o calculadora programable que ayude en la construcción del círculo de Mohr. Introduzca los esfuerzos iniciales,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ . Haga que el programa calcule el radio del círculo, los esfuerzos principales máximo y mínimo, el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo promedio. Use el programa junto con el dibujo a pulso del círculo correspondiente a los datos de los problemas 10-1 a 10-24.
- Amplie el programa de la tarea 1 para que calcule el ángulo de orientación del elemento sometido a esfuerzo inicial

y el ángulo de orientación del elemento sometido a esfuerzo cortante máximo.

- Amplie el programa de la tarea 1 para que calcule los esfuerzos normal y cortante en el elemento girado a un ángulo específico con respecto al eje original  $x$ .
- Amplie el programa de la tarea 1 para que detecte si los esfuerzos principales del círculo de Mohr inicial son del mismo signo; y, en tal caso, imprima los tres esfuerzos principales en el orden apropiado,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ . Asimismo, haga que el programa calcule el esfuerzo cortante máximo real de la ecuación (10-13).

# 11

## Casos especiales de esfuerzos combinados

### 11-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Este capítulo se puede estudiar después de completar el capítulo 10, o independientemente de él. Existen varios casos prácticos que implican esfuerzos combinados que se pueden resolver sin recurrir a los procedimientos más rigurosos y tardados presentados en el capítulo 10, aun cuando las técnicas analizadas en este capítulo están basadas en los principios del capítulo mencionado.

Cuando una viga se somete tanto a flexión como a esfuerzo axial directo, sea de tensión o de compresión, se puede usar la superposición simple de los esfuerzos aplicados para determinar el esfuerzo combinado. Muchos equipos transmisores de potencia incluyen flechas que se someten a esfuerzo cortante torsional junto con esfuerzo flexionante. Tales flechas se pueden analizar con la teoría de falla del máximo esfuerzo cortante y con la técnica de análisis del par de torsión equivalente.

Después de terminar el estudio de este capítulo, el lector será capaz de:

1. Calcular el esfuerzo normal combinado producido por el esfuerzo flexionante junto con esfuerzos de tensión o compresión directos valiéndose del principio de superposición.
2. Reconocer la importancia de visualizar la distribución del esfuerzo en la sección transversal de un miembro de carga y considerar la condición de esfuerzo en un punto.
3. Reconocer la importancia de los diagramas de cuerpo libre de componentes de estructuras y mecanismos en el análisis de esfuerzos combinados.

4. Evaluar el factor de diseño en el caso de esfuerzo normal combinado, incluidas las propiedades de los materiales isotrópicos o anisotrópicos.
5. Optimizar el perfil y las dimensiones de un miembro de carga con respecto a la variación del esfuerzo en él y sus propiedades de resistencia.
6. Analizar miembros sometidos sólo a torsión y flexión combinadas con el cálculo del máximo esfuerzo cortante resultante.
7. Usar la teoría de falla del máximo esfuerzo cortante de manera adecuada.
8. Aplicar la técnica de par de torsión equivalente para analizar miembros sometidos a flexión y torsión combinadas.
9. Considerar los factores de concentración de esfuerzo cuando se utilice la técnica del par de torsión equivalente.

## 11-2 ESFUERZOS NORMALES COMBINADOS

La primera combinación a considerar es la flexión con tensión o compresión directa. En cualquier problema de esfuerzo combinado, conviene visualizar la distribución del esfuerzo producida por los diversos componentes del patrón de esfuerzo total. Se debe revisar la sección 10-3 en busca de los resúmenes de la distribución del esfuerzo en el caso de flexión y tensión y compresión directas. Nótese que la flexión produce esfuerzos de tensión y compresión, al igual que la tensión y compresión directas. Puesto que se produce la misma clase de esfuerzos, una suma algebraica de los esfuerzos producidos en un punto cualquiera es todo lo que se requiere para calcular el esfuerzo resultante en dicho punto. Este proceso se llama *superposición*.

### Instrucciones para resolver problemas con esfuerzos normales combinados

Estas instrucciones conciernen a situaciones en las que actúan dos o más cargas o componentes de cargas de tal modo que producen esfuerzos normales (de tensión y/o compresión) en el miembro de carga. En general, se deben incluir las cargas que producen esfuerzo flexionante, tensión o compresión directa. El objetivo es calcular el esfuerzo combinado máximo en el miembro. Sean los esfuerzos de tensión positivos (+) y los de compresión negativos (-).

1. Dibuje el diagrama de cuerpo libre del miembro de carga y calcule la magnitud de todas las fuerzas aplicadas.
2. Para cualquier fuerza que actúe a un cierto ángulo de inclinación con respecto al eje neutro del miembro, descomponerla en sus componentes perpendicular y paralela al eje neutro.
3. Las fuerzas o componentes que actúan en una dirección coincidente con el eje neutro producirán tensión o compresión directa con una distribución del esfuerzo uniforme en toda la sección. Calcule estos esfuerzos.
4. Las fuerzas o componentes que actúan perpendiculares al eje neutro provocan esfuerzos flexionantes. Con los métodos del capítulo 6, determine los momentos flexionantes causados por estas fuerzas, o de manera individual o en combinación. A continuación, para la sección sometida al mo-

mento flexionante máximo, calcule el esfuerzo flexionante con la fórmula de flexión,  $\sigma = M/S$ . El esfuerzo máximo ocurrirá en las fibras más externas de la sección transversal. Observe en qué puntos el esfuerzo es de tensión y en cuáles es de compresión.

- Las fuerzas o componentes que actúan paralelas al eje neutro pero cuya línea de acción está distante de éste también provocan flexión. El momento flexionante es el producto de la fuerza por la distancia perpendicular del eje neutro a la línea de acción de la fuerza. Calcule el esfuerzo flexionante producido por momentos como éstos en cualquier sección donde el esfuerzo combinado pueda ser el máximo.
- Considerando todos los esfuerzos normales calculados en los pasos 1-5, use la superposición para combinarlos en cualquier punto de cualquier sección transversal donde el esfuerzo combinado pueda ser máximo. La superposición se logra con la suma algebraica de todos los esfuerzos que actúan en un punto, teniendo cuidado de observar si cada esfuerzo componente es de tensión (+) o de compresión (-). Es posible que se requiera evaluar la condición de esfuerzo en dos o más puntos si no es obvio dónde ocurre el esfuerzo combinado máximo. En general, el proceso de superposición se puede expresar como:

$$\sigma_{\text{comb}} = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{M}{S} \quad (11-1)$$

en donde el término  $\pm F/A$ , incluye todos los esfuerzos de tensión y compresión directos que actúan en el punto de interés y el término  $\pm M/S$ , incluye todos los esfuerzos flexionantes que actúan en dicho punto. El signo de cada esfuerzo se debe determinar de manera lógica con base en la carga que provoca el esfuerzo individual.

- El esfuerzo máximo combinado en el miembro se puede comparar entonces con el esfuerzo de diseño del material con el cual se va a fabricar el miembro para calcular el factor de diseño resultante y para evaluar la seguridad del miembro. En materiales isotrópicos, el esfuerzo de tensión o de compresión podría provocar la falla, cualquiera que sea el máximo. Para materiales no isotrópicos con diferentes resistencias a tensión y compresión, se tiene que calcular el factor de diseño resultante correspondiente tanto al esfuerzo de tensión como al de compresión para determinar cuál de los dos es el crítico. Además, en general, se requerirá considerar la estabilidad de aquellas partes de los miembros sometidos a esfuerzos de compresión mediante el análisis de la tendencia al pandeo o al deterioro local del miembro. Véase el capítulo 14 para lo referente al pandeo de miembros sometidos a compresión semejantes a columnas. El análisis con respecto al deterioro y pandeo de partes de miembros requerirá referencia a otras fuentes. Véanse las referencias al final de los capítulos 8, 9 y 10.

En la figura 11-1 se muestra un ejemplo de un miembro en el que se desarrollan tanto esfuerzos flexionantes como esfuerzos de tensión directos. Las dos vigas horizontales soportan una carga de 10 000 lb por medio de cables. Las vigas están firmemente unidas a columnas, de modo que actúan como vigas en voladizo. La carga en el extremo



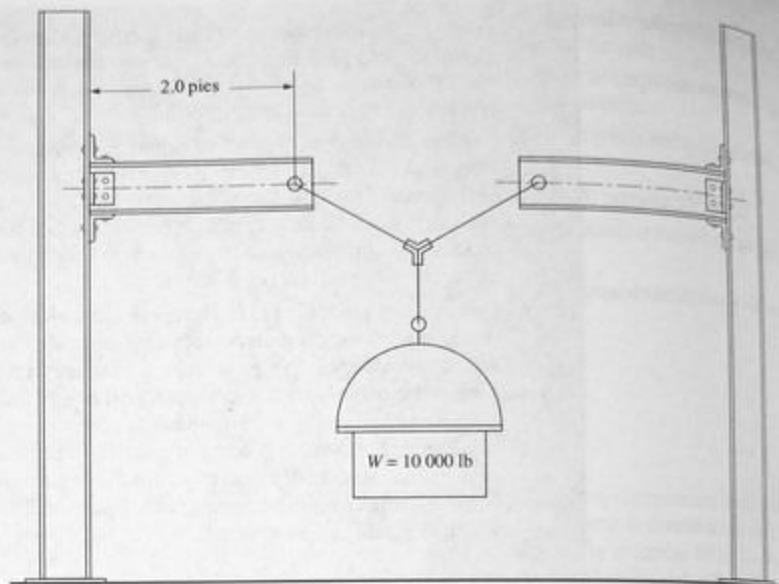


FIGURA 11-1 Dos vigas en voladizo sometidas a esfuerzos combinados de flexión y de tensión axial.

de cada viga es igual a la tensión en el cable. La figura 11-2 muestra que el componente vertical de la tensión en cada cable debe ser de 5000 lb. Es decir:

$$F \cos 60^\circ = 5000 \text{ lb}$$

y la tensión total en el cable es:

$$F = \frac{5000 \text{ lb}}{\cos 60^\circ} = 10\,000 \text{ lb}$$

Ésta es la fuerza aplicada a cada viga, como se muestra en la figura 11-3.

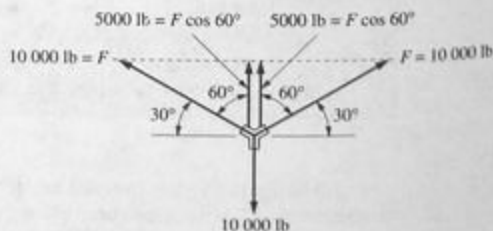


FIGURA 11-2 Análisis de las fuerzas que actúan en el sistema de cables.

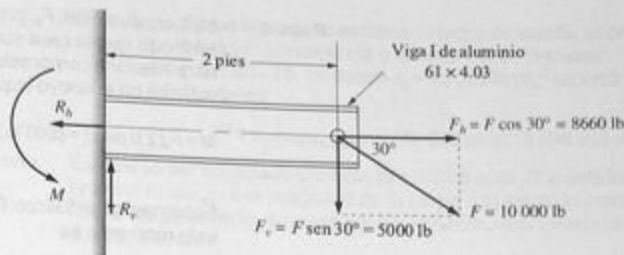


FIGURA 11-3 Fuerzas aplicadas a cada viga.

A continuación en la figura 11-1 se presenta un ejemplo que completa el análisis de la condición de esfuerzo combinado en cada una de las vigas horizontales en voladizo.

**Ejemplo 11-1** Para el sistema mostrado en la figura 11-1, determine el esfuerzo de tensión o compresión máximo combinado en cada viga horizontal en voladizo, cuando del sistema de cables entre ellas se suspende una carga estática de 10 000 lb. Las vigas son vigas I estándar Aluminum Association,  $61 \times 4.03$ . A continuación, si las vigas deben ser de aleación de aluminio 6061-T6, calcule el factor de diseño resultante.

**Solución** **Objetivo** Calcular el esfuerzo máximo combinado y el factor de diseño resultante para las vigas horizontales en voladizo mostradas en la figura 11-1.

**Datos** La carga es de 10 000 lb. El sistema de fuerzas mostrado en la figura 11-2. La tensión en cada cable es de 10 000 lb. Las vigas de 2.0 pies de longitud son perfiles de  $61 \times 4.03$  de aleación de aluminio 6061-T6. Según el apéndice A-11, las propiedades de las vigas son  $A = 3.427 \text{ plg}^2$  y  $S = 7.33 \text{ plg}^3$ .

**Análisis** La tensión en el cable conectado al extremo de cada viga en voladizo tenderá a provocar un esfuerzo de tensión directo combinado con un esfuerzo flexionante en la viga. Siga las *Instrucciones para resolver problemas con esfuerzos normales combinados* descritas en esta sección.

**Resultados** **Paso 1.** La figura 11-3 muestra el diagrama de cuerpo libre de una viga con la fuerza de 10 000 lb aplicada por el cable al extremo de la viga. La reacción en el extremo izquierdo, donde la viga está firmemente unida a la columna, se compone de una fuerza de reacción vertical, una fuerza de reacción horizontal y un momento de sentido antihorario.

**Paso 2.** En la figura 11-3 también se muestra la descomposición de la fuerza de 10 000 lb en sus componentes vertical y horizontal donde  $F_v = 5000$  lb y  $F_h = 8660$  lb.

**Paso 3.** La fuerza horizontal,  $F_h$ , actúa en una dirección que coincide con el eje neutro de la viga. Por consiguiente, provoca un esfuerzo de tensión directo con una magnitud de:

$$\sigma_t = \frac{F_h}{A} = \frac{8660 \text{ lb}}{3.427 \text{ plg}^2} = 2527 \text{ psi}$$

**Paso 4.** La fuerza vertical,  $F_v$ , provoca flexión dirigida hacia abajo de tal modo que la cara superior de la viga está a tensión y la cara inferior a compresión. El momento flexionante máximo ocurrirá en el apoyo izquierdo, donde:

$$M = F_v(2.0 \text{ pies}) = (500 \text{ lb})(2.0 \text{ pies})(12 \text{ plg/pie}) = 120\,000 \text{ lb-plg}$$

Entonces el esfuerzo flexionante máximo provocado por este momento es:

$$\sigma_b = \frac{M}{S} = \frac{120\,000 \text{ lb-plg}}{7.33 \text{ plg}^3} = 16\,371 \text{ psi}$$

Un esfuerzo de esta magnitud ocurre como esfuerzo de tensión en la cara superior y como esfuerzo de compresión en la cara inferior de la viga en el apoyo.

**Paso 5.** Este paso no se aplica a este problema porque no hay una fuerza horizontal que actúe a una cierta distancia del eje neutro.

**Paso 6.** Se puede concluir que el esfuerzo máximo combinado ocurre en la cara superior de la viga en el apoyo, porque tanto el esfuerzo de tensión directo, calculado en el paso 3, como el esfuerzo flexionante, calculado en el paso 4, provocan tensión en dichos puntos. Por consiguiente, se sumarán. Por superposición:

$$\sigma_{\text{cara superior}} = 2527 \text{ psi} + 16\,371 \text{ psi} = 18\,898 \text{ psi de tensión}$$

Por comparación, el esfuerzo combinado en la cara inferior de la viga es:

$$\sigma_{\text{cara inferior}} = 2527 \text{ psi} - 16\,371 \text{ psi} = -13\,844 \text{ psi de compresión}$$

La figura 11-4 muestra un juego de diagramas que ilustran el proceso de superposición. La parte (a) corresponde al esfuerzo en la viga provocado por flexión. La parte (b) muestra el esfuerzo de tensión directa provocado por  $F_v$ . La parte (c) muestra la distribución del esfuerzo combinado.

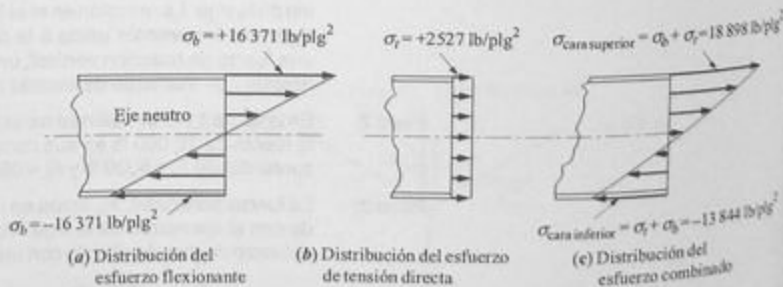


FIGURA 11-4 Diagrama del principio de superposición aplicado a las vigas de la figura 11-1.

**Paso 7.**

Como la carga es estática, el factor de diseño se calcula con base en la resistencia a la cedencia de la aleación de aluminio 6061-T6, en donde  $s_y = 40\,000 \text{ lb/plg}^2$  (apéndice A-17). Por tanto:

$$N = s_y / \sigma_{\text{carasuperior}} = (40\,000 \text{ psi}) / (18\,898 \text{ psi}) = 2.11$$

**Comentario**

Éste debe ser adecuado para carga estática pura. Si existe incertidumbre con respecto a la magnitud de la carga o si existe la posibilidad de que la carga se aplique con choque o impacto, se preferiría un factor de diseño mayor.

**Ejemplo 11-2**

Una mesa de jardín consiste en una tabla circular montada sobre un tubo firmemente empotrado en el suelo por medio de concreto. La figura 11-5 muestra la mesa. Calcule el esfuerzo máximo en el tubo cuando una persona de 135 kg de masa se sienta en la orilla de la mesa. El tubo es de aleación de aluminio de 170 mm de diámetro externo y 163 mm de diámetro interno. Si el aluminio es el 6061-T4, calcule el factor de diseño resultante basado tanto en la resistencia a la cedencia como en la resistencia última. En seguida comente sobre la conveniencia del diseño.

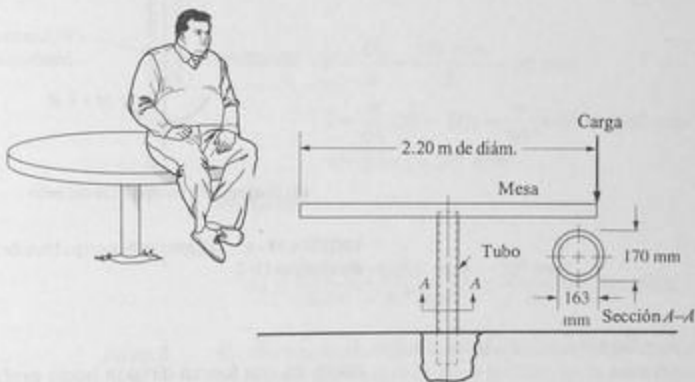


FIGURA 11-5 Mesa de jardín soportada por un tubo.

**Solución Objetivo**

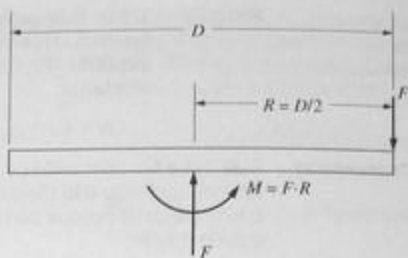
Calcular el esfuerzo máximo en el tubo de la figura 11-5 y el factor de diseño basado tanto en la resistencia a la cedencia como en la resistencia última.

**Datos**

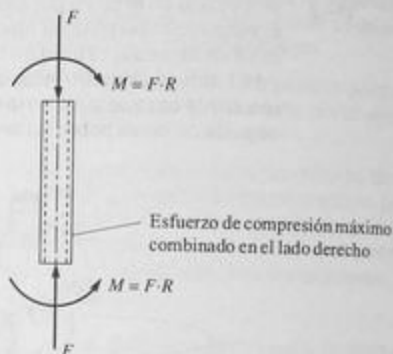
La carga y las dimensiones del tubo mostradas en la figura 11-5. La carga es la fuerza producida por una masa de 135 kg en la orilla de la mesa. El tubo es de aluminio 6061-T4;  $s_y = 145 \text{ MPa}$ ;  $s_u = 241 \text{ MPa}$ .

**Análisis**

El tubo se encuentra sometido a una flexión y compresión directa combinadas como se ilustra en la figura 11-6, el diagrama de cuerpo libre del tubo. El efecto de la carga es producir una fuerza dirigida hacia abajo en el extremo superior del tubo al mismo tiempo que ejerce un momento en sentido horario. El momento es el producto de la carga por el radio de la mesa. La reacción en el extremo inferior del tubo, creada por el con-



(a) Diagrama de cuerpo libre de la mesa



(b) Diagrama de cuerpo libre del tubo

FIGURA 11-6 Diagramas de cuerpo libre de la mesa y el tubo del ejemplo 11-2.

creto, es una fuerza dirigida hacia arriba, combinada con un momento de sentido antihorario. Siga las *Instrucciones para resolver problemas con esfuerzos normales combinados*.

**Resultados** **Paso 1.** La figura 11-6 muestra el diagrama de cuerpo libre. La fuerza es la atracción gravitacional de la masa de 135 kg:

$$F = mg = 135 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = 1324 \text{ N}$$

**Paso 2.** No actúan fuerzas inclinadas con respecto al eje del tubo.

**Paso 3.** Ahora bien, el esfuerzo de compresión axial directo en el tubo es:

$$\sigma_s = -\frac{F}{A}$$

Pero:

$$A = \frac{\pi(D_o^2 - D_i^2)}{4} = \frac{\pi(170^2 - 163^2) \text{ mm}^2}{4} = 1831 \text{ mm}^2$$

Por tanto:

$$\sigma_a = -\frac{1324 \text{ N}}{1831 \text{ mm}^2} = -0.723 \text{ MPa}$$

Este esfuerzo es un esfuerzo de compresión uniforme en cualquier sección transversal del tubo.

**Paso 4.**

No actúan fuerzas perpendiculares al eje del tubo.

**Paso 5.**

Como la fuerza actúa a 1.1 m del eje del tubo, el momento es:

$$M = (1324 \text{ N})(1.1 \text{ m}) = 1456 \text{ N}\cdot\text{m}$$

El cálculo del esfuerzo flexionante requiere la aplicación de la fórmula de flexión:

$$\sigma_b = \frac{Mc}{I}$$

en donde  $c = \frac{D_o}{2} = \frac{170 \text{ mm}}{2} = 85 \text{ mm}$

$$I = \frac{\pi}{64}(D_o^4 - D_i^4) = \frac{\pi}{64}(170^4 - 163^4) \text{ mm}^4$$
$$I = 6.347 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Por tanto:

$$\sigma_b = \frac{(1456 \text{ N}\cdot\text{m})(85 \text{ mm})}{6.347 \times 10^6 \text{ mm}^4} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 19.5 \text{ MPa}$$

**Paso 6.**

El esfuerzo flexionante  $\sigma_b$  produce esfuerzo de compresión en la cara derecha del tubo y tensión en la cara izquierda. Puesto que el esfuerzo de compresión directo se suma al esfuerzo flexionante en la cara derecha, es decir, donde ocurriría el esfuerzo máximo. El esfuerzo combinado sería entonces:

$$\sigma_c = -\sigma_a - \sigma_b = (-0.723 - 19.5) \text{ MPa} = -20.22 \text{ MPa}$$

**Paso 7.**

El factor de diseño basado en la resistencia a la cedencia es:

$$N = \frac{S_y}{\sigma_c} = \frac{145 \text{ MPa}}{20.22 \text{ MPa}} = 7.17$$

El factor de diseño basado en la resistencia última es:

$$N = \frac{S_u}{\sigma_c} = \frac{241 \text{ MPa}}{20.22 \text{ MPa}} = 11.9$$

### Comentario

Estos valores basados en los esfuerzos normales de tensión y compresión deben ser aceptables para esta aplicación. La tabla 3-2 del capítulo 3 sugiere  $N = 2$  basado en la resistencia a la cedencia en el caso de carga estática y  $N = 12$  basado en la resistencia última en el caso de impacto. Si la persona se sienta en el borde de la mesa, en el caso de carga estática. Pero si la persona salta sobre el borde de la mesa, la carga sería de impacto. El factor de diseño de 11.9 es casi el valor recomendado para evaluar la tendencia del tubo a pandearse como si fuera una columna, tal como se verá en el capítulo 14. Además, la referencia 1 define los procedimientos para evaluar la tendencia al pandeo local de un tubo circular hueco sometido a compresión.

## 11-3 ESFUERZOS NORMAL Y CORTANTE COMBINADOS

Las flechas giratorias de máquinas transmisoras de potencia son buenos ejemplos de miembros cargados de tal modo que producen flexión y torsión combinadas. La figura 11-7 muestra una flecha con dos ruedas dentadas para cadena. La potencia se transmite a la flecha por medio de la rueda en  $C$  y hacia abajo de aquella hasta la rueda en  $B$ , la que, a su vez, la transmite a otra flecha. Porque está transmitiendo potencia, la flecha entre  $B$  y  $C$  soporta un par de torsión y un esfuerzo cortante torsional, como se vio en el capítulo 5. Para que las ruedas dentadas transmitan torsión, deben ser arrastradas por un lado de la cadena. En  $C$ , el lado trasero de la cadena debe tirar hacia abajo con la fuerza  $F_1$  para impulsar la rueda dentada en sentido horario. Como la rueda dentada en  $B$  acciona a otra rueda dentada, el lado delantero de la cadena estaría a tensión por la acción de la fuerza  $F_2$ . Las dos fuerzas,  $F_1$  y  $F_2$ , que actúan dirigidas hacia abajo, provocan flexión de la flecha. Por eso, la flecha se debe analizar tanto con respecto a esfuerzo cortante torsional como con respecto a esfuerzo flexionante. En tal caso, como ambos esfuerzos actúan en el mismo lugar de la flecha, se tiene que determinar su efecto combinado. El método de análisis que se va a utilizar se llama *teoría de falla del esfuerzo cortante máximo*, la cual se describe a continuación. Luego se presentarán algunos ejemplos.

**Teoría de falla del máximo esfuerzo cortante.** Cuando el esfuerzo de tensión o compresión provocado por flexión ocurre en el mismo lugar donde ocurre un esfuerzo

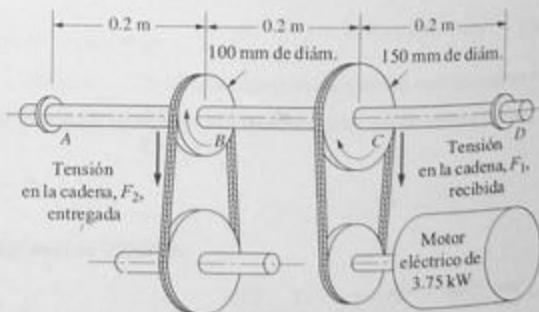


FIGURA 11-7 Flechas transmisoras de potencia.

cortante, las dos clases de esfuerzo se combinan para producir un esfuerzo cortante de mayor magnitud. El esfuerzo máximo se calcula con:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (11-2)$$

En la ecuación (11-2),  $\sigma$  se refiere a la magnitud del esfuerzo de tensión o compresión en un punto, y  $\tau$  es el esfuerzo cortante en el mismo punto. El resultado  $\tau_{\max}$  es el esfuerzo cortante máximo en el punto. El fundamento de la ecuación (11-2) se demostró con el círculo de Mohr en la sección 10-12.

La teoría de falla del esfuerzo cortante máximo establece que un miembro falla cuando el esfuerzo cortante máximo excede la resistencia a la cedencia del material a cortante. Esta teoría de falla guarda una buena correlación con los resultados de prueba de metales dúctiles como la mayoría de los aceros.

**Par de torsión equivalente.** La ecuación (11-2) se puede expresar en una forma simplificada para el caso particular de una flecha circular sometida a flexión y torsión. Si se evalúa el esfuerzo flexionante por separado, el esfuerzo máximo de tensión o compresión sería:

$$\sigma = \frac{M}{S}$$

en donde:  $S = \frac{\pi D^3}{32}$  = módulo de sección

$D$  = diámetro de la flecha

$M$  = momento flexionante en la sección

El esfuerzo máximo producido por flexión ocurre en la superficie externa de la flecha, como se muestra en la figura 11-8.

Ahora, considérese el esfuerzo cortante torsional por separado. En el capítulo 5 se derivó la ecuación del esfuerzo cortante torsional:

$$\tau = \frac{T}{Z_p}$$

en donde:  $Z_p = \frac{\pi D^3}{16}$  = módulo de sección polar

$T$  = par de torsión en la sección

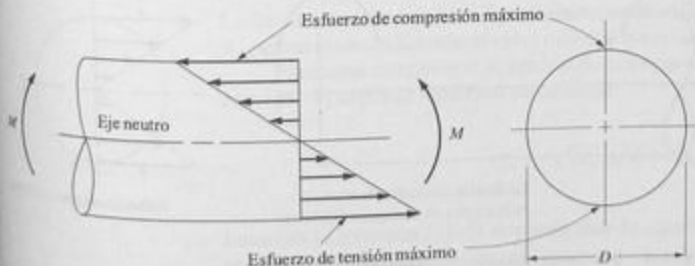


FIGURA 11-8 Distribución del esfuerzo flexionante en una flecha circular.



El esfuerzo cortante máximo ocurre en la superficie externa de la flecha albedada de toda la circunferencia, como se muestra en la figura 11-9.

Así pues el esfuerzo de tensión máximo y el esfuerzo cortante torsional máximo ocurren en el mismo punto de la flecha. Ahora utilícese la ecuación (11-2) para obtener una expresión para el esfuerzo combinado en función del momento flexionante  $M$ , el par de torsión  $T$  y el diámetro externo  $D$ .

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \tau_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{M}{2S}\right)^2 + \left(\frac{T}{Z_p}\right)^2}\end{aligned}\quad (11-3)$$

Nótese que, por las definiciones de  $S$  y  $Z_p$  antes dadas:

$$2S = Z_p$$

Sustituyendo en la ecuación (11-3) se obtiene:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{M}{Z_p}\right)^2 + \left(\frac{T}{Z_p}\right)^2}$$

Factorizando  $Z_p$  se obtiene:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{Z_p} \sqrt{M^2 + T^2}$$

En ocasiones el término  $\sqrt{M^2 + T^2}$  se denomina *par de torsión equivalente* porque representa la cantidad de par de torsión que se tendría que aplicar a la flecha para provocar un esfuerzo cortante de magnitud equivalente a la combinación de flexión y torsión. Si este par de torsión equivalente se designa como  $T_e$ :

$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2}\quad (11-4)$$

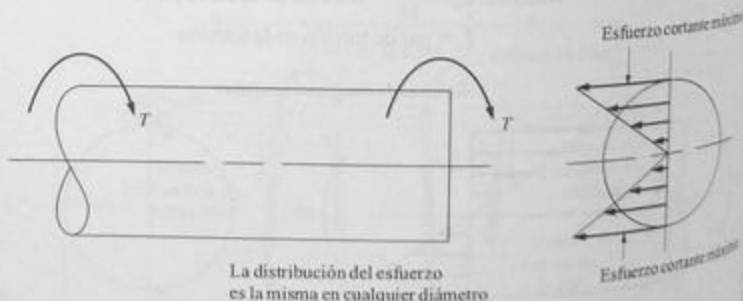


FIGURA 11-9 Distribución del esfuerzo cortante en una flecha circular.

y:

$$\tau_{\max} = \frac{T_e}{Z_p} \quad (11-5)$$

Las ecuaciones (11-4) y (11-5) simplifican en gran medida el cálculo del esfuerzo cortante máximo en una flecha circular sometida a flexión y torsión.

En el diseño de flechas circulares sometidas a flexión y torsión, se puede especificar un esfuerzo de diseño dando el esfuerzo cortante máximo permisible. Esto se hizo en el capítulo 5:

$$\tau_d = \frac{s_{sy}}{N}$$

en donde  $s_{sy}$  es la resistencia a la cedencia del material sometido a cortante. Como  $s_{sy}$  rara vez se conoce, se puede usar el valor aproximado determinado con  $s_{sy} = s_y/2$ . Por tanto:

$$\tau_d = \frac{s_y}{2N} \quad (11-6)$$

en donde  $s_y$  es la resistencia a la cedencia a tensión, tal como se reporta en la mayoría de las tablas de propiedades de materiales, como las de los apéndices A-13 a A-17. Se recomienda que el valor del factor de diseño *no sea menor que 4*. Una flecha giratoria sometida a flexión es un buen ejemplo de una carga repetida e invertida. Con cada revolución de la flecha, un punto particular de la superficie se somete al esfuerzo de tensión máximo y luego al esfuerzo de compresión máximo. Así pues, la fatiga es el modo de falla esperado, y se recomienda  $N = 4$  o mayor, basado en la resistencia a la cedencia.

**Concentraciones de esfuerzo.** En flechas, las concentraciones de esfuerzo se crean por los cambios repentinos de geometría, tales como cuñeros, hombros y ranuras. Véase el apéndice A-21 donde se dan valores de factores de concentración de esfuerzo. La aplicación apropiada de factores de concentración de esfuerzo a las ecuaciones (11-4) y (11-5) de par de torsión equivalente se debe considerar con cuidado. Si el valor de  $K_t$  en una sección de interés es igual tanto a flexión como a torsión, entonces se puede aplicar directamente a la ecuación (11-5). Es decir:

$$\tau_{\max} = \frac{T_e K_t}{Z_p} \quad (11-7)$$

La forma de la ecuación (11-7) también se puede aplicar como un cálculo conservador de  $\tau_{\max}$  seleccionando  $K_t$  como el valor máximo a torsión o a flexión.

Para tener en cuenta el  $K_t$  apropiado tanto para torsión como para flexión, la ecuación (11-4) se puede modificar como sigue:

$$T_e = \sqrt{(K_{tb}M)^2 + (K_{tr}T)^2} \quad (11-8)$$

Entonces la ecuación (11-5) se puede usar de manera directa para calcular el esfuerzo cortante máximo.

**Ejemplo 11-3** Especifique un material adecuado para la flecha mostrada en la figura 11-7. La flecha tiene un diámetro uniforme de 55 mm y gira a 120 rpm al mismo tiempo que transmite 3.75 kW de potencia. Las ruedas dentadas *B* y *C* se montan en la flecha por medio de cuñas. La rueda dentada *C* recibe la potencia y la *B* la entrega a otra flecha. Los cojinetes en *A* y *D* funcionan como apoyos simples para la flecha.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Especificar un material adecuado para la flecha.
	<b>Datos</b>	La flecha y las cargas mostradas en la figura 11-7. Potencia = $P = 3.75$ kW. Velocidad de rotación = $n = 120$ rpm. Diámetro de la flecha = $D = 55$ mm. Cúñeros en <i>B</i> y <i>C</i> . Apoyos simples en <i>A</i> y <i>D</i> .
	<b>Análisis</b>	A continuación se describen los diversos pasos que se siguen en la solución de este problema. <ol style="list-style-type: none"> <li>1. El par de torsión en la flecha se calculará para la potencia y la velocidad de rotación conocidas con <math>T = P/n</math>, tal como se desarrolló en el capítulo 5.</li> <li>2. Se calcularán las tensiones en las cadenas de las ruedas <i>B</i> y <i>C</i>. Éstas son las fuerzas que producen flexión en la flecha.</li> <li>3. Si se considera la flecha como una viga, se dibujarán sus diagramas de cortante y momento flexionante.</li> <li>4. En la sección donde ocurre el máximo momento flexionante, se calculará el par de torsión equivalente <math>T_e</math> con la ecuación (11-4).</li> <li>5. Se determinarán el módulo polar de sección <math>Z_p</math> y el factor de concentración de esfuerzo <math>K_f</math>.</li> <li>6. El esfuerzo cortante máximo se calculará con la ecuación (11-7).</li> <li>7. La resistencia a la cedencia requerida del material de la flecha se calculará con <math>\tau_{\max} = \tau_y</math> en la ecuación (11-6) y resolviéndola para <math>\sigma_y</math>. Recuérdese que debe ser <math>N = 4</math> o mayor.</li> <li>8. Del apéndice A-13 se seleccionará un acero que tenga una suficiente resistencia a la cedencia.</li> </ol>

**Resultados Paso 1.** La unidad deseable para el par de torsión es el N·m. En tal caso es muy conveniente observar que la unidad de potencia de kilowatts es equivalente a la unidades de kN·m/s. Asimismo, la velocidad de rotación debe expresarse en rad/s.

$$n = \frac{120 \text{ rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 12.57 \text{ rad/s}$$

Ahora se puede calcular el par de torsión.

$$T = \frac{P}{n} = \frac{3.75 \text{ kN}\cdot\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{12.57 \text{ rad/s}} = 0.298 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

**Paso 2.** En la figura 11-7 se indican las tensiones en las cadenas por medio de las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$ . Para que la flecha esté en

equilibrio, el par de torsión en las dos ruedas dentadas debe tener la misma magnitud pero dirección opuesta. En una u otra rueda el par de torsión es el producto de la fuerza en la cadena por el radio de la polea. Es decir:

$$T = F_1 R_1 = F_2 R_2$$

Ahora ya se pueden calcular las fuerzas.

$$F_1 = \frac{T}{R_1} = \frac{0.298 \text{ kN}\cdot\text{m}}{75 \text{ mm}} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 3.97 \text{ kN}$$

$$F_2 = \frac{T}{R_2} = \frac{0.298 \text{ kN}\cdot\text{m}}{50 \text{ mm}} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 5.96 \text{ kN}$$

**Paso 3.**

La figura 11-10 muestra los diagramas completos de cortante y momento flexionante determinados con los métodos del capítulo 6. El momento flexionante máximo es de 1.06 kN·m en la sección B donde se localiza una de las ruedas dentadas.

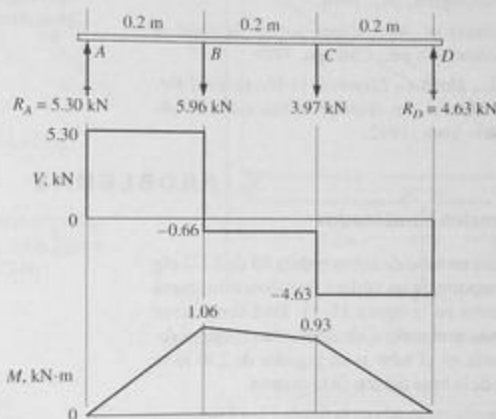


FIGURA 11-10 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del ejemplo 11-3.

**Paso 4.** En la sección B, el par de torsión en la flecha es de 0.298 kN·m y el momento flexionante de 1.06 kN·m. Por tanto:

$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2} = \sqrt{(1.06)^2 + (0.298)^2} = 1.10 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

**Paso 5.**

$$Z_p = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi (55 \text{ mm})^3}{16} = 32.67 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Para el cuñero en la sección B que sujeta la rueda dentada a la flecha, se utilizará  $K_f = 1.6$ , tal como se reporta en la figura 5-9.

**Paso 6.**

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T_e K_f}{Z_p} = \frac{1.10 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}(1.6)}{32.67 \times 10^3 \text{ mm}^3} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 53.9 \text{ MPa}$$

Paso 7. Sea:

$$\tau_{\max} = \tau_a = \frac{s_y}{2N}$$

Por tanto:  $s_y = 2N\tau_{\max} = (2)(4)(53.9 \text{ MPa}) = 431 \text{ MPa}$

Paso 8.

En el apéndice A-13 se ve que se podrían usar varias aleaciones. Por ejemplo, el acero AISI 1040 estirado en frío tiene una resistencia a la cedencia de 490 MPa. La aleación AISI 1141 OQT 1300 tiene una resistencia a la cedencia de 469 MPa y también una excelente ductilidad, indicada por su 28% de alargamiento. Cualquiera de éstas sería una opción razonable.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Aluminum Association, *Specifications for Aluminum Structures*, Washington, DC, 1986.
2. American Institute of Steel Construction, *Manual of Steel Construction*, 9th ed., Chicago, 1989.
3. Mott, Robert L., *Machine Elements in Mechanical Design*, 2nd ed., Merrill, an imprint of Macmillan Publishing Co., New York, 1992.
4. Shigley, J. E., and C. R. Mischke, *Mechanical Engineering Design*, 5th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.

## PROBLEMAS

### Esfuerzos normales combinados

- 11-1.I Se utiliza un tubo de acero cédula 40 de 2 1/2 plg como soporte de un tablero de baloncesto, como se muestra en la figura 11-11. Está firmemente anclado en el suelo. Calcule el esfuerzo que se desarrollaría en el tubo si un jugador de 230 lb se cuelga de la base del aro de la canasta.
- 11-2.M La ménsula mostrada en la figura 11-12 tiene una sección transversal rectangular de 18 mm de ancho por 75 mm de altura. Está firmemente empotrada en el muro. Calcule el esfuerzo máximo en la ménsula.
- 11-3.I La viga mostrada en la figura 11-13 soporta una carga de 6000 lb aplicada a una ménsula debajo de ella. Calcule el esfuerzo en los puntos *M* y *N* donde se fija a la columna.
- 11-4.I Para la viga mostrada en la figura 11-13, calcule el esfuerzo en los puntos *M* y *N* si la carga de 6000 lb actúa verticalmente dirigida hacia abajo en lugar de inclinada.
- 11-5.I Para la viga mostrada en la figura 11-13, calcule el esfuerzo en los puntos *M* y *N* si la carga de 6000 lb actúa hacia la columna a un ángulo de 40° por debajo de la horizontal en lugar de como se muestra.

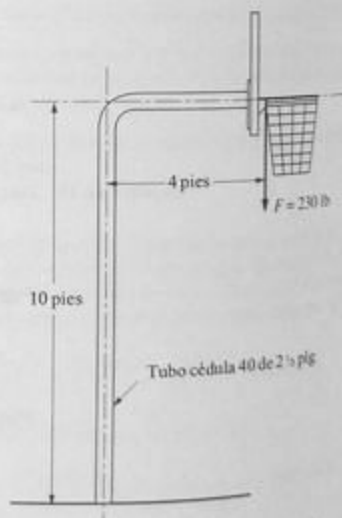


FIGURA 11-11 Tablero de baloncesto del problema 11-1.

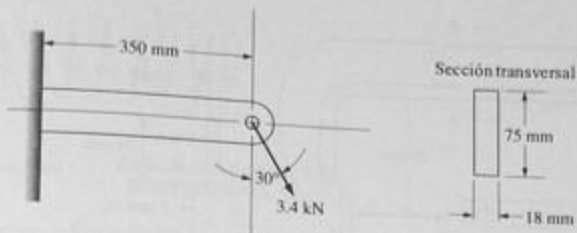


FIGURA 11-12 Ménsula del problema 11-2.

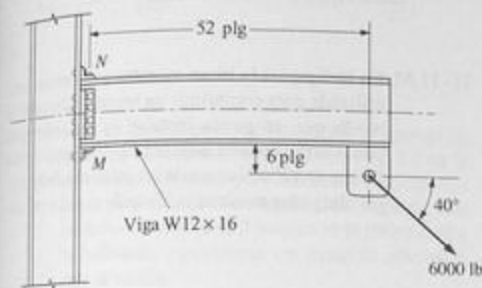


FIGURA 11-13 Viga de los problemas 11-3, 11-4 y 11-5.

11-6.M Calcule el esfuerzo máximo en la parte superior del arco de la sierra caladora mostrada en la figura 11-14, si la tensión en la hoja es de 125 N.

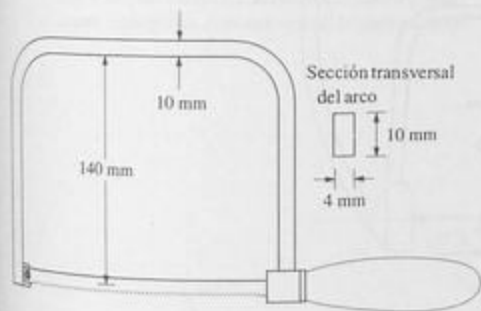


FIGURA 11-14 Arco de la sierra caladora del problema 11-6.

11-7.M Calcule el esfuerzo máximo en la viga de grúa mostrada en la figura 11-15 cuando se aplica una carga de 12 kN a la mitad de ella.

11-8.M La figura 11-16 muestra una segueta cortametales. Su arco es un tubo hueco de 12 mm de diámetro

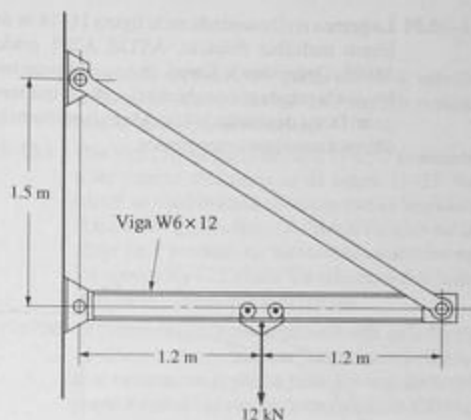


FIGURA 11-15 Viga de grúa del problema 11-7.



FIGURA 11-16 Arco de la segueta del problema 11-8.

tro externo y 1.0 mm de espesor de pared. La segueta se tensa con la mariposa, por lo que en aquella se produce una fuerza de tensión de 160 N. Calcule el esfuerzo máximo en la sección superior del arco tubular.

11-9.M La prensa en C ilustrada en la figura 11-17 es de zinc fundido, ZA12. Determine la fuerza de sujeción permisible que la prensa puede ejercer si se desea que tenga un factor de diseño de 4 basado en la resistencia última a tensión o a compresión.

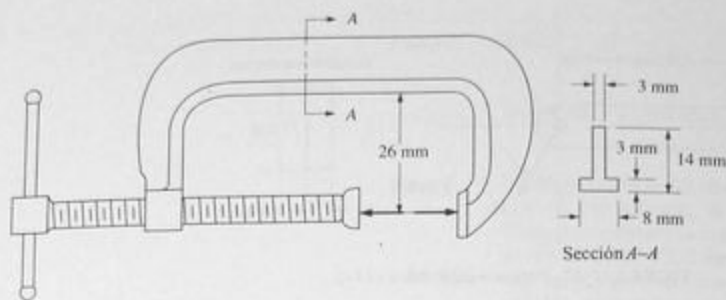


FIGURA 11-17 Prensa en C del problema 11-9.

11-10.M La prensa en C mostrada en la figura 11-18 es de hierro maleable fundido, ASTM A220 grado 45008. Determine la fuerza de sujeción permisible que la prensa puede ejercer si se desea que tenga un factor de diseño de 4 basado en la resistencia última a tensión o a compresión.

11-11.M En la figura 11-19 se muestra una herramienta utilizada para comprimir un resorte helicoidal de modo que se pueda instalar en un automóvil, como se muestra en la figura 11-19. Se aplica una fuerza de 1200 N cerca de los extremos de las varas alargadas mostradas. Calcule el esfuerzo má-

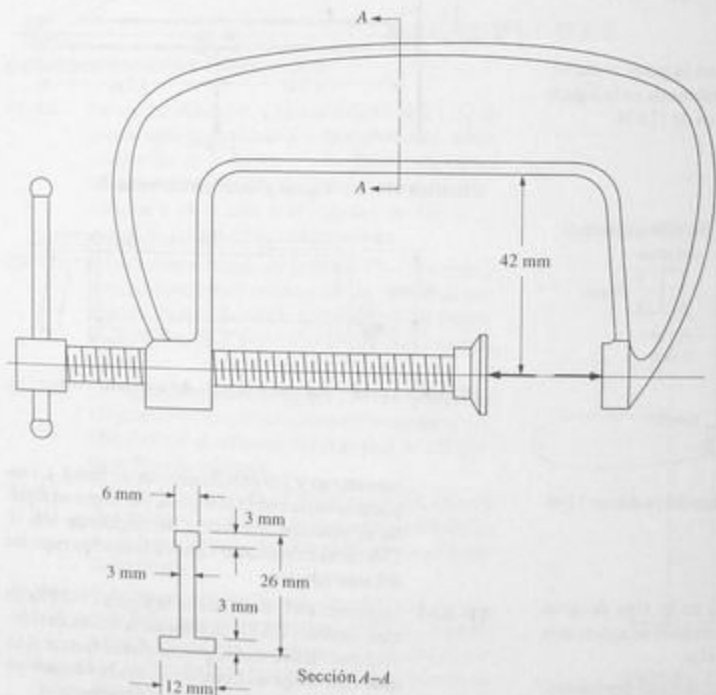


FIGURA 11-18 Prensa en C del problema 11-10.

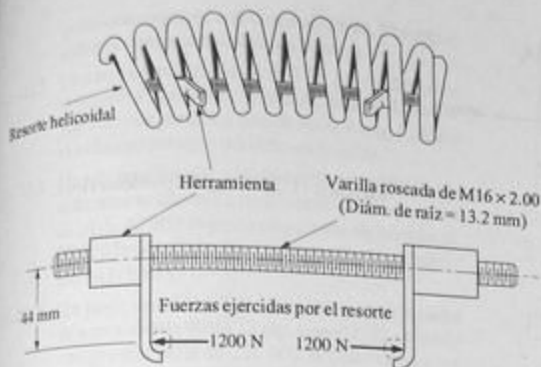


FIGURA 11-19 Herramienta para comprimir resortes del problema 11-11.

ximo de tensión en la varilla roscada. Suponga un factor de concentración de esfuerzo de 3.0 en la raíz de la rosca tanto para esfuerzos flexionantes como para esfuerzos de tensión. En seguida, con un factor de diseño de 2 basado en la resistencia a la cedencia, especifique un material adecuado para la varilla.

- 11-12.M La figura 11-20 muestra una porción del mecanismo de dirección de un automóvil. El brazo de dirección tiene el diseño detallado mostrado. Observe que el brazo tiene un espesor constante de 10 mm, así que todas las secciones transversales entre las orejas extremas son rectangulares. La fuerza de 225 N se aplica al brazo a un ángulo de  $60^\circ$ . Calcule el esfuerzo en las secciones *A* y *B* del brazo. En seguida, supuesto que el brazo es de hie-

rró dúctil, ASTM A536, grado 80-55-6, calcule el factor de diseño máximo en estos dos puntos, basado en la resistencia última.

- 11-13.I Una viga I American Standard  $S3 \times 5.7$  se somete a las fuerzas mostradas en la figura 11-21. La fuerza de 4600 lb actúa directamente en línea con el eje de la viga. La fuerza de 500 lb dirigida hacia abajo en *A* produce las reacciones mostradas en los apoyos *B* y *C*. Calcule los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la viga.

- 11-14.M La pluma de grúa horizontal mostrada en la figura 11-22 es un tubo rectangular hueco de acero. Calcule el esfuerzo en la pluma justo a la izquierda del punto *B* cuando se suspende una masa de 1000 kg del extremo.

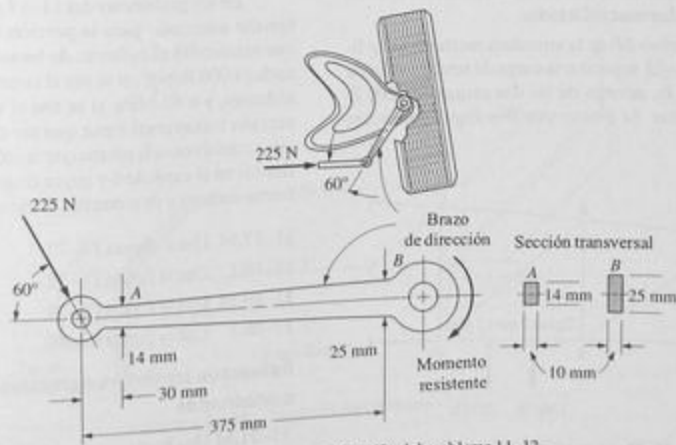


FIGURA 11-20 Brazo de dirección del problema 11-12.



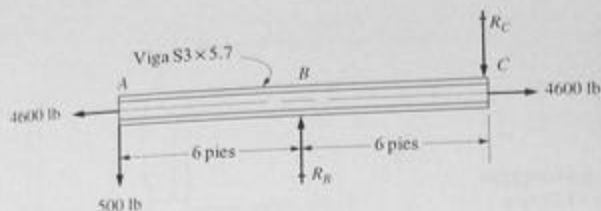


FIGURA 11-21 Viga del problema 11-13.

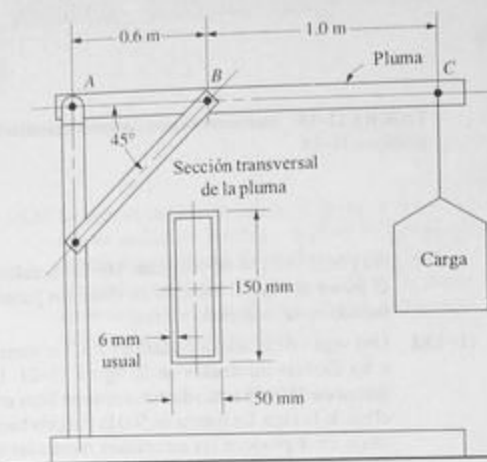


FIGURA 11-22 Pluma de grúa de los problemas 11-14 y 11-15.

11-15.M Para la pluma de grúa mostrada en la figura 11-22 calcule la carga que podría soportar si se desea un factor de diseño de 3 basado en la resistencia a la cedencia. La pluma es de acero AISI 1040 laminado en caliente. Analice sólo las secciones donde la sección tubular completa soporta la carga, suponiendo que las secciones en las conexiones están adecuadamente reforzadas.

11-16.I El miembro  $EF$  de la armadura mostrada en la figura 11-23 soporta una carga de tensión axial de 54 000 lb, además de las dos cargas de 1200 lb mostradas. Se piensa usar dos ángulos de acero

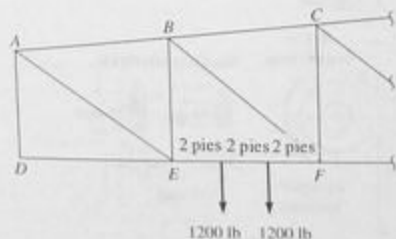


FIGURA 11-23 Armadura del problema 11-16.

para fabricar el miembro, dispuestos espalda con espalda. Especifique un tamaño adecuado para los ángulos, suponiendo que se tienen que fabricar de acero estructural ASTM A36 con un esfuerzo permisible de 0.6 veces su resistencia a la cedencia.

En los problemas del 11-17 al 11-20, especifique un tamaño adecuado para la porción horizontal del miembro que mantendrá el esfuerzo de tensión o compresión combinada a  $6000 \text{ lb/plg}^2$ , si se usa el sistema de unidades estadounidenses, y a  $42 \text{ MPa}$ , si se usa el sistema métrico (SI). La sección transversal tiene que ser cuadrada. La carga para estos miembros es la misma que se usó en los problemas especificados en el capítulo 6 y cuyos diagramas de cuerpo libre, de fuerza cortante y de momento flexionante ya se trazaron.

11-17.M Use la figura P6-77.

11-18.I Use la figura P6-78.

11-19.M Use la figura P6-79.

11-20.I Use la figura P6-80.

### Esfuerzos cortantes normales y torsionales combinados

11-21.M Una barra circular sólida de 40 mm de diámetro somete a una fuerza de tensión axial de 150 kN

junto con un par de torsión de 500 N·m. Calcule el esfuerzo cortante máximo en la barra.

- 11-22.I Una barra circular sólida de 2.25 plg de diámetro se somete a una fuerza de tensión axial de 47 000 lb junto con un par de torsión de 8500 lb·plg. Calcule el esfuerzo cortante máximo en la barra.
- 11-23.I Una barra circular sólida corta de 4.00 plg de diámetro se somete a una fuerza de compresión axial de 40 000 lb junto con un par de torsión de 25 000 lb·plg. Calcule el esfuerzo cortante máximo en la barra.
- 11-24.I Un poste circular sólido corto, hecho con un tubo de acero cédula 40 de 12 plg, soporta una carga de compresión axial de 250 000 lb junto con un par de torsión de 180 000 lb·plg. Calcule el esfuerzo cortante máximo en el poste.
- 11-25.I Un soporte circular hueco corto hecho con un tubo de acero cédula 40 de 3 plg soporta una carga de compresión axial de 25 000 lb junto con un par de torsión de 15 500 lb·plg. Calcule el esfuerzo cortante máximo en el soporte.
- 11-26.I Una antena de televisión se monta en un tubo hueco de aluminio como se ilustra en la figura 11-24. Durante su instalación, se aplica una fuerza de 20 lb al extremo de la antena como se indica. Calcule el esfuerzo cortante torsional en el tubo y el esfuerzo provocado por flexión. Considere que el tubo está simplemente apoyado a prueba de flexión en las abrazaderas y que no se permite la rotación. Si el tubo es de aluminio 6061-T6, ¿sería seguro al verse sometido a esta carga? El diámetro externo del tubo es de 1.50 plg y su espesor de pared de 1/16 plg.

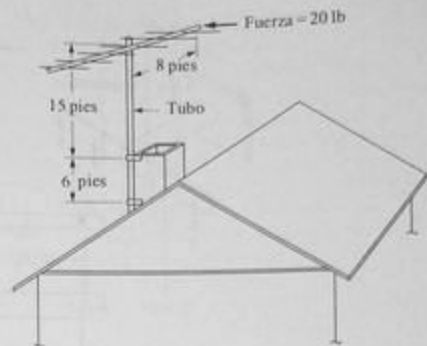


FIGURA 11-24 Tubo para montar la antena del problema 11-26.

- 11-27.M La figura 11-25 muestra una manivela con una fuerza  $F$  de 1200 N aplicada. Calcule el esfuerzo máximo en el tramo circular de la manivela.
- 11-28.I Se tiene que usar un tubo de acero estándar para soportar una barra que soporta cuatro cargas, como se muestra en la figura 11-26. Especifique un tubo adecuado que mantenga el esfuerzo cortante máximo a 8000 lb/plg<sup>2</sup>.

#### Flechas giratorias—esfuerzos cortantes y flexionantes torsionales combinados

- 11-29.M Una flecha circular soporta la carga mostrada en la figura 11-27. La flecha soporta un par de torsión de 1500 N·m entre las secciones  $B$  y  $C$ . Calcule el esfuerzo cortante máximo en la flecha cerca de la sección  $B$ .

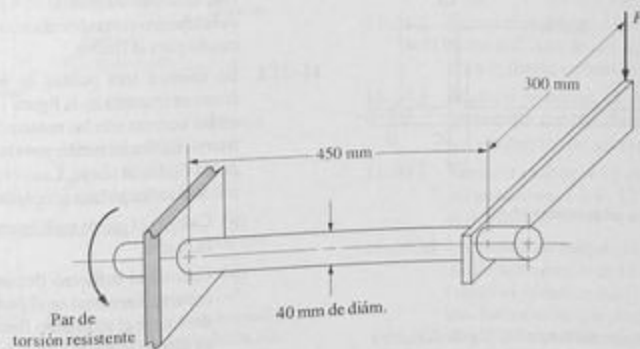


FIGURA 11-25 Manivela del problema 11-27.

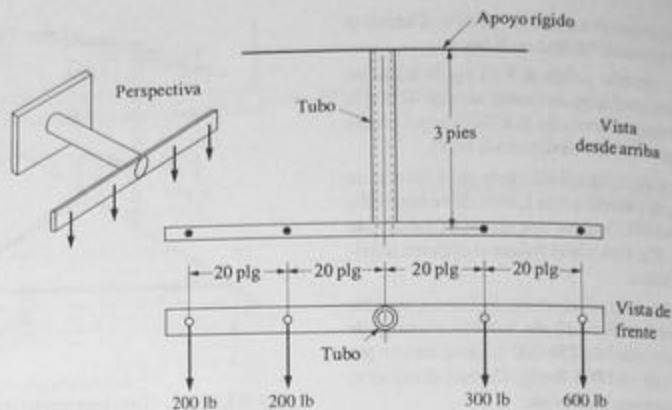


FIGURA 11-26 Ménsula del problema 11-28.

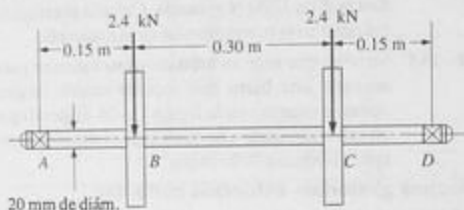


FIGURA 11-27 Flecha del problema 11-29.

11-30.M Una flecha circular soporta la carga mostrada en la figura 11-28. La flecha soporta un par de torsión de 4500 N·m entre las secciones B y C. Calcule el esfuerzo cortante máximo en la flecha cerca de la sección B.

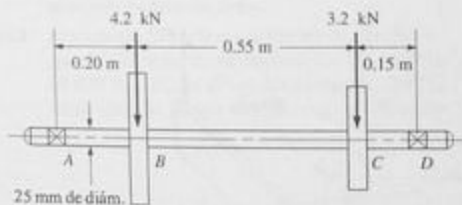


FIGURA 11-28 Flecha del problema 11-30.

11-31.I Una flecha circular sólida de 1.0 plg de diámetro soporta 25 hp mientras gira a 1150 rpm dispuesta como se muestra en la figura 11-29. Se muestran las cargas totales de flexión en los engranes A y C,

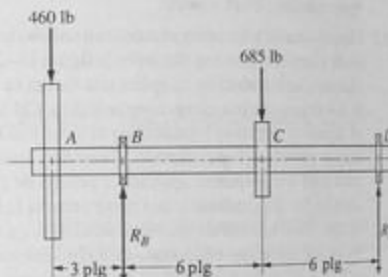


FIGURA 11-29 Flecha del problema 11-31.

junto con las reacciones en los cojinetes B y D. Use un factor de diseño de 6 para la teoría de falla del esfuerzo cortante máximo y elija un acero adecuado para la flecha.

11-32.I Se montan tres poleas en una flecha giratoria como se muestra en la figura 11-30. Las tensiones en las correas son las mostradas en la vista de extremo. La flecha recibe toda la potencia a través de la polea C, desde abajo. Las poleas A y B transmiten potencia a las poleas acopladas de arriba.

- Calcule el par de torsión en todos los puntos de la flecha.
- Calcule el esfuerzo flexionante y el esfuerzo cortante torsional en el punto de la flecha donde ocurre el momento flexionante máximo, si su diámetro es de 1.75 plg.
- Calcule el esfuerzo cortante máximo en el punto del paso (b). Luego especifique un material adecuado para la flecha.

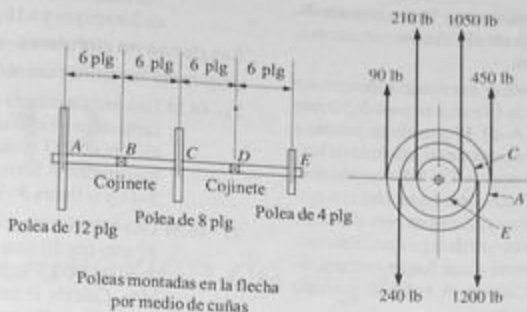


FIGURA 11-30 Flecha del problema 11-32.

11-33.M La flecha vertical mostrada en la figura 11-31 dispone de dos poleas impulsadas por correas. Se muestran las fuerzas de tensión en las correas en operación. Además, la flecha soporta una carga de compresión axial de 6.2 kN. Considerando esfuerzos de torsión, flexión y de compresión axial, calcule el esfuerzo cortante máximo con la ecuación (11-2).

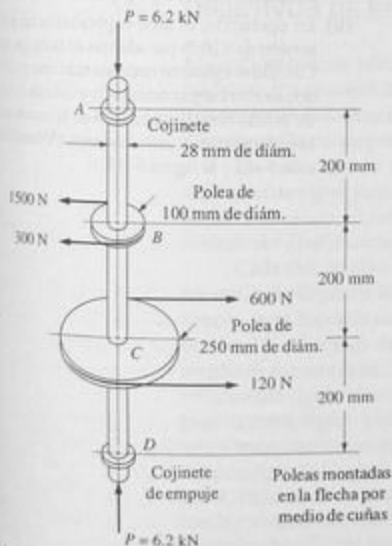


FIGURA 11-31 Flecha del problema 11-33.

11-34.M Para la flecha del problema 11-33, especifique un acero adecuado que produzca un factor de diseño de 4 basado en la resistencia a la cedencia a cortante.

### Esfuerzos de tensión axial y cortante directo combinados

11-35.I Un tornillo de máquina tiene roscas UNC American Standard Número 8-32 (véase el apéndice A-3). El tornillo se somete a una fuerza de tensión axial que produce un esfuerzo de tensión directa en las roscas de  $15\,000\text{ lb/plg}^2$  basado en el área sometida al esfuerzo de tensión. Hay una sección debajo de la cabeza sin roscas cuyo diámetro es igual al diámetro mayor de las roscas. Esta sección también se somete a una fuerza cortante directa de 120 lb. Calcule el esfuerzo cortante máximo en esta sección.

11-36.I Repita el problema 11-35 excepto que las roscas del tornillo son de 1/4-20 UNC American Standard y la fuerza cortante es de 775 lb.

11-37.I Repita el problema 11-35 excepto que las roscas del tornillo son No. 4-48 UNF American Standard y la fuerza cortante es de 50 lb.

11-38.I Repita el problema 11-35 excepto que las roscas del tornillo son 1 1/4-12 UNF y la fuerza cortante es de 2500 lb.

11-39.M Un tornillo de máquina tiene roscas métricas con un diámetro mayor de 16 mm y un paso de 2.0 mm (véase el apéndice A-3). El tornillo se somete a una fuerza axial que produce un esfuerzo de tensión directo en las roscas de 120 MPa basado en el área sometida al esfuerzo de tensión. Hay una sección debajo de la cabeza sin roscas cuyo diámetro es igual al diámetro mayor de las roscas. Esta sec-

ción también se somete a una fuerza cortante directa de 8,0 kN. Calcule el esfuerzo cortante máximo en esta sección.

- 11-40.M Un tornillo de máquina tiene roscas métricas con un diámetro mayor de 48 mm y un paso de 5,0 mm (véase el apéndice A-3). El tornillo se somete a una fuerza axial que produce un esfuerzo de tensión directo en las roscas de 120 MPa basado en el área sometida al esfuerzo de tensión. Hay una sección debajo de la cabeza sin roscas cuyo diámetro es igual al diámetro mayor de las roscas. Esta sección también se somete a una fuerza cortante directa de 80 kN. Calcule el esfuerzo cortante máximo en esta sección.

#### Esfuerzos flexionante y cortante vertical combinados

- 11-41.I Una barra rectangular se usa como viga sometida a una carga concentrada de 5500 lb a la mitad de su claro de 60 plg. La sección transversal es de 2,0 plg de ancho por 6,00 plg de altura, con la dimensión de 6,00 plg orientada verticalmente. Calcule el esfuerzo cortante máximo que ocurre en la barra cerca de la carga en los siguientes puntos de la sección:
- (a) En la cara inferior de la barra.
  - (b) En la cara superior de la barra.
  - (c) En el eje neutro.
  - (d) En un punto a 1,0 plg sobre la cara inferior de la barra.
  - (e) En un punto a 2,0 plg sobre la cara inferior de la barra.
- 11-42.I Repita el problema 11-41 excepto que la viga es una viga I de aluminio,  $16 \times 4,692$ .
- 11-43.I Repita el problema 11-41 excepto que la carga es una carga uniformemente distribuida de 100 lb/plg a todo lo largo de la viga. Considere seccio-

nes transversales cerca del centro de la viga, cerca de los apoyos y a 15 plg del apoyo izquierdo.

#### Secciones no circulares—esfuerzos normal y cortante torsional combinados

- 11-44.M Una barra cuadrada de 25 mm de lado soporta una carga de tensión axial de 75 kN junto con un par de torsión de 245 N·m. Calcule el esfuerzo cortante máximo en la barra. (Nota: Recurra a la sección 5-11 y la figura 5-18.)
- 11-45.M Una barra rectangular con sección transversal de 30 mm por 50 mm soporta una carga de tensión axial de 175 kN junto con un par de torsión de 525 N·m. Calcule el máximo esfuerzo cortante en la barra. (Nota: Recurra a la sección 5-11 y la figura 5-18.)
- 11-46.M Una barra tiene una sección transversal en forma de triángulo equilátero, de 50 mm de lado. Soporta una fuerza de tensión axial de 115 kN junto con un par de torsión de 775 N·m. Calcule el máximo esfuerzo cortante en la barra. (Nota: Recurra a la sección 5-11 y la figura 5-18.)
- 11-47.I Un eslabón de un mecanismo de grandes dimensiones está hecho de un tubo estructural de  $3 \times 3 \times 1/4$  (véase el apéndice A-9). Originalmente se diseñó para que soportara una carga de tensión axial que produce un factor de diseño de 3, basado en la resistencia a la cedencia del acero estructural ASTM A500 formado en frío, grado C.
- (a) Determine la carga y el máximo esfuerzo cortante que se produce en el tubo.
  - (b) En operación, el tubo experimenta un par de torsión de 950 lb·pie además de la carga axial. Calcule el esfuerzo cortante máximo producido por esta carga combinada y calcule el factor de diseño resultante basado en la resistencia a la cedencia del acero a cortante. (Véase la sección 5-11 y la figura 5-18.)

# 12

## Deflexión de vigas

### 12-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

El funcionamiento adecuado de las piezas de una máquina, la rigidez estructural de los edificios, los chasis de vehículos y máquinas y la tendencia de una pieza a vibrar dependen de la deformación de vigas. Por consiguiente, la facultad de analizar vigas para detectar deflexiones por la acción de una carga es muy importante.

En este capítulo se presentan los principios en los que se basa el cálculo de la deflexión de vigas, junto con cuatro conocidos métodos de análisis de deflexión: el *método de la fórmula*, el *método de superposición*, el *método de integración sucesiva* y el *método del área de momento*.

Cada uno de ellos ofrece ventajas y desventajas, y la decisión de qué método va a ser utilizado depende de la naturaleza del problema. El método de la fórmula es el más simple, pero depende de la disponibilidad de una fórmula adecuada que case con la aplicación. El método de superposición, una extensión modesta del método de la fórmula, amplía de manera dramática el número de problemas prácticos que se pueden resolver sin un aumento significativo en la complejidad de la solución. El método del área de momento es bastante rápido y simple, pero en general se usa para calcular las deflexiones de sólo uno o unos cuantos puntos de la viga. Su uso requiere un elevado nivel de comprensión del principio de momentos y de las técnicas de preparar diagramas de momento flexionante. El método de integración sucesiva tal vez es el más general, y se puede usar para resolver casi cualquier combinación de cargas y condiciones de apoyo en vigas estáticamente determinadas. Su uso requiere la capacidad de escribir las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante y de derivar las ecuaciones de la pendiente y la

deflexión de una viga por medio del cálculo integral. El método de integración sucesiva produce ecuaciones para la pendiente y la deflexión en toda la viga y permite la determinación directa del punto de máxima deflexión. Algunas fórmulas publicadas se desarrollaron con el método de integración sucesiva o el método del área de momento.

Existen varios programas de análisis de vigas asistidos por computadora que reducen el tiempo y el cálculo requeridos para determinar la deflexión de vigas. Si bien aligeran la carga de trabajo del diseñador, se recomienda que se entiendan los principios en los que están basados antes de utilizarlos.

Después de terminar el estudio de este capítulo, el lector será capaz de:

1. Entender la necesidad de considerar las deflexiones de vigas.
2. Entender el desarrollo de las relaciones entre el patrón de carga y los apoyos en una viga y la deflexión de ésta.
3. Mostrar con una gráfica las relaciones entre las curvas de carga, fuerza cortante, momento flexionante, pendiente y deflexión de vigas.
4. Usar fórmulas estándar para calcular la deflexión de vigas en puntos seleccionados.
5. Usar el principio de superposición junto con fórmulas estándar para resolver problemas de mayor complejidad.
6. Desarrollar fórmulas de la deflexión de vigas para ciertos casos con el método de integración sucesiva.
7. Aplicar el método de integración sucesiva a vigas que poseen una amplia variedad de condiciones de carga y apoyo.
8. Usar el método del área de momento para determinar la pendiente y la deflexión de vigas.
9. Escribir programas de cómputo que sirvan de ayuda al utilizar los diversos métodos de análisis de vigas descritos en este capítulo.

La organización del capítulo permite una cobertura selectiva. En general, toda la información necesaria para usar cada uno de los métodos se incluye en esa parte del capítulo. Una excepción es que se requiere la comprensión del método de la fórmula antes de usar el método de superposición.

## 12-2 LA NECESIDAD DE CONSIDERAR LAS DEFLEXIONES DE VIGAS

El huso de un torno o prensa taladradora y el árbol de una fresadora portan herramientas de corte para maquinarse metales. La deflexión del huso o del árbol tendría un efecto adverso en la precisión de la máquina. El tipo de carga y apoyo de estos elementos de máquina indican que son vigas, y el procedimiento para calcular su deflexión se analizará en este capítulo.

El equipo de precisión para medición también se debe diseñar para que sea rígido. La deflexión provocada por la aplicación de las fuerzas de medición reduce la precisión de la medición deseada.

Las flechas transmisoras de potencia que portan engranes deben ser suficientemente rígidas para garantizar que los dientes de los engranes se traben adecuadamente. La deflexión excesiva de las flechas tendería a separar los engranes compañeros, lo que haría que el punto de contacto entre los dientes de los engranes no fuera el óptimo. La

generación de ruido, la reducción en la capacidad de transmitir potencia y el desgaste incrementado serían el resultado. Para engranes rectos, se recomienda que el movimiento entre dos engranes no sea de más de 0.005 plg (0.13 mm). Este límite es la *suma* del movimiento de las dos flechas que portan los engranes acoplados en el lugar donde van montados.

Los pisos de edificios deben ser suficientemente rígidos para soportar las cargas esperadas. Los ocupantes del edificio no deben notar las deflexiones del piso. Las máquinas y otros equipos requieren un piso estable para su funcionamiento adecuado. Las vigas que soportan cielos rasos enyesados no se deben deflexionar en exceso para que no se agriete el yeso. La deflexión a menudo se limita a 1/360 veces el claro de la viga que soporta un cielo raso.

Los bastidores de vehículos, máquinas formadoras de metal, aparatos automáticos y equipo de proceso también deben poseer suficiente rigidez para garantizar el funcionamiento adecuado del equipo soportado por el bastidor. La cabeza de un torno, la corona de una prensa punzonadora, la estructura de un mecanismo de ensamble automático y el chasis de un camión son algunos ejemplos.

Las oscilaciones de las piezas de una estructura o máquina provocan vibración. La tendencia a vibrar a una cierta frecuencia y la severidad de las vibraciones son funciones de la flexibilidad de las piezas. Desde luego, flexibilidad es un término usado para describir el punto al cual se deflexiona una pieza por la acción de una carga. Los problemas de vibración pueden resolverse *incrementando o disminuyendo* la rigidez de una pieza, según las circunstancias. En uno u otro caso, es importante entender cómo se calculan las deflexiones de vigas.

**Límites de deflexión recomendados.** Es responsabilidad del diseñador especificar la máxima deflexión permisible de una viga de máquina, chasis o estructura. El conocimiento de la aplicación debe servir de guía. En ausencia de esta guía, en las referencias 2 y 3 se sugieren los límites siguientes:

Pieza general de máquina:	$y_{\max} = 0.0005$ a $0.003$ plg/plg o mm/mm de longitud de viga.
Precisión moderada:	$y_{\max} = 0.00001$ a $0.0005$ plg/plg o mm/mm de longitud de viga.
Alta precisión:	$y_{\max} = 0.000001$ a $0.00001$ plg/plg o mm/mm de longitud de viga.

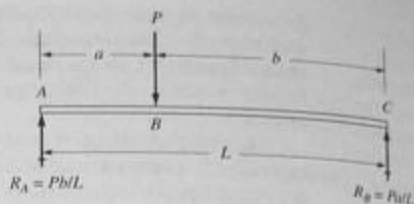
## 12-3 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS

Para describir de manera gráfica la condición de una viga que soporta un patrón de carga, se usan cinco diagramas, como se muestra en la figura 12-1. Ya se usaron los primeros tres diagramas en capítulos anteriores de este libro. El *diagrama de carga* es el diagrama de cuerpo libre en el cual se muestran todas las cargas externas y las reacciones en los apoyos. A partir de éste, se desarrolló el *diagrama de fuerza cortante*, el cual permite calcular los esfuerzos cortantes en cualquier sección de una viga. El *diagrama de momento flexionante* es una curva de la variación del momento flexionante con la posición en la viga incluidos los resultados utilizados para calcular el esfuerzo causado por flexión. El eje horizontal de estas curvas es la posición en la viga, llamada  $x$ . Se acostumbra medir  $x$  con respecto al extremo izquierdo de la viga, aunque se puede usar cualquier punto de referencia.

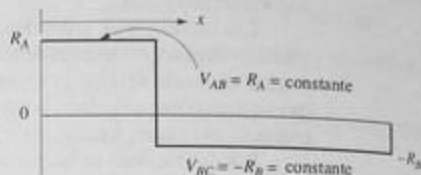
**Diagrama de deflexión.** Los últimos dos diagramas tienen que ver con la deformación de la viga sometida a las cargas. Conviene comenzar el análisis con el último diagrama.



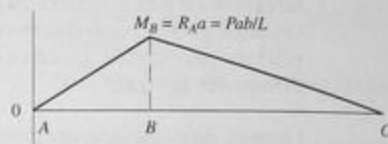
Viga con carga



Fuerza cortante,  $V$



Momento flexionante,  $M$



Pendiente,  $\theta$

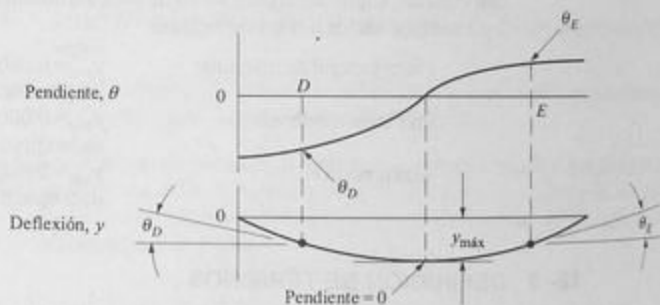


FIGURA 12-1 Cinco diagramas de una viga.

ma, el *diagrama de deflexión*, porque muestra la forma de la viga deflexionada. De hecho, ésta es la curva de la posición del eje neutro de la viga con respecto a su posición inicial. Se considera que la posición inicial es la línea recta entre los dos puntos de apoyo. La cantidad de deflexión se llamará  $y$ , con los valores positivos medidos hacia arriba. Las vigas típicas que soportan cargas dirigidas hacia abajo, como las de la figura 12-1, experimentan deflexiones dirigidas hacia abajo (negativas).

**Diagrama de la pendiente.** Una línea trazada tangente a la curva de deflexión en un punto de interés define la pendiente de la curva de deflexión en dicho punto. La pendiente se indica como el ángulo  $\theta$ , medido en radianes con respecto a la horizontal, como se muestra en la figura 12-1. La representación gráfica de la pendiente como una función de la posición en la viga es la *curva de la pendiente*, dibujada bajo la curva del momento flexionante y sobre la curva de la deflexión. Nótese en la viga dada que la pendiente de la porción izquierda de la curva de la deflexión es negativa y la de la porción derecha es positiva. El punto donde la línea tangente es horizontal es el punto de pendiente cero y define la ubicación de la deflexión máxima. Esta observación se usará en el análisis del método del área de momento y del método de integración sucesiva, más adelante en este capítulo.

**Radio de curvatura.** La figura 12-2 muestra el radio de curvatura,  $R$ , en un punto particular. En vigas prácticas, la curvatura es mínima, lo que produce un valor de  $R$  muy grande. Por conveniencia, la forma de la curva de la deflexión se exageró para poder visualizar los principios y las variables implicadas en el análisis. Recuerdese que según la geometría analítica el radio de curvatura en un punto es perpendicular a la línea trazada tangente a la curva en dicho punto.

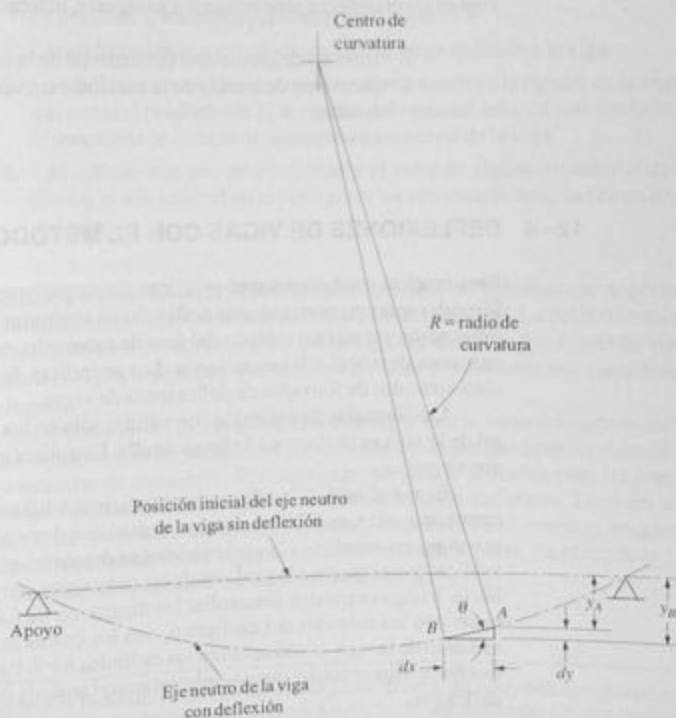


FIGURA 12-2 Ilustración del radio de curvatura y pendiente de la curva de deflexión de una viga.

La relación entre pendiente y deflexión también se ilustra en la figura 12-2. A lo largo de una pequeña distancia  $dx$ , la deflexión cambia una pequeña cantidad  $dy$ . Una pequeña parte de la curva de la deflexión en sí completa el triángulo rectángulo del cual se define:

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad (12-1)$$

El valor absoluto de  $\theta$  será muy pequeño porque la curvatura de la viga es mínima. Entonces, se puede sacar provecho de la observación de que, para ángulos pequeños,  $\tan \theta = \theta$ . Por tanto:

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (12-2)$$

Por consiguiente, se puede concluir que:

*La pendiente de la curva de la deflexión en un punto es igual a la razón del cambio de la deflexión al cambio de posición en la viga.*

**Rigidez de una viga,** Más adelante se demostrará que la cantidad de deflexión de una viga es inversamente proporcional a su *rigidez*, indicada por el producto  $EI$ , en donde:

$E$  = módulo de elasticidad del material de la viga

$I$  = momento de inercia de la sección transversal de la viga con respecto al eje neutro

## 12-4 DEFLEXIONES DE VIGAS CON EL MÉTODO DE LA FÓRMULA

Para muchas configuraciones prácticas de cargas y apoyos de vigas, se han derivado fórmulas que permiten calcular deflexión en cualquier punto de una viga. El método de integración sucesiva o método del área de momento, más adelante descritos, se pueden usar para desarrollar las ecuaciones. Los apéndices A-22, A-23 y A-24 incluyen muchos ejemplos de fórmulas de deflexiones de vigas.

Las fórmulas de deflexión son válidas sólo en los casos donde la sección transversal de la viga es uniforme a lo largo de ella. La aplicación de las fórmulas se demostrará con ejemplos.

El apéndice A-22 incluye diez condiciones diferentes de carga sobre vigas simplemente apoyadas, es decir, vigas que cuentan con dos y sólo dos apoyos simples. Algunas son vigas en voladizo. Con anterioridad se demostró que las vigas como éstas se pueden analizar con respecto a los valores de las reacciones con las ecuaciones estándar de equilibrio. Luego se pueden desarrollar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante con los métodos del capítulo 6, con los cuales se puede completar el análisis del esfuerzo de la viga, como se vio en los capítulos 8 y 9. Para evaluar la aceptabilidad de un diseño de viga se tendrá que completar tanto el análisis del esfuerzo como el análisis de la deflexión.

Las condiciones de carga en el apéndice A-22 incluyen cargas concentradas únicas, dos cargas concentradas, una variedad de cargas distribuidas y un caso con un momento concentrado. El momento concentrado se podría desarrollar como en los ejemplos

de la sección 6-8. La línea tenue delgada en los diagramas es un bosquejo de la forma de la viga deflexionada, un tanto exagerada. Ésta sirve para visualizar dónde se pueden esperar los puntos críticos de deflexión.

Téngase cuidado cuando se roten las cargas y las dimensiones en los diagramas de deflexión de vigas. Es esencial que la viga real que se va a analizar concuerde con la forma general de un caso dado y que se identifiquen con precisión las variables empleadas en las fórmulas a la derecha de los diagramas. En la mayoría de los casos, se dan fórmulas para la deflexión máxima anticipada, para las deflexiones en los extremos voladizos y para las deflexiones en puntos de aplicación de cargas concentradas. Algunos casos incluyen fórmulas para la deflexión en un punto cualquiera seleccionado.

Nótese la forma general de las fórmulas de deflexión. Mientras que algunas son más complejas que otras, se pueden observar las siguientes características generales. La comprensión de estas observaciones sirve para tomar buenas decisiones cuando se diseñan vigas.

1. La variable  $y$  denota las deflexiones, las cuales son el cambio de posición del eje neutro de la viga desde su condición sin carga hasta la condición cargada final, medidas perpendiculares al eje neutro original.
2. Las deflexiones hacia arriba son positivas; hacia abajo son negativas.
3. La variable  $x$ , cuando se utiliza, denota la posición horizontal en la viga, medida a partir de uno de los apoyos. En algunos casos, se indica una segunda variable de posición  $v$ , medida a partir del otro apoyo.
4. Las deflexiones son proporcionales a la carga aplicada a la viga.
5. Las deflexiones son inversamente proporcionales a la rigidez de la viga, definidas como el producto de  $E$ , la rigidez del material del cual está hecha la viga, e  $I$ , el momento de inercia de la sección transversal de la viga.
6. Las deflexiones son proporcionales al cubo de alguna dimensión de longitud crítica, por lo general en el claro entre los apoyos o la longitud de un extremo en voladizo.

El apéndice A-23 incluye cuatro casos de vigas en voladizo que soportan cargas concentradas, cargas distribuidas o un momento concentrado. La deflexión máxima obviamente ocurre en el extremo libre de la viga. El extremo fijo limita la viga contra rotación en el apoyo de modo que la curva de la deflexión tiene una pendiente cero en dicho lugar.

El apéndice A-24 incluye diez casos de vigas *estáticamente indeterminadas*. Este término significa que las reacciones no se pueden calcular con la aplicación de las ecuaciones estándar de equilibrio. Por consiguiente, se dan fórmulas para las reacciones y momentos flexionantes clave juntos con fórmulas de la deflexión. También se dan las formas de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante y, en general, son bastante diferentes de los de vigas estáticamente determinadas. En el capítulo 13 se amplía el tema de la vigas estáticamente indeterminadas.

#### Ejemplo 12-1

Determine la deflexión máxima de una viga simplemente apoyada que porta un cilindro hidráulico de una máquina utilizada para insertar bujes a presión en una pieza fundida, como se muestra en la figura 12-3. La fuerza ejercida durante la operación de prensado es de 15 kN. La viga es rectangular, de 25 mm de espesor y 100 mm de altura, y está hecha de acero.

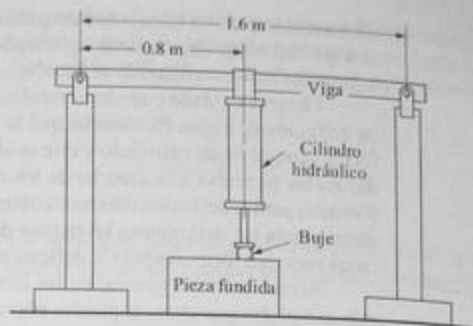


FIGURA 12-3 Viga del ejemplo 12-1.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular la deflexión máxima de la viga dada.
<b>Datos</b>	<b>Datos</b>	El sistema mostrado en la figura 12-3. Carga = $P = 15 \text{ kN}$ . Claro = $L = 1.60 \text{ m}$ . Sección transversal de la viga: 25 mm de ancho por 100 mm de altura. Viga de acero.
<b>Análisis</b>	<b>Análisis</b>	La viga dada se puede considerar como una viga simplemente apoyada con una fuerza concentrada aplicada dirigida hacia arriba en su centro. Este problema corresponde al caso a del apéndice A-22.
<b>Resultados</b>	<b>Resultados</b>	Con la fórmula del apéndice A-22-a, se determina la deflexión máxima como sigue:

$$y = \frac{PL^3}{48EI}$$

En el apéndice A-13, para acero,  $E = 207 \text{ GPa} = 207 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ . Para la viga rectangular:

$$I = \frac{(25)(100)^3}{12} = 2.083 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Por tanto:

$$y = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{(15 \times 10^3 \text{ N})(1.6 \text{ m})^3}{48(207 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(2.083 \times 10^6 \text{ mm}^4)} \times \frac{(10^3 \text{ mm})^3}{\text{m}^3}$$

$$y = 2.97 \text{ mm}$$

**Comentario**

Ésta es una deflexión relativamente elevada que podría tener un efecto adverso en la precisión de la operación de montaje del buje. Se debe considerar un perfil de viga más rígido (uno con un mayor momento de inercia,  $I$ ). Por otra parte, el sistema de apoyo se podría modificar con el objeto de disminuir el claro entre los apoyos, una solución deseable porque la deflexión es proporcional al cubo de la longitud. Si se supone que la operación general del sistema permite reducir el claro a la mitad del claro dado (0.80 m), la deflexión sería de sólo 0.37 mm, 1/8 la del diseño dado.

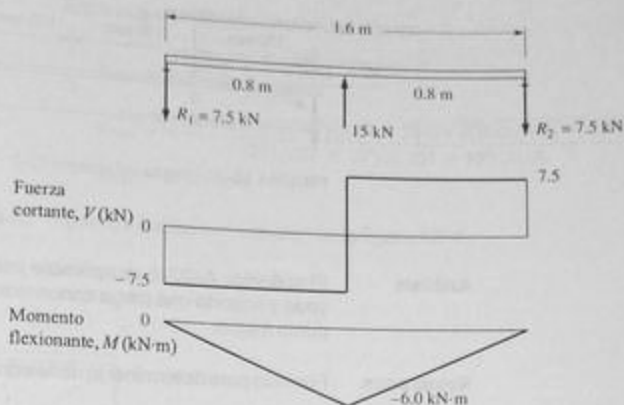


FIGURA 12-4 Diagramas de la viga del ejemplo 12-1.

El esfuerzo en la viga también debe calcularse para evaluar la seguridad del diseño. La figura 12-4 muestra los diagramas de carga, de fuerza cortante y de momento flexionante del diseño original de la viga con los que se determinó que el máximo momento flexionante en la viga es de  $M = 6.00 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Para calcular el esfuerzo se puede usar la fórmula de la flexión.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{(6.00 \text{ kN}\cdot\text{m})(50 \text{ mm})}{2.083 \times 10^6 \text{ mm}^4} \cdot \frac{10^3 \text{ N}}{\text{kN}} \cdot \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 144 \text{ MPa}$$

Éste es un nivel de esfuerzo relativamente alto. Para continuar el análisis, observe que la viga se vería sometida a un esfuerzo flexionante repetido. Por consiguiente, el esfuerzo de diseño recomendado es:

$$\sigma_d = s_u/8$$

Con  $\sigma_d = \sigma$ , se puede resolver para la resistencia última requerida.

$$s_u = 8 \sigma = (8)(144 \text{ MPa}) = 1152 \text{ MPa}$$

Si se consulta el apéndice A-13 en busca de las propiedades de aceros seleccionados, se podría especificar el acero AISI 4140 OQT 900 cuya resistencia última es de 1281 MPa. Pero éste es acero tratado al calor, bastante caro. Un rediseño del tipo de viga analizado para limitar la deflexión reduciría el esfuerzo y permitiría el uso de un acero más barato.

**Ejemplo 12-2** Una flecha circular, de 45 mm de diámetro, soporta una carga de 3500 N, como se muestra en la figura 12-5. Si la flecha es de acero, calcule la deflexión en el punto de aplicación de la carga y en el punto C, a 100 mm del extremo derecho de la flecha. Calcule también la máxima deflexión.

**Solución** **Objetivo** Calcular la deflexión en los puntos B y C y en el punto donde ocurre la máxima deflexión.

**Datos** La viga mostrada en la figura 12-5. Carga =  $P = 3500 \text{ N}$   
La viga es una flecha circular;  $D = 45 \text{ mm}$ . Viga de acero.

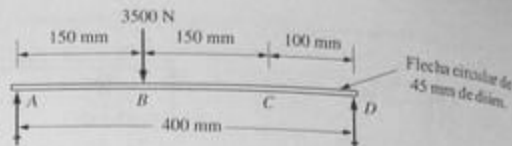


FIGURA 12-5 Flecha del ejemplo 12-2.

### Análisis

El apéndice A-22-b es aplicable porque la viga está simplemente apoyada y soporta una carga concentrada única en un punto alejado del punto medio.

### Resultados

Fórmula para determinar la deflexión en el punto B donde actúa la carga.

$$y_B = \frac{-Pa^2b^2}{3EIL}$$

Observe que la dimensión  $a$  es el segmento largo entre la carga y el apoyo;  $b$  es el corto. Expresar todos los datos en N y mm.

Datos:  $L = 400 \text{ mm}$ ;  $a = 250 \text{ mm}$ ;  $b = 150 \text{ mm}$

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi (45 \text{ mm})^4}{64} = 0.201 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$E = \frac{207 \times 10^9 \text{ N}}{\text{m}^2} \times \frac{1 \text{ m}^2}{(10^3 \text{ mm})^2} = 207 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

Ahora bien:

$$y_B = \frac{-Pa^2b^2}{3EIL} = \frac{-(3500)(150)^2(250)^2}{3(207 \times 10^3)(0.201 \times 10^6)(400)} = -0.0965 \text{ mm}$$

Fórmula para determinar la deflexión en el punto C: Observe que el punto C está en el segmento largo. Se aplican los datos anteriores. Además  $x = 100 \text{ mm}$  del apoyo derecho al punto C.

$$y_C = \frac{-Pbx}{6EIL} (L^2 - b^2 - x^2)$$

$$y_C = \frac{-(3500)(150)(100)}{6(207 \times 10^3)(0.201 \times 10^6)(400)} (400^2 - 150^2 - 100^2)$$

$$y_C = -0.0670 \text{ mm}$$

Máxima deflexión: El apéndice A-22 indica que la máxima deflexión ocurre en el segmento largo de la viga a una distancia  $x_1$  del apoyo en donde:

$$x_1 = \sqrt{a(L+b)/3} = \sqrt{(250)(400+150)/3} = 214 \text{ mm}$$

Entonces la deflexión en dicho punto es:

$$y_{\max} = \frac{-Pab(L+b)\sqrt{3a(L+b)}}{27(EIL)}$$

$$y_{\max} = \frac{-(3500)(250)(150)(400+150)\sqrt{3(250)(400+150)}}{(27)(207 \times 10^3)(0.201 \times 10^6)(400)}$$

$$y_{\max} = 0.103 \text{ mm}$$

**Comentario** Los resultados se muestran en la figura 12-6.

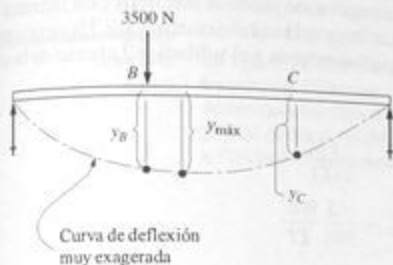


FIGURA 12-6 Curva de deflexión de la viga del ejemplo 12-2.

## 12-5 SUPERPOSICIÓN MEDIANTE FÓRMULAS DE DEFLEXIÓN

Fórmulas como las que se usaron en la sección precedente están disponibles para un sinnúmero de casos de condiciones de carga y apoyo. Obviamente, estos casos permitirían la solución de muchos problemas prácticos de deflexión de vigas. Un número aún mayor de situaciones se puede manejar con el uso del *principio de superposición*.

Si un patrón particular de carga y apoyo se puede separar en componentes, de modo que cada componente sea como uno de los casos para el cual se dispone de una fórmula, entonces la deflexión total en un punto de la viga es igual a la suma de las deflexiones provocadas por cada componente. La deflexión provocada por una carga componente se *superpone* a las deflexiones provocadas por las demás cargas, por lo que recibe el nombre de *superposición*.

En la figura 12-7 se muestra un ejemplo en donde se puede aplicar el principio de superposición. En la figura se muestra una viga que soporta una carga de techo uniforme-

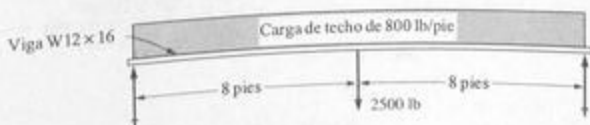


FIGURA 12-7 Viga de techo.



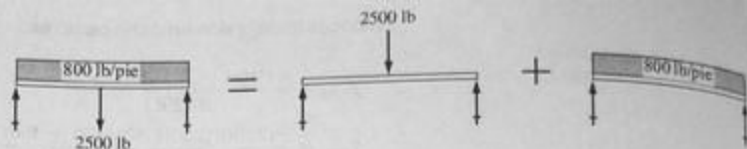


FIGURA 12-8 Ilustración del principio de superposición.

mente distribuida de 800 lb/pie y también una parte de un equipo de proceso que produce una carga concentrada a la mitad. La figura 12-8 muestra la manera en que las cargas se consideran por separado. Cada carga componente produce una deflexión máxima a la mitad. Por consiguiente, la deflexión máxima total también ocurrirá allí. Hagamos que el subíndice 1 se refiera al caso de la carga concentrada y el subíndice 2 al caso de la carga distribuida. Por tanto:

$$y_1 = \frac{-PL^3}{48EI}$$

$$y_2 = \frac{-5}{384} \frac{WL^3}{EI}$$

La deflexión total será:

$$y_T = y_1 + y_2$$

Los términos  $L$ ,  $E$  e  $I$  serán los mismos para ambos casos.

$$L = 16 \text{ pies} \times 12 \text{ plg/pie} = 192 \text{ plg}$$

$$E = 30 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2 \text{ para acero}$$

$$I = 103 \text{ plg}^4 \text{ para viga W12} \times 16$$

Para calcular  $y_1$ , sea  $P = 2500 \text{ lb}$ .

$$y_1 = \frac{-2500(192)^3}{48(30 \times 10^6)(103)} \text{ plg} = -0.119 \text{ plg}$$

Para calcular  $y_2$ ,  $W$  es la resultante total de la carga distribuida.

$$W = (800 \text{ lb/pie})(16 \text{ pies}) = 12\,800 \text{ lb}$$

Por consiguiente:

$$y_2 = \frac{-5(12\,800)(192)^3}{384(30 \times 10^6)(103)} \text{ plg} = -0.382 \text{ plg}$$

y:

$$y_T = y_1 + y_2 = -0.119 \text{ plg} - 0.382 \text{ plg} = -0.501 \text{ plg}$$

Como ésta es la deflexión total, se podría verificar para ver si cumple con la recomendación de que la máxima deflexión debe ser menor que 1/360 veces el claro de la viga. El claro es  $L$ .

$$\frac{L}{360} = \frac{192 \text{ plg}}{360} = 0.533 \text{ plg}$$

La deflexión calculada fue de 0.501 plg, la cual es satisfactoria.

El principio de superposición es válido para cualquier lugar de la viga, no sólo en los puntos de aplicación de las cargas. El ejemplo siguiente ilustra lo anterior.

### Ejemplo 12-3

La figura 12-9 muestra una flecha con dos engranes simplemente apoyada en sus extremos en cojinetes. Los engranes acoplados de arriba ejercen fuerzas dirigidas hacia abajo que tienden a separar los engranes. Otras fuerzas que actúan en dirección horizontal no se consideran en este análisis. Determine la deflexión total en los engranes  $B$  y  $C$  si la flecha es de acero y su diámetro es de 45 mm.

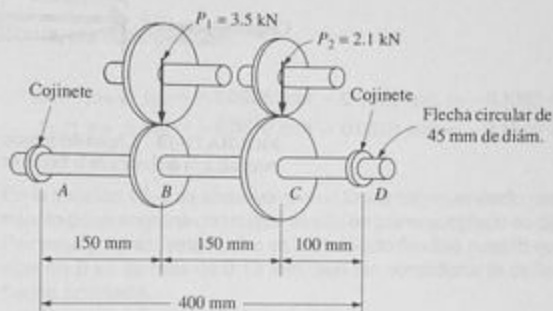


FIGURA 12-9 Flecha del ejemplo 12-3.

### Solución Objetivo

Calcular la deflexión en los puntos  $B$  y  $C$ .

### Datos

La flecha  $ABCD$  mostrada en la figura 12-9. La flecha es de acero.  $D = 45$  mm. La carga en  $B = P_1 = 3.5 \text{ kN} = 3500 \text{ N}$ . La carga en  $C = P_2 = 2.1 \text{ kN} = 2100 \text{ N}$ .

### Análisis

Las dos cargas asimétricamente colocadas constituyen una situación para la cual ninguno de los casos dados de fórmulas de deflexión de vigas es válido. Sin embargo, se puede resolver utilizando dos veces las fórmulas del apéndice A-22-b. Considerando cada carga por separado, se pueden determinar las deflexiones en  $B$  y  $C$  correspondientes a cada una. La deflexión total, por tanto, sería la suma de las deflexiones componentes. La figura 12-10 muestra la lógica de la cual se deduce:

$$y_B = y_{B1} + y_{B2}$$

$$y_C = y_{C1} + y_{C2}$$

en donde:  $y_B$  = deflexión total en  $B$   
 $y_C$  = deflexión total en  $C$

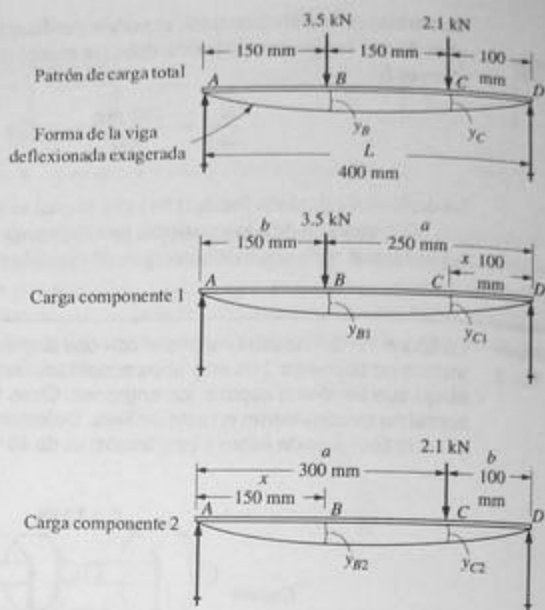


FIGURA 12-10 Lógica del principio de superposición para determinar la deflexión de la flecha de la figura 12-9.

$y_{B1}$  = deflexión en B provocada por la carga de 3.5 kN sola

$y_{C1}$  = deflexión en C provocada por la carga de 3.5 kN sola

$y_{B2}$  = deflexión en B provocada por la carga de 2.1 kN sola

$y_{C2}$  = deflexión en C provocada por la carga de 2.1 kN sola

Para todos los cálculos, se requieren los valores de  $E$ ,  $I$  y  $L$ . Éstos son los mismos del ejemplo 12-2.

$$E = 207 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$I = 0.201 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$L = 400 \text{ mm}$$

El producto de  $EIL$  aparece en todas las fórmulas.

$$EIL = (207 \times 10^3)(0.201 \times 10^6)(400) = 16.64 \times 10^{12}$$

A continuación se calcularán las deflexiones componentes individuales. Observe que los valores de las variables  $a$ ,  $b$  y  $x$  son diferentes para cada una de las cargas componentes. Véanse los datos marcados en la figura 12-10.

**Resultados**

Para el componente 1:

$$y_{B1} = \frac{-P_1 a^2 b^2}{3EIL} = \frac{-(3.5 \times 10^3)(250)^2(150)^2}{3(16.64 \times 10^{12})} = -0.0985 \text{ mm}$$

$$y_{C1} = \frac{-P_1 bx}{6EIL} (L^2 - b^2 - x^2)$$

$$y_{C1} = \frac{-(3.5 \times 10^3)(150)(100)}{6(16.64 \times 10^{12})} (400^2 - 150^2 - 100^2) = -0.0670 \text{ mm}$$

Para el componente 2, la carga será de 2.1 kN en el punto C. Entonces:

$$y_{B2} = \frac{-P_2 bx}{6EIL} (L^2 - b^2 - x^2)$$

$$y_{B2} = \frac{-(2.1 \times 10^3)(100)(150)}{6(16.64 \times 10^{12})} (400^2 - 100^2 - 150^2) = -0.0402 \text{ mm}$$

$$y_{C2} = \frac{-P_2 a^2 b^2}{3EIL} = \frac{-(2.1 \times 10^3)(300)^2(100)^2}{3(16.64 \times 10^{12})} = -0.0378 \text{ mm}$$

Ahora, por superposición:

$$y_B = y_{B1} + y_{B2} = -0.0985 \text{ mm} - 0.0402 \text{ mm} = -0.1387 \text{ mm}$$

$$y_C = y_{C1} + y_{C2} = -0.0670 \text{ mm} - 0.0378 \text{ mm} = -0.1048 \text{ mm}$$

**Comentario** En la sección 12-2 se observó que un límite recomendado para el movimiento de un engrane con respecto a su engrane acoplado es de 0.13 mm. Por consiguiente, esta flecha es demasiado flexible puesto que la deflexión en B es de más de 0.13 mm, aun sin considerar la deflexión de la flecha acoplada.

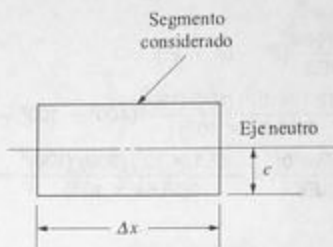
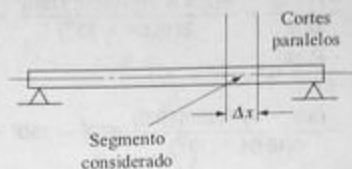
## 12-6 PRINCIPIOS BÁSICOS PARA DETERMINAR LA DEFLEXIÓN EN VIGAS CON EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN SUCESIVA

En esta sección se muestran las relaciones matemáticas entre las curvas de momento, pendiente y deflexión con las cuales se pueden resolver las ecuaciones reales para una viga dada sometida a una condición de carga y sustentación dada.

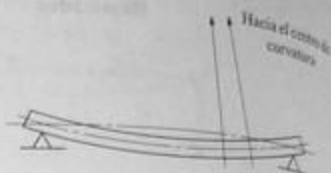
La figura 12-11 muestra un pequeño segmento de una viga en su forma inicial recta y en su forma deflexionada. Los lados del segmento permanecen rectos al deflexionarse la viga, pero giran con respecto a un punto del eje neutro. Esto produce compresión en la cara superior del segmento y tensión en la cara inferior, un hecho empleado en el desarrollo de la fórmula de la flexión en el capítulo 8.

Los lados girados del segmento se intersecan en el centro de curvatura y forman el pequeño ángulo  $d\theta$ . Nótese también el radio de curvatura,  $R$ , medido del centro de curvatura al eje neutro. Por la geometría mostrada en la figura:

$$\Delta s = R(d\theta) \quad (12-3)$$



(a) Segmento de una viga recta



(b) Segmento de una viga deflexionada

FIGURA 12-11 Relación entre el radio  $R$  y la deformación  $\delta$

y:

$$\delta = c(d\theta) \quad (12-4)$$

en donde  $\Delta s$  es la longitud del segmento en el eje neutro y  $\delta$  es el alargamiento de la línea de base del segmento que ocurre a medida que la viga se deflexiona. El término  $c$  tiene el mismo significado que el de la fórmula de la flexión, la distancia del eje neutro a la fibra más externa de la sección.

Recuérdese que la definición del eje neutro establece que en ese lugar no ocurre deformación. Por esta razón la longitud  $\Delta s$  en el segmento de la viga deflexionada es igual a la longitud  $\Delta x$  en el segmento no deflexionado, y la ecuación (12-3) se puede escribir:

$$\Delta x = R(d\theta) \quad (12-5)$$

Ahora las ecuaciones (12-4) y (12-5) se pueden resolver para  $d\theta$ .

$$d\theta = \frac{\delta}{c}$$

$$d\theta = \frac{\Delta x}{R}$$

Igualando estos valores de  $d\theta$  entre sí se obtiene:

$$\frac{\delta}{c} = \frac{\Delta x}{R}$$

Otra forma de esta ecuación es:

$$\frac{c}{R} = \frac{\delta}{\Delta x}$$

El lado derecho de esta ecuación se ajusta a la definición de deformación unitaria,  $\epsilon$ . Por tanto:

$$\epsilon = \frac{c}{R} \quad (12-6)$$

Con anterioridad se demostró que:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

donde  $\sigma$ , el esfuerzo causado por flexión, se puede calcular con la fórmula de la flexión:

$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

Por consiguiente:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{Mc}{EI}$$

Combinando esta ecuación con la ecuación (12-6) se obtiene:

$$\frac{c}{R} = \frac{Mc}{EI}$$

Dividiendo ambos términos entre  $c$  da:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \quad (12-7)$$

La ecuación (12-7) es útil en el desarrollo del método del área de momento para determinar deflexiones de vigas. Véase la sección 12-8.

En la geometría analítica, el recíproco del radio de curvatura,  $1/R$ , se define como *curvatura*, denotada por  $\kappa$  (letra griega minúscula kappa). Por tanto:

$$\kappa = \frac{M}{EI} \quad (12-8)$$

La ecuación (12-8) indica que la curvatura aumenta a medida que se incrementa el momento flexionante, lo cual parece lógico. Asimismo, la curvatura disminuye a medida que se incrementa la rigidez,  $EI$ , de la viga.

Otro principio de geometría analítica establece que si la ecuación de una curva se expresa como  $y = f(x)$ , esto es,  $y$  es una función de  $x$ , entonces la curvatura es:

$$\kappa = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (12-8)$$

Al combinar las ecuaciones (12-8) y (12-9) se obtiene:

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (12-10)$$

o:

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (12-11)$$

Las ecuaciones (12-10) y (12-11) son útiles en el desarrollo del método de integración sucesiva para determinar deflexiones de vigas, descrito a continuación.

## 12-7 DEFLEXIÓN DE VIGAS—MÉTODO DE INTEGRACIÓN SUCESIVA—ENFOQUE GENERAL

A continuación se presentará un enfoque general que permite determinar la deflexión en cualquier punto de una viga. Las ventajas de este enfoque se dan a continuación.

1. El resultado es un conjunto de ecuaciones para determinar la deflexión en todas las partes de la viga. La deflexión en cualquier punto se puede determinar entonces sustituyendo las propiedades de rigidez de la viga,  $E$  e  $I$ , y la posición de la viga.
2. Los datos se obtienen con facilidad con los cuales se puede trazar la curva de la deflexión.
3. Se desarrollan las ecuaciones para la *pendiente* de la viga en cualquier punto. Ésta es importante en algunas aplicaciones de maquinaria tales como flechas sobre cojinetes y flechas que portan engranes. Una pendiente excesiva de la flecha ocasionaría un desempeño deficiente y una vida corta de los cojinetes o engranes.
4. Las relaciones fundamentales entre las cargas, el tipo de apoyos, las propiedades de rigidez de la viga, la pendiente y las deflexiones se recalcan en el procedimiento de solución. El diseñador que las entienda puede hacer diseños más eficientes.
5. El método requiere la aplicación de sólo conceptos matemáticos simples.

6. El punto donde ocurre la máxima deflexión se puede determinar de manera directa con las ecuaciones resultantes.

El fundamento del método de integración sucesiva se desarrolló en las secciones 12-3 y 12-6. Se prepararán los cinco diagramas de la viga, tal como se muestran en la figura 12-1, para correlacionar las cargas, las fuerzas cortantes, los momentos flexionantes, las pendientes y las deflexiones a lo largo de la viga.

Los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante se trazan utilizando los principios del capítulo 6. Luego se derivan ecuaciones para el momento flexionante en todos los segmentos del diagrama de momento flexionante.

La ecuación (12-11) entonces se utiliza para desarrollar las ecuaciones para la pendiente y deflexión a partir de las ecuaciones de momento integrando dos veces con respecto a la posición,  $x$ , en la viga, como sigue.

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (12-11)$$

Ahora, integrando una vez con respecto a  $x$  se obtiene:

$$\int M dx = EI \int \frac{d^2x}{dx^2} dx = EI \frac{dy}{dx} \quad (12-12)$$

Con anterioridad, en la sección 12-3, ecuación (12-2), se demostró que  $dy/dx = \theta$ , la pendiente de la curva de la deflexión. Por esta razón:

$$\int M dx = EI\theta = \theta EI \quad (12-13)$$

La ecuación (12-12) se puede integrar de nuevo, para obtener:

$$\int EI\theta dx = EI \int \frac{dy}{dx} dx = Ely = yEI \quad (12-14)$$

Una vez que los valores finales de  $EI\theta$  y  $Ely$  se han determinado, se dividen entre la rigidez de la viga,  $EI$ , para obtener los valores de la pendiente,  $\theta$ , y la deflexión,  $y$ .

Los pasos indicados por las ecuaciones (12-11) a (12-14) se tienen que completar para cada segmento de la viga donde el diagrama de momento es continuo. Además, como el objetivo es obtener ecuaciones discretas para la pendiente y la deflexión en el caso de patrones de carga-viga particulares, se tendrá que evaluar una constante de integración por cada integración realizada.

El desarrollo de las ecuaciones para el momento flexionante contra la posición a menudo se logra integrando las ecuaciones para la fuerza cortante contra  $x$ , como se muestra en el capítulo 6. Esto se desprende de la regla de que el cambio del momento flexionante entre dos puntos de una viga es igual al área bajo la curva de la fuerza cortante entre los mismos dos puntos.



El método paso a paso utilizado para determinar la deflexión de vigas utilizando el enfoque general es el siguiente.

**Pasos del método de integración sucesiva para determinar deflexiones de vigas**

1. Determine las reacciones en los apoyos de la viga.
2. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante utilizando los procedimientos presentados en el capítulo 6, e identifique las magnitudes en los puntos críticos.
3. Divida la viga en segmentos en los que el diagrama de fuerza cortante es continuo identificando los puntos donde ocurren cambios repentinos con las letras, *A, B, C, D*, etcétera.
4. Escriba ecuaciones para la curva de la fuerza cortante en cada segmento. En la mayoría de los casos, éstas serán ecuaciones de líneas rectas, es decir, ecuaciones que incluyen  $x$  a la primera potencia. En ocasiones, como en el caso de vigas que soportan cargas concentradas, la ecuación será simplemente de la forma:

$$V = \text{constante}$$

5. Para cada segmento, realice el proceso:

$$M = \int V dx + C$$

Para evaluar la constante de integración que vincula la ecuación de momento con los valores particulares ya conocidos del diagrama del momento, inserte condiciones limitantes conocidas y resuelva para  $C$ .

6. Para cada segmento, realice el proceso:

$$\theta EI = \int M dx + C$$

La constante de integración generada aquí no se puede evaluar directamente de inmediato. Así pues cada constante se tiene que identificar por separado por medio de un subíndice como sigue:  $C_1, C_2, C_3$ , etc. Luego, cuando se evalúen (en el paso 9), se pueden poner en sus lugares apropiados.

7. Para cada segmento, realice el proceso:

$$yEI = \int \theta EI dx + C$$

De nuevo, las constantes se deben identificar con subíndices.

8. Establezca *condiciones de frontera* para los diagramas de la pendiente y la deflexión. Las condiciones de frontera se deben identificar de la misma manera que las constantes desconocidas de los pasos 6 y 7. Las condiciones de frontera expresan matemáticamente los valores especiales de la pendiente y deflexión en ciertos puntos y el hecho de que tanto la curva de

la pendiente como la curva de la deflexión sean continuas. Las condiciones de frontera típicas son:

- La deflexión de la viga en cada apoyo es cero.
  - La deflexión de la viga en el extremo de un segmento es igual a la deflexión de la viga al principio del siguiente segmento. Esto se desprende del hecho de que la curva de la deflexión es continua, es decir, no experimenta cambios repentinos.
  - La pendiente de la viga en el extremo de un segmento es igual a la pendiente al principio del siguiente segmento. La pendiente no experimenta cambios bruscos.
  - En el caso especial de una viga en voladizo, su pendiente en el apoyo también es cero.
9. Combine todas las condiciones de frontera para evaluar todas las constantes de integración. Esto en general implica la solución de un conjunto de ecuaciones simultáneas cuyo número de ecuaciones es igual al número de constantes de integración. Los programas de cómputo para solucionar ecuaciones o las calculadoras son muy útiles en este paso.
10. Sustituya las constantes de integración de nuevo en las ecuaciones de la pendiente y la deflexión, y de este modo quedan completas. El valor de la pendiente o la deflexión en cualquier punto se pueden evaluar simplemente con sustituir en la ecuación el valor adecuado de la posición en la viga. También se pueden determinar los puntos de deflexión máxima en cualquier segmento.

A continuación se ilustrará el método con un ejemplo.

#### Ejemplo 12-4

La figura 12-12 muestra una viga utilizada como una parte de la estructura especial de una máquina. La carga de 20 K (20 000 lb) en A y la de 30 K (30 000 lb) en C representan los puntos de apoyo del equipo pesado. Entre los dos apoyos en B y D, la carga uniformemente distribuida de 2 K/pie (2000 lb/pie) se debe a materiales a granel almacenados en un recipiente soportado por la viga. Todas las cargas son estáticas. Para mantener la precisión de los productos producidos por la máquina, la deflexión máxima permisible de la viga debe ser de 0.05 plg. Especifique una viga de acero de patín ancho aceptable, y además verifique el esfuerzo en la viga.

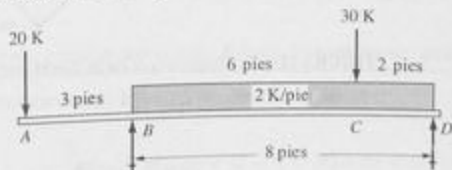


FIGURA 12-12 Viga del ejemplo 12-4.

#### Solución Objetivo

Especificar un perfil de acero de patín ancho para limitar la deflexión a 0.05 plg. Verificar el esfuerzo en la viga seleccionada para garantizar la seguridad.

- Datos** Las cargas sobre la viga mostradas en la figura 12-12.
- Análisis** Se analizará la viga para determinar dónde ocurrirá la deflexión máxima. En seguida se determinará el momento de inercia requerido para limitar la deflexión a 0.05 plg. Se seleccionará una viga de patín ancho cuyo momento de inercia sea el requerido. Se utilizará el procedimiento de diez pasos antes descrito. La solución se presenta en un formato programado. Usted debe ir resolviendo el problema por su cuenta antes de consultar el resultado siguiente.
- Resultados** Los pasos 1 y 2 requieren dibujar diagramas de la fuerza cortante y del momento flexionante. Haga esto ahora, antes de verificar el resultado que se da a continuación.

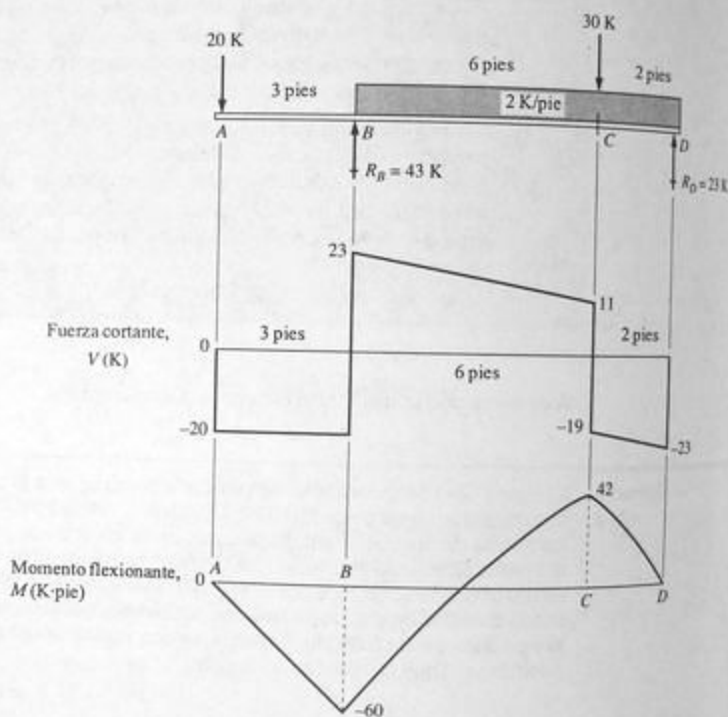


FIGURA 12-13 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante del ejemplo 12-4.

La figura 12-13 muestra los resultados. Ahora prosiga con el paso 3. Se requieren tres segmentos, AB, BC y CD. Éstos son los segmentos donde el diagrama de fuerza cortante es continuo. Ahora prosiga con el paso 4 para obtener las ecuaciones de la curva de la fuerza cortante.

Los resultados son:

$$V_{AB} = -20 \quad (a)$$

$$V_{BC} = -2x + 29 \quad (b)$$

$$V_{CD} = -2x - 1 \quad (c)$$

En los segmentos  $BC$  y  $CD$ , la curva de la fuerza cortante es una línea recta con una pendiente de  $-2$  kip/pie, igual a la carga. Se puede usar cualquier método para escribir las ecuaciones de una línea recta para derivar estas ecuaciones.

Ahora prosiga con el paso 5 del procedimiento.

Se debe contar con lo siguiente para derivar las ecuaciones de los momentos. En primer lugar:

$$M_{AB} = \int V_{AB} dx + C = \int -20 dx + C = -20x + C$$

En  $x = 0$ ,  $M_{AB} = 0$ . Por consiguiente,  $C = 0$  y:

$$M_{AB} = -20x \quad (d)$$

A continuación:

$$M_{BC} = \int V_{BC} dx + C = \int (-2x + 29) dx + C = -x^2 + 29x + C$$

En  $x = 3$ ,  $M_{BC} = -60$ . Por consiguiente,  $C = -138$  y:

$$M_{BC} = -x^2 + 29x - 138 \quad (e)$$

Por último:

$$M_{CD} = \int V_{CD} dx + C = \int (-2x - 1) dx + C = -x^2 - x + C$$

En  $x = 9$ ,  $M_{CD} = 42$ . Por consiguiente,  $C = 132$  y:

$$M_{CD} = -x^2 - x + 132 \quad (f)$$

Ahora prosiga con el paso 6 para obtener las ecuaciones para  $\theta EI$ .

Integrando las ecuaciones de los momentos:

$$\theta_{AB} EI = \int M_{AB} dx + C = \int (-20x) dx + C$$

$$\theta_{AB} EI = -10x^2 + C_1 \quad (g)$$

$$\theta_{BC} EI = \int M_{BC} dx + C = \int (-x^2 + 29x - 138) dx + C$$

$$\theta_{BC} EI = x^3/3 + 14.5x^2 - 138x + C_2 \quad (h)$$

$$\theta_{CD}EI = \int M_{CD} dx + C = \int (-x^2 - x + 132) dx + C$$

$$\theta_{CD}EI = -x^3/3 - x^2/2 + 132x + C_3 \quad (f)$$

Ahora, en el paso 7, integre las ecuaciones (g), (h) e (i) para obtener las ecuaciones de  $yEI$ .

Usted debe tener:

$$y_{AB}EI = \int \theta_{AB}EI dx + C$$

$$y_{AB}EI = -10x^3/3 + C_1x + C_4 \quad (g)$$

$$y_{BC}EI = \int \theta_{BC}EI dx + C$$

$$y_{BC}EI = -x^4/12 + 14.5x^3/3 - 69x^2 + C_2x + C_5 \quad (h)$$

$$y_{CD}EI = \int \theta_{CD}EI dx + C$$

$$y_{CD}EI = -x^4/12 - x^3/6 + 66x^2 + C_3x + C_6 \quad (i)$$

El paso 8 pide que se identifiquen las condiciones de frontera. Se requieren seis, puesto que hay seis constantes de integración desconocidas en las ecuaciones (g) a (i). Escríbalas en este momento.

Considerando los puntos de deflexión cero y la continuidad de la pendiente y de las curvas de la deflexión, se puede escribir:

- |   |   |                              |                                  |
|---|---|------------------------------|----------------------------------|
| 1. En $x = 3$ , $y_{AB}EI = 0$                  | } | deflexión cero en los apoyos |                                  |
| 2. En $x = 3$ , $y_{BC}EI = 0$                  |   |                              |                                  |
| 3. En $x = 11$ , $y_{CD}EI = 0$                 |   |                              |                                  |
| 4. En $x = 9$ , $y_{BC}EI = y_{CD}EI$           | } |                              | curva de deflexión continua en C |
| 5. En $x = 3$ , $\theta_{AB}EI = \theta_{BC}EI$ |   |                              |                                  |
| 6. En $x = 9$ , $\theta_{BC}EI = \theta_{CD}EI$ |   |                              |                                  |

Ahora se pueden sustituir los valores de  $x$  anteriores en las ecuaciones apropiadas y resolverlas para  $C_1$  a  $C_6$ . Primero haga las sustituciones y reduzca las ecuaciones resultantes a la forma que incluye las constantes.

Para las seis condiciones arriba enumeradas, resultan las ecuaciones siguientes:

- |                              |   |
|------------------------------|---|
| 1. $3C_1 + C_4$              | = 90                                    |
| 2. $3C_2 + C_5$              | = 497.25                                |
| 3. $11C_3 + C_6$             | = $-6544.08\overline{33} = -78\,529/12$ |
| 4. $9C_2 - 9C_3 + C_5 - C_6$ | = 7290                                  |
| 5. $C_1 - C_2$               | = -202.5                                |
| 6. $C_2 - C_3$               | = 1215                                  |

El valor del lado derecho de la ecuación 3 está expresado con una precisión excesiva. Esto a menudo no es necesario, pero en este ejemplo se hizo para eliminar la acumulación de errores de redondeo arrastrados en la solución. Existen muchos pasos para llegar a la solución final, y las imprecisiones pueden producir una variación significativa en los resultados que podrían ser frustrantes al proseguir con la solución. Nótese que la escritura de la constante en la ecuación 3 como  $-6544.0833$  indica que los 3 se repiten hasta el infinito. Por esta razón ésta es una representación inherentemente imprecisa del número. Si se introduce el número como la fracción exacta  $(-78529/12)$  en un solucionador de ecuaciones se eliminaría el error. Aquí es donde el uso de un solucionador de ecuaciones basado en la computadora tal como el MATHCAD, el solucionador TK, el MATLAB o el MAPLE facilitan los laboriosos cálculos implicados al final del procedimiento. Muchas calculadoras de alto nivel con capacidad para producir gráficas también contienen solucionadores de ecuaciones simultáneas.

Ahora, resuélvanse las seis ecuaciones simultáneamente para los valores de  $C_1$  a  $C_6$ .

Los resultados son:

$$\begin{aligned} C_1 &= 132.333 = 397/3 & C_2 &= 334.833 = 4018/12 \\ C_3 &= -880.166 = 5281/6 & C_4 &= -307 \text{ (exacto)} \\ C_5 &= -507.25 \text{ (exacto)} & C_6 &= 3137.75 \text{ (exacto)} \end{aligned}$$

Ahora ya se pueden escribir las ecuaciones para  $\theta$  y  $y$ , sustituyendo las constantes en las ecuaciones (g) a (l). Los resultados se dan a continuación.

$$\begin{aligned} \theta_{AB}EI &= -10x^2 + 132.333x \\ \theta_{BC}EI &= -x^3/3 + 14.5x^2 - 138x + 334.833 \\ \theta_{CD}EI &= -x^3/3 - x^2/2 + 132x - 880.166 \\ y_{AB}EI &= -10x^3/3 + 132.333x^2 - 307x \\ y_{BC}EI &= -x^4/12 + 14.5x^3/3 - 69x^2 + 334.833x - 507.25 \\ y_{CD}EI &= -x^4/12 - x^3/6 + 66x^2 - 880.166x + 3137.75 \end{aligned}$$

Con las ecuaciones completas, se puede determinar el punto donde ocurre la deflexión máxima, que es el objetivo primordial del análisis. Basándose en la carga, la forma probable de la viga deflexionada sería como la de la figura 12-14. Por consiguiente, la deflexión máxima podría ocurrir en el punto A al final del extremo saliente, en un punto a la derecha de B (hacia arriba), o en un punto cerca de la carga en C (hacia abajo). Tal vez existan dos puntos de pendiente cero en los puntos E y F, como se muestra en la figura 12-14. Se tendría que saber dónde la ecuación de la pendiente  $\theta_{BC}EI$  es igual a cero con el objeto de determinar dónde ocurre la máxima deflexión.

Nótese que la ecuación es de tercer grado. El uso de una calculadora capaz de producir gráficas y de un solucionador de ecuaciones facilita la localización de los puntos donde  $\theta_{BC}EI = 0$ . La figura 12-15 muestra una gráfica ampliada del segmento BC de la viga en la que se ve que los puntos cero ocurren en  $x = 3.836$  pies y en  $x = 8.366$  pies.

Ahora se pueden determinar los valores de  $yEI$  en los puntos A, E y F para indagar cuál es el mayor.

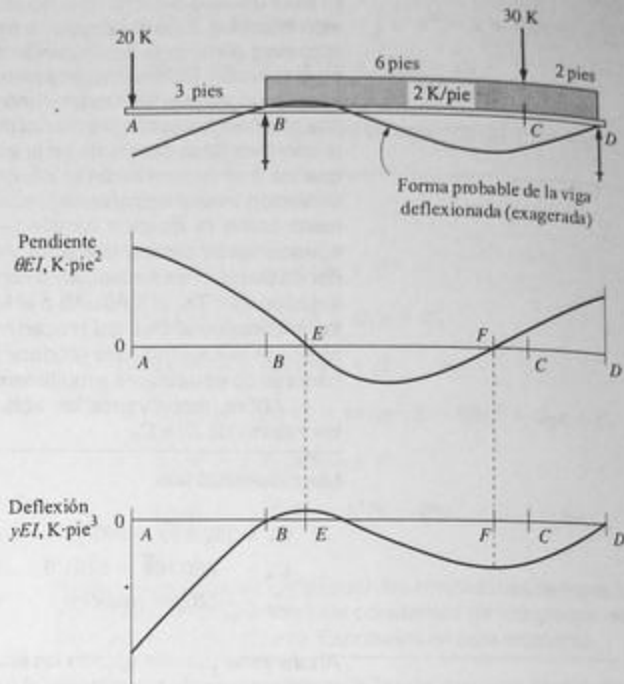


FIGURA 12-14 Curvas de pendiente y deflexión del ejemplo 12-4.

**Punto A.** En  $x = 0$  en el segmento AB:

$$y_{AB} EI = -10x^3/3 + 132.333x - 307$$

$$y_A EI = -10(0.00)^3/3 + 132.333(0.00) - 307$$

$$y_A EI = -307 \text{ K-pie}^3$$

**Punto E.** En  $x = 3.836$  pies en el segmento BC:

$$y_{BC} EI = -x^4/12 + 14.5x^3/3 - 69x^2 + 334.833x - 507.25$$

$$y_E EI = -(3.836)^4/12 + 14.5(3.836)^3/3 - 69(3.836)^2 + 334.833(3.836) - 507.25$$

$$y_E EI = +16.62 \text{ K-pie}^3$$

**Punto F.** En  $x = 8.366$  pies en el segmento BC:

$$y_{BC} EI = -x^4/12 + 14.5x^3/3 - 69x^2 + 334.833x - 507.25$$

$$y_F EI = -(8.366)^4/12 + 14.5(8.366)^3/3 - 69(8.366)^2 + 334.833(8.366) - 507.25$$

$$y_F EI = +113.5 \text{ K-pie}^3$$

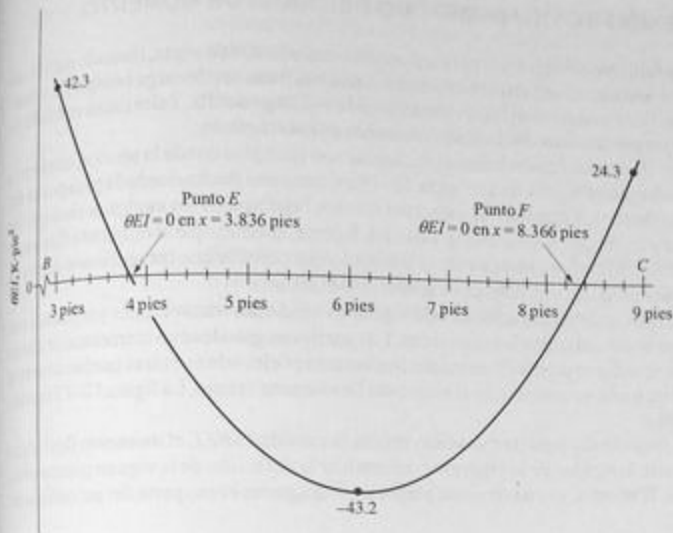


FIGURA 12-15 Gráfica que muestra los puntos de pendiente cero.

El valor máximo ocurre en el punto A, de modo que es el punto crítico. Se debe seleccionar una viga que limite la deflexión en A a 0.05 plg o menos.

$$y_A EI = -307 \text{ K}\cdot\text{pie}^3$$

Sea  $y_A = -0.05$  plg. Entonces el  $I$  requerido es:

$$\begin{aligned} I &= \frac{-308 \text{ K}\cdot\text{pie}^3}{E y_A} \times \frac{1000 \text{ lb}}{\text{K}} \times \frac{(12 \text{ plg})^3}{\text{pie}^3} \\ &= \frac{(-307)(1000)(1728) \text{ lb}\cdot\text{plg}^3}{(30 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2)(-0.05 \text{ plg})} = 354 \text{ plg}^4 \end{aligned}$$

Consulte la tabla de vigas de patín ancho y seleccione una viga adecuada.

La viga W18  $\times$  40 es la mejor opción del apéndice A-7 puesto que es la viga más ligera cuyo valor de  $I$  es suficientemente grande. Para esta viga  $I = 612 \text{ plg}^4$ , y el módulo de sección es  $S = 68.4 \text{ plg}^3$ . Ahora calcule el esfuerzo flexionante máximo en la viga.

En la figura 12-15 se ve que el momento flexionante máximo es de 60 K·pie. Luego:

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{60 \text{ K}\cdot\text{pie}}{68.4 \text{ plg}^3} \times \frac{1000 \text{ lb}}{\text{K}} \times \frac{12 \text{ plg}}{\text{pie}} = 10\,526 \text{ psi}$$

Como el esfuerzo permisible para acero estructural sometido a una carga estática es casi de 22 000 psi, la viga seleccionada es segura.



El procedimiento semigráfico para determinar deflexiones de vigas, llamado *método del área de momento*, es útil en problemas que incluyen patrones de carga complejos o cuando la viga tiene una sección transversal variable a lo largo de ella. Tales casos son difíciles de manejar con los otros métodos presentados en este capítulo.

Las flechas de transmisiones mecánicas son ejemplos donde la sección transversal varía a lo largo del miembro. La figura 12-16 muestra una flecha diseñada para portar dos engranes y cojinetes para su ubicación axial. Nótese, además, que el momento flexionante disminuye hacia los extremos de la flecha, lo que permite que las secciones de menor tamaño sean seguras con respecto a esfuerzo flexionante.

En aplicaciones estructurales de vigas, las secciones transversales variables a menudo se usan para abaratar los miembros. Las secciones grandes con momentos de inercia elevados se utilizan donde el momento flexionante es elevado mientras que las secciones de menor tamaño se usan donde el momento flexionante es bajo. La figura 12-17 muestra un ejemplo.

El método del área de momento utiliza la cantidad  $M/EI$ , el momento flexionante dividido entre la rigidez de la viga, para determinar la deflexión de la viga en puntos seleccionados. Entonces, es conveniente preparar tal diagrama como parte del procedimiento

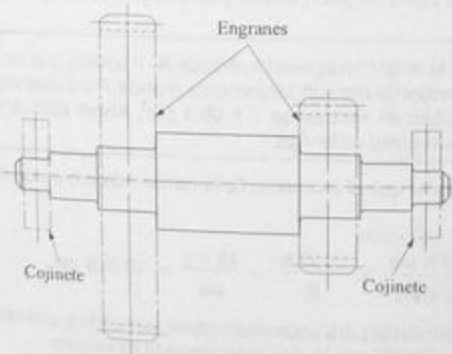


FIGURA 12-16 Flecha de sección transversal variable.

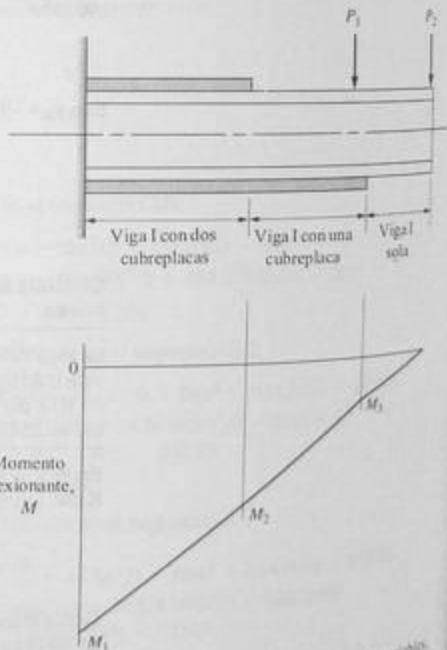


FIGURA 12-17 Viga en voladizo con secciones transversales variables.

de análisis de una viga. Si la viga tiene la misma sección transversal en toda su longitud, el diagrama  $M/EI$  resulta parecido al diagrama de momento flexionante, excepto que sus valores están divididos entre la cantidad  $EI$ . Sin embargo, si el momento de inercia de la sección transversal varía a lo largo de la viga, la forma del diagrama  $M/EI$  será diferente. Éste se muestra en la figura 12-18.

Recuérdese la ecuación (12-10) de la sección 12-6:

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (12-10)$$

Esta fórmula establece la relación entre la deflexión de la viga,  $y$ , como función de la posición,  $x$ , el momento flexionante,  $M$ , y la rigidez de la viga,  $EI$ . El lado derecho de la ecuación se puede reescribir como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right)$$

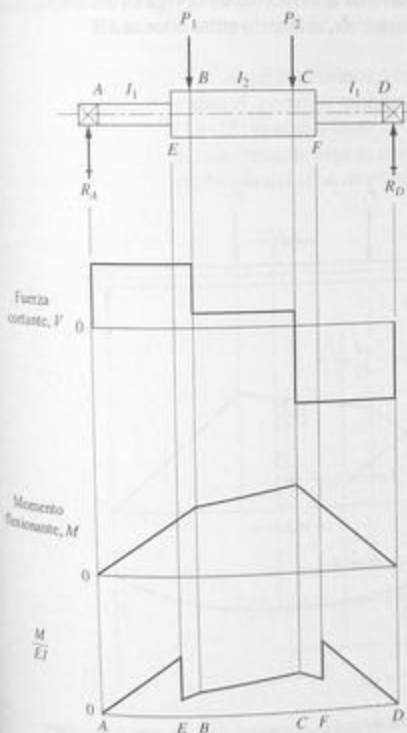


FIGURA 12-18 Ilustraciones de diagramas  $M/EI$  de una viga con secciones transversales variables.

Pero obsérvese que  $dy/dx$  se define como la pendiente de la curva de la deflexión,  $\theta$ , es decir,  $dy/dx = \theta$ . Por tanto:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx}$$

Luego la ecuación (12-10) se puede reescribir:

$$\frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{dx}$$

Resolviéndola para  $d\theta$  da:

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx \quad (12-15)$$

En la figura 12-19 se puede ver la interpretación de la ecuación (12-15) donde el lado derecho  $(M/EI)dx$ , es el área bajo el diagrama  $M/EI$  a lo largo de la pequeña longitud  $dx$ . Por tanto,  $d\theta$  es el cambio del ángulo de la pendiente a lo largo de la misma distancia  $dx$ . Si se trazan líneas tangentes a la curva de la deflexión de la viga en los dos puntos que marcan el principio y el final del segmento  $dx$ , el ángulo entre ellos es  $d\theta$ .

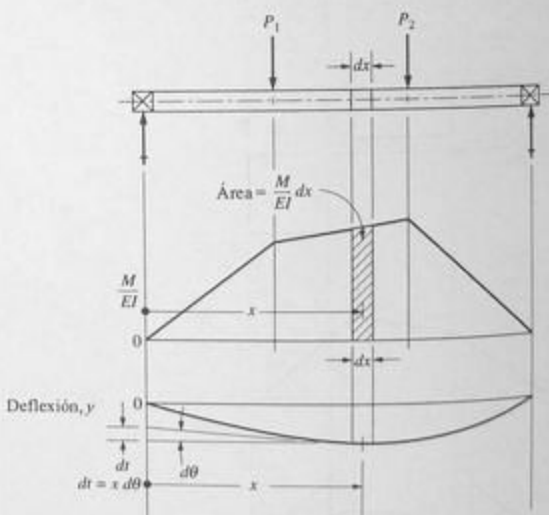


FIGURA 12-19 Principios del método del área de momento para determinar la deflexión de vigas.

El cambio del ángulo  $d\theta$  hace que cambie la posición vertical de un punto a una cierta distancia  $x$  del pequeño elemento  $dx$ , como se muestra en la figura 12-19. Si el cambio de posición vertical se denomina  $dt$ , se puede determinar como sigue:

$$dt = x d\theta = \frac{M}{EI} x dx \quad (12-16)$$

Para determinar el efecto del cambio del ángulo a lo largo de un segmento más grande de la viga, se deben integrar las ecuaciones (12-15) y (12-16) a lo largo del segmento. Por ejemplo, a lo largo del segmento  $A-B$  mostrado en la figura 12-20 con la ecuación (12-15):

$$\int_A^B d\theta = \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (12-17)$$

La última parte de esta ecuación es el área bajo la curva  $M/EI$  entre  $A$  y  $B$ . Ésta es igual al cambio del ángulo de las tangentes en  $A$  y  $B$ ,  $\theta_B - \theta_A$ .

De la ecuación (12-16):

$$\int_A^B dt = t_{AB} = \int_A^B \frac{M}{EI} x dx \quad (12-18)$$

Aquí el término  $t_{AB}$  representa la desviación tangencial del punto  $A$  de la tangente al punto  $B$ , como se muestra en la figura 12-20. Además, el lado derecho de la ecuación (12-18) es el momento del área del diagrama  $M/EI$  entre los puntos  $A$  y  $B$ . En la práctica, el momento del área se calcula multiplicando el área bajo la curva  $M/EI$  por la distancia al centroide del área, mostrada también en la figura 12-20.

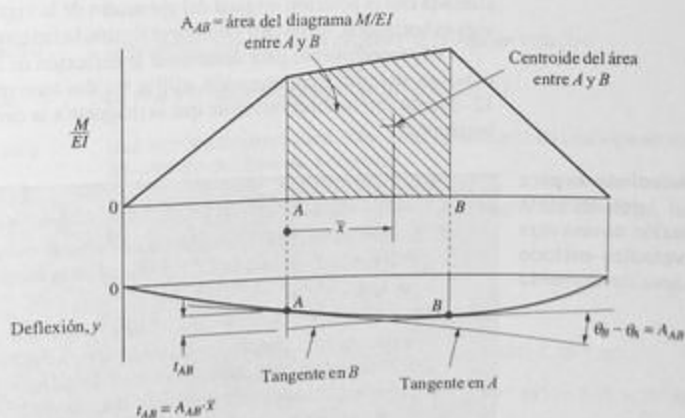


FIGURA 12-20 Ilustración de los dos teoremas del método del área de momento para determinar deflexiones de vigas.

Las ecuaciones (12-17) y (12-18) constituyen el fundamento de los dos teoremas del método del área de momento para determinar deflexiones de vigas. Ellos son:

#### Teorema 1

El cambio del ángulo, en radianes, entre tangentes trazadas en dos puntos  $A$  y  $B$  en la curva de deflexión de una viga, es igual al área bajo el diagrama  $M/EI$  entre  $A$  y  $B$ .

#### Teorema 2

La desviación vertical del punto  $A$  en la curva de deflexión de una viga a partir de la tangente que pasa por otro punto  $B$  de la curva es igual al momento del área bajo la curva  $M/EI$  con respecto al punto  $A$ .

## 12-9 APLICACIONES DEL MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTO

En esta sección se dan varios ejemplos del uso del método del área de momento para determinar la deflexión de vigas. Se desarrollan procedimientos para cada clase de viga según el tipo de carga y apoyos. Las que se consideran son:

1. Vigas en voladizo con una amplia variedad de cargas
2. Vigas simplemente apoyadas simétricamente cargadas
3. Vigas con sección transversal variable
4. Vigas simplemente apoyadas asimétricamente cargadas

**Vigas en voladizo.** La definición de una viga en voladizo incluye el requisito de que esté firmemente sujeta a una estructura de apoyo de tal modo que la viga no pueda girar en el apoyo. Por consiguiente, la tangente a la curva de deflexión en el apoyo siempre está alineada con la posición original del eje neutro de la viga en su estado descargado. Si la viga es horizontal, como casi siempre se ilustra, la tangente también es horizontal.

El procedimiento para determinar la deflexión de cualquier punto de una viga en voladizo, descrito a continuación, utiliza los dos teoremas desarrollados en la sección 12-8 junto con la observación de que la tangente a la curva de deflexión en el apoyo es horizontal.

#### Procedimiento para determinar la deflexión de una viga en voladizo—método del área de momento

1. Dibuje los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante.
2. Divida los valores del momento flexionante entre la rigidez de la viga,  $EI$ , y dibuje el diagrama  $M/EI$ . La unidad de la cantidad  $M/EI$  es (longitud)<sup>-2</sup>, por ejemplo,  $m^{-2}$ ,  $pie^{-2}$  o  $plg^{-2}$ .
3. Calcule el área del diagrama  $M/EI$  y localice su centroide. Si la forma del diagrama no es simple, divídalo en partes y determine el área y el centroide de cada una por separado. Si se desea la deflexión en el extremo de la viga en voladizo, se usa toda el área del diagrama  $M/EI$ . Si se desea la deflexión de otro punto, se usa sólo el área entre el apoyo y el punto de interés.

4. Use el teorema 2 para calcular la desviación vertical del punto de interés de la tangente a la del eje neutro de la viga en el apoyo. Debido a que la tangente coincide con la posición original del eje neutro, la desviación así determinada es la deflexión real de la viga en el punto de interés. Si todas las cargas actúan en la misma dirección, la deflexión máxima ocurre en el extremo de la viga en voladizo.

**Ejemplo 12-5**

Use el método del área de momento para determinar la deflexión en el extremo de la viga de acero en voladizo mostrada en la figura 12-21.

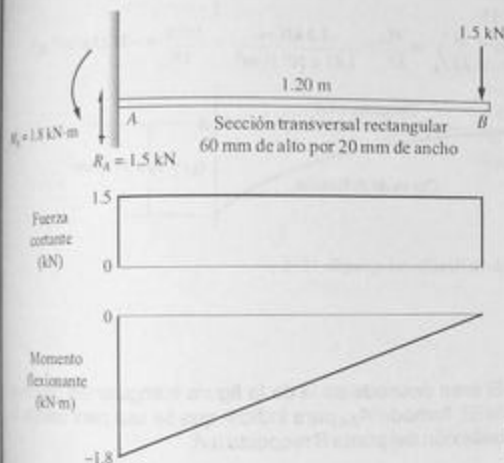


FIGURA 12-21 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante de los ejemplos 12-5 y 12-6.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular la deflexión en el extremo de la viga en voladizo.
	<b>Datos</b>	La viga y la carga mostradas en la figura 12-21.
	<b>Análisis</b>	Use el <i>procedimiento para determinar la deflexión de una viga en voladizo-método del área de momento</i> .
	<b>Resultados</b>	<p><b>Paso 1.</b> La figura 12-21 muestra los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante.</p> <p><b>Paso 2.</b> La rigidez se calcula como sigue:</p>

$$E = 207 \text{ GPa} = 207 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0.02 \text{ m})(0.06 \text{ m})^3}{12} = 3.60 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$EI = (207 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(3.60 \times 10^{-7} \text{ m}^4) = 7.45 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2$$

En la figura 12-22 se dibuja el diagrama  $M/EI$ . Observe que los únicos cambios en el diagrama del momento flexionante son las unidades y los valores porque la rigidez de la viga es constante a lo largo de su longitud.

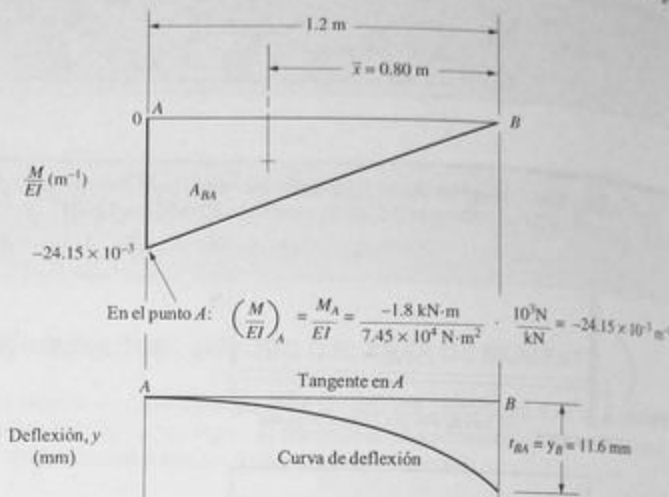


FIGURA 12-22 Curvas  $M/EI$  y de deflexión del ejemplo 12-5.

**Paso 3.** El área deseada es la de la figura triangular del diagrama  $M/EI$ , llamada  $A_{BA}$  para indicar que se usa para calcular la deflexión del punto  $B$  respecto a  $A$ .

$$A_{BA} = (0.5)(24.15 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1})(1.20 \text{ m}) = 14.5 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

El centroide de este área queda a dos tercios de la distancia de  $B$  a  $A$ , 0.80 m.

**Paso 4.** Para poner en práctica el teorema 2, se tiene que calcular el momento del área determinada en el paso 3. Éste es igual a  $t_{BA}$ , la desviación vertical del punto  $B$  a partir de la tangente trazada a la curva de deflexión en el punto  $A$ .

$$t_{BA} = A_{BA} \times \bar{x} = (14.5 \times 10^{-3} \text{ rad})(0.80 \text{ m})$$

$$t_{BA} = y_B = 11.6 \times 10^{-3} \text{ m} = 11.6 \text{ mm}$$

Debido a que la tangente al punto  $A$  es horizontal,  $t_{BA}$  es igual a la deflexión de la viga en su extremo, punto  $B$ .

**Comentario**

Este resultado es idéntico al que se encontraría con la fórmula del caso  $a$  en el apéndice A-23. El valor del método del área de momento es mucho más evidente cuando intervienen varias cargas o cuando la viga en voladizo tiene una sección transversal variable a lo largo de toda su extensión.

**Ejemplo 12-6** Para la misma viga usada en el ejemplo 12-5 y mostrada en la figura 12-21, calcule la deflexión en un punto situado a 1.0 m del apoyo.

**Solución** **Objetivo** Calcular la deflexión a 1.0 m del extremo izquierdo de la viga en voladizo.

**Datos** La viga y la carga mostrada en la figura 12-21.

**Análisis** Use el procedimiento para determinar la deflexión de una viga en voladizo—método del área de momento. Los pasos 1 y 2 del ejemplo 12-5 son idénticos y como resultado dan los diagramas de carga, fuerza cortante, momento flexionante y  $M/EI$  mostrados en las figuras 12-21 y 12-22. El procedimiento de solución prosigue en el paso 3.

**Resultados** **Paso 3.** Este paso cambia porque se usa sólo el área del diagrama  $M/EI$  entre el apoyo y el punto a 1.0 m hacia afuera de la viga, como se muestra en la figura 12-23. Si el punto de interés se denomina punto C, se tiene que calcular  $t_{CA}$ ; es decir, la desviación vertical respecto a la tangente al punto A en el apoyo. El área requerida es un trapecoide y conviene dividirlo en un triángulo y un rectángulo y tratarlos como figuras simples. Por tanto, el cálculo adopta la forma:

$$t_{CA} = A_{CA} \times \bar{x} = A_{CA1} \times x_1 + A_{CA2} \times x_2$$

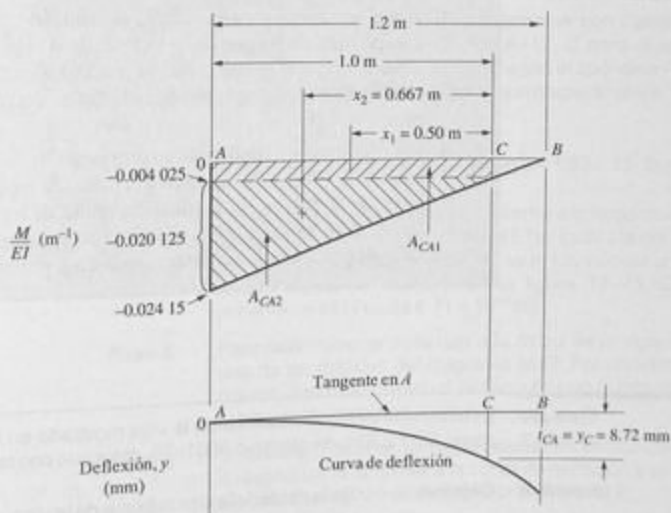


FIGURA 12-23 Curvas  $M/EI$  y de deflexión del ejemplo 12-6.



donde las áreas y las distancias  $x$  se muestran en la figura 12-23. Observe que las distancias se miden del punto  $C$  al centroide del área componente. Así pues:

$$A_{CA1} \times x_1 = (0.004\,025 \text{ m}^{-1})(1.0 \text{ m})(0.50 \text{ m}) = 2.01 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$A_{CA2} \times x_2 = (0.5)(0.020\,125 \text{ m}^{-1})(1.0 \text{ m})(0.667 \text{ m}) = 6.71 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$t_{CA} = y_C = (2.01 + 6.71)(10^{-3}) \text{ m} = 8.72 \text{ mm}$$

Como con anterioridad, como la tangente al punto  $A$  es horizontal, la desviación vertical,  $t_{CA}$ , es la deflexión real del punto  $C$ .

**Vigas simplemente apoyadas y simétricamente cargadas.** Esta clase de problemas tiene la ventaja de que se sabe que la deflexión máxima ocurre a la mitad del claro de la viga. En la figura 12-24 se muestra un ejemplo, donde la viga soporta dos cargas idénticas colocadas a la misma distancia de los apoyos. Naturalmente, cualquier carga para la cual se pueda predecir el punto de deflexión máxima se puede resolver con el procedimiento descrito a continuación.

**Procedimiento para determinar la deflexión de una viga simplemente apoyada y simétricamente cargada—método del área de momento**

1. Dibuje los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante.
2. Divida los valores del momento flexionante entre la rigidez de la viga,  $EI$ , y dibuje el diagrama  $M/EI$ .
3. Si se desea la deflexión máxima a la mitad del claro, use la parte del diagrama  $M/EI$  entre el centro y uno de los apoyos; es decir, la mitad del diagrama.
4. Use el teorema 2 para calcular la desviación vertical del punto en uno de los apoyos de la tangente al eje neutro de la viga a la mitad de ésta. Debido a que la tangente es horizontal y a que la deflexión en el apoyo de hecho es cero, la desviación encontrada es la deflexión real de la viga a la mitad de ésta.
5. Para determinar la deflexión en otro punto de la misma viga, use el área del diagrama  $M/EI$  entre el centro y el punto de interés. Use el teorema 2 para calcular la desviación vertical del punto de interés respecto al punto de deflexión máxima a la mitad de la viga. En seguida, reste esta desviación de la deflexión máxima determinada en el paso 4.

**Ejemplo 12-7**

Determine la deflexión máxima de la viga mostrada en la figura 12-24. La viga es un canal,  $C6 \times 2.834$ , de aluminio 6061-T6, colocado con las patas hacia abajo.

**Solución**

**Objetivo**

Calcular la deflexión máxima de la viga.

**Datos**

La viga y las cargas mostradas en la figura 12-24.

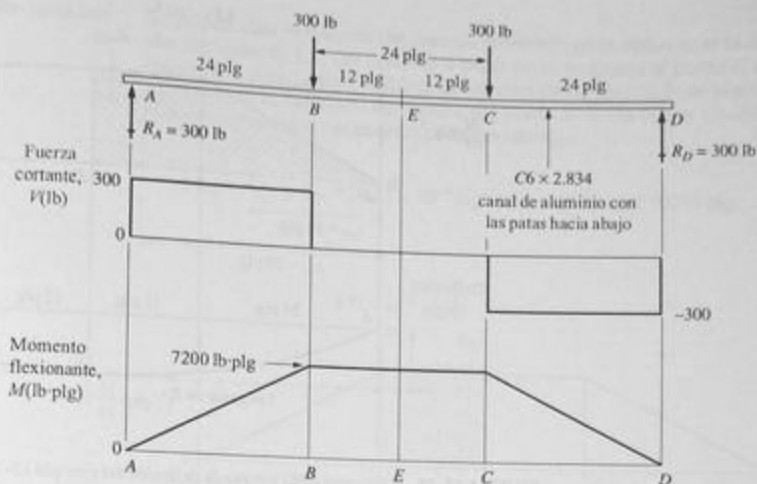


FIGURA 12-24 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante de los ejemplos 12-7 y 12-8.

### Análisis

Use el procedimiento para determinar la deflexión de una viga simplemente apoyada simétricamente cargada—método del área de momento, pasos 1-4. Como el patrón de carga es simétrico, la deflexión máxima ocurrirá a la mitad de la viga.

### Resultados

**Paso 1.** Los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante se muestran en la figura 12-24, preparados de la manera tradicional. El momento flexionante máximo es de 7200 lb·plg entre B y C.

**Paso 2.** La rigidez de la viga,  $EI$ , se determina con datos de los apéndices. Según el apéndice A-17,  $E$  para el aluminio 6061-T6 es de  $10 \times 10^6$  lb/plg<sup>2</sup>. Según el apéndice A-10, el momento de inercia de la canal, con respecto al eje  $Y-Y$ , es de 1.53 plg<sup>4</sup>. Entonces:

$$EI = (10 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2)(1.53 \text{ plg}^4) = 1.53 \times 10^7 \text{ lb·plg}^2$$

Como la rigidez de la viga es uniforme a lo largo de toda su longitud, la forma del diagrama  $M/EI$  es igual a la del diagrama de momento flexionante, aunque los valores son diferentes, como se muestra en la figura 12-25. El valor máximo de  $M/EI$  es de  $4.71 \times 10^{-4}$  plg<sup>-1</sup>.

**Paso 3.** Para determinar la deflexión a la mitad de la viga, se usa una de las mitades del diagrama  $M/EI$ . Por conveniencia, éste se descompone en un rectángulo y un triángulo con el centroide de cada uno mostrado.

**Paso 4.** Se tiene que determinar  $t_{AE}$ , la desviación vertical del punto A respecto a la tangente a la curva de deflexión trazada en el punto E, el centro de la viga. Por el teorema 2:

$$t_{AE} = A_{AE1} \times x_{A1} + A_{AE2} \times x_{A2}$$

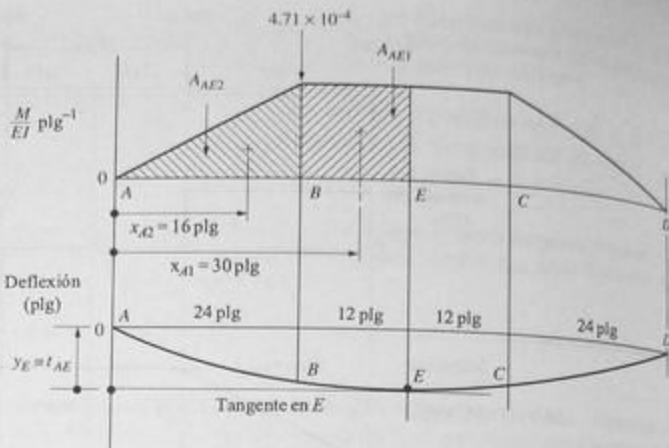


FIGURA 12-25 Diagrama  $M/EI$  y curva de deflexión del ejemplo 12-7.

Los símbolos  $x_{A1}$  y  $x_{A2}$  indican que las distancias a los centroides de las áreas se miden a partir del punto A.

$$A_{AE1} \times x_{A1} = (4.71 \times 10^{-4} \text{ plg}^{-1})(12 \text{ plg})(30 \text{ plg}) = 0.170 \text{ plg}$$

$$A_{AE2} \times x_{A2} = (0.5)(4.71 \times 10^{-4} \text{ plg}^{-1})(24 \text{ plg})(16 \text{ plg}) = 0.090 \text{ plg}$$

$$t_{AE} = y_E = 0.170 + 0.090 = 0.260 \text{ plg}$$

Ésta es la desviación vertical del punto A respecto a la tangente al punto E. Como la tangente es horizontal y como la deflexión real del punto A es cero, ésta representa la deflexión real del punto E respecto a la posición original del eje neutro de la viga.

**Comentario** Este resultado es idéntico al que se determinaría con la fórmula del caso c del apéndice A-22.

**Ejemplo 12-8** Para la misma viga del ejemplo 12-7, mostrada en la figura 12-24, determine la deflexión en el punto B bajo una de las cargas.

**Solución** **Objetivo** Calcular la deflexión en el punto B bajo una de las cargas.

**Datos** La viga y las cargas mostradas en la figura 12-24.

**Análisis** Use el procedimiento para determinar la deflexión de una viga simplemente apoyada simétricamente cargada—método del área de momento, pasos 1-5. Los pasos 1-4 del ejemplo 12-7 son idénticos y dan como resultado los diagramas de carga, fuerza cortante, momento flexionante,  $M/EI$  y deflexión mostrados en las figuras 12-24 y 12-25. El procedimiento de solución prosigue en el paso 5.

## Resultados

Se puede usar el método del área de momento para determinar la desviación vertical,  $t_{BE}$ , del punto  $B$  a partir de la tangente al punto  $E$  a la mitad de la viga. Luego, restándole el valor de  $t_{AE}$  calculado en el ejemplo 12-7 da la deflexión verdadera del punto  $B$ . En la figura 12-26 se muestran los datos necesarios para calcular  $t_{BE}$ .

$$t_{BE} = A_{BE1} \times x_{B1} = (4.71 \times 10^{-4} \text{ plg}^{-1})(12 \text{ plg})(6 \text{ plg}) = 0.034 \text{ plg}$$

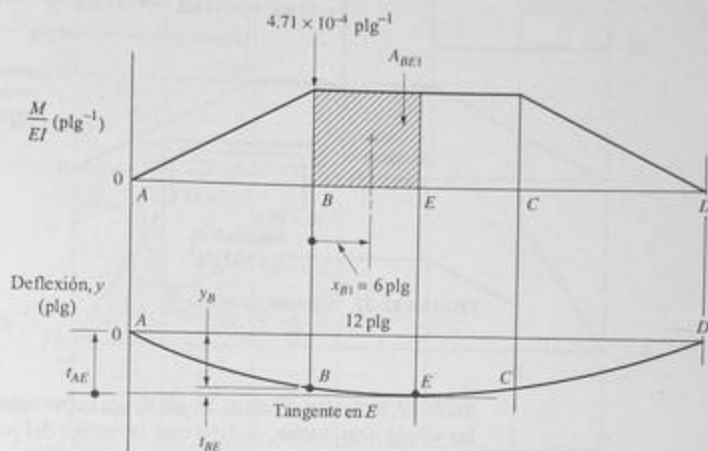


FIGURA 12-26 Diagrama  $M/EI$  y curva de deflexión del ejemplo 12-8.

Observe que la distancia  $x_{B1}$  se debe medir a partir del punto  $B$ . Por tanto, la deflexión del punto  $B$  es:

$$y_B = t_{AE} - t_{BE} = 0.260 - 0.034 = 0.226 \text{ plg}$$

**Vigas con sección transversal variable.** Uno de los usos principales del método del área de momento es para calcular la deflexión de una viga de sección transversal variable a lo largo de su longitud. Se requiere sólo un paso adicional en comparación con las vigas de sección transversal uniforme, como las consideradas hasta ahora.

En la figura 12-27 se muestra un ejemplo de una viga de ese tipo. Nótese que es una modificación de la viga usada en los ejemplos 12-7 y 12-8 mostrada en la figura 12-24. En este caso se agregó una placa rectangular, de 0.25 plg por 6.0 plg, a la parte inferior del canal original a lo largo de 48 plg intermedias de la longitud de la viga. El perfil tubular incrementa la rigidez de manera significativa, por lo que se reduce la deflexión de la viga. El esfuerzo en la viga también se reduciría.

El cambio del procedimiento para analizar la deflexión de la viga radica en la preparación del diagrama  $M/EI$ . La figura 12-28 muestra los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante como antes. En la primera y las últimas 12 plg del diagrama

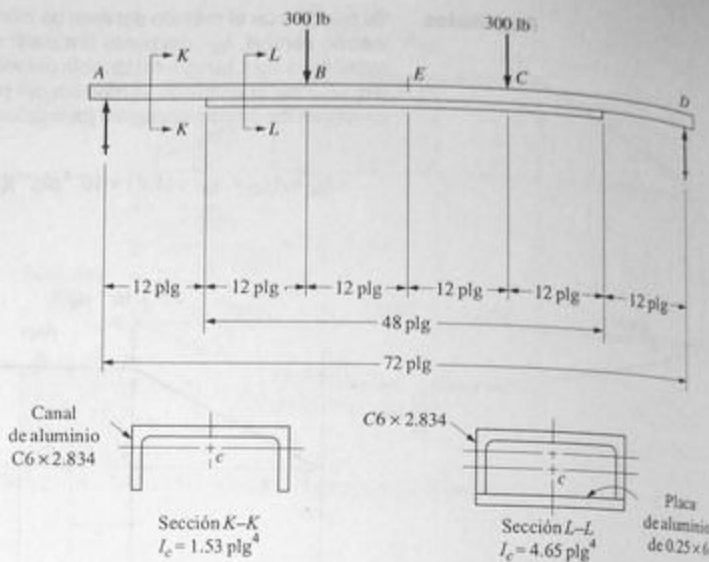


FIGURA 12-27 Viga del ejemplo 12-9.

ma  $M/EI$ , la rigidez del canal simple se usa como antes. Para cada segmento localizado en las 48 plg intermedias, se debe usar la rigidez del perfil tubular. El diagrama  $M/EI$ , por tanto, incluye el efecto del cambio de rigidez a lo largo de la viga.

**Ejemplo 12-9** Determine la deflexión a la mitad de la viga reforzada mostrada en la figura 12-27.

**Solución**

**Paso 1.**

Los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante se preparan de la manera tradicional, como se muestra en la figura 12-28.

**Paso 2.**

Para preparar el diagrama  $M/EI$ , se requieren dos valores de rigidez,  $EI$ . El canal simple tiene el mismo valor usado en los ejemplos previos,  $1.53 \times 10^7 \text{ lb}\cdot\text{plg}^2$ . Para el perfil tubular:

$$EI = (10 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2)(4.65 \text{ plg}^4) = 4.65 \times 10^7 \text{ lb}\cdot\text{plg}^2$$

Por tanto, en el punto de la viga justo antes del punto a 12 plg de A, donde el momento flexionante es de 3600 lb·plg:

$$\frac{M}{EI} = \frac{3600 \text{ lb}\cdot\text{plg}}{1.53 \times 10^7 \text{ lb}\cdot\text{plg}^2} = 2.35 \times 10^{-4} \text{ plg}^{-1}$$

Justo después del punto a 12 plg de A:

$$\frac{M}{EI} = \frac{3600 \text{ lb}\cdot\text{plg}}{4.65 \times 10^7 \text{ lb}\cdot\text{plg}^2} = 7.74 \times 10^{-5} \text{ plg}^{-1}$$

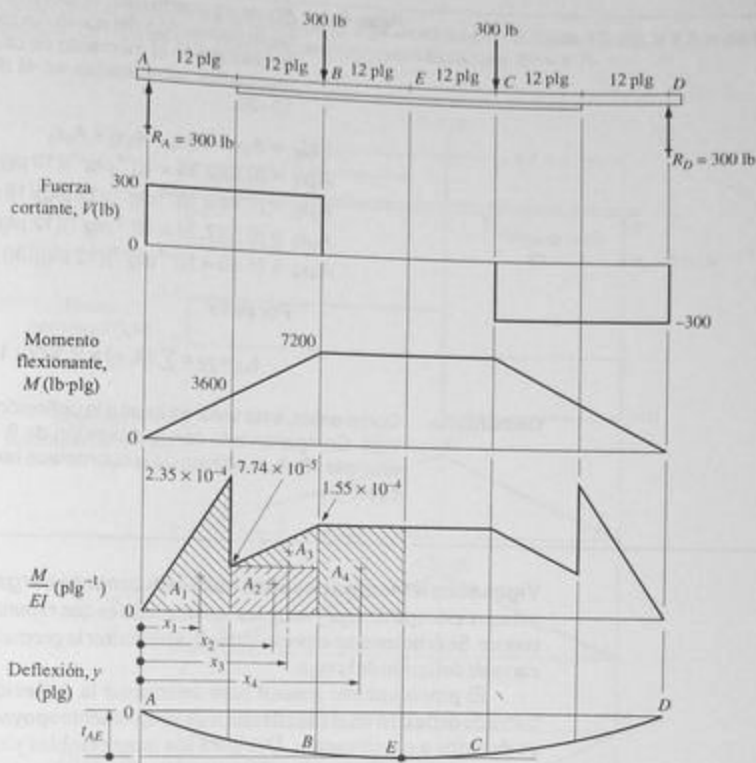


FIGURA 12-28 Diagramas de la viga del ejemplo 12-9.

En el punto B, donde  $M = 7200 \text{ lb}\cdot\text{plg}$  y  $EI = 4.65 \times 10^7 \text{ lb}\cdot\text{plg}^2$ :

$$\frac{M}{EI} = \frac{7200 \text{ lb}\cdot\text{plg}}{4.65 \times 10^7 \text{ lb}\cdot\text{plg}^2} = 1.55 \times 10^{-4} \text{ plg}^{-1}$$

Estos valores establecen los puntos críticos en el diagrama  $M/EI$ .

**Paso 3.**

El área de momento de la mitad izquierda del diagrama  $M/EI$  se usará para determinar el valor de  $t_{AE}$ , como en el ejemplo 12-7. Por conveniencia, el área total se divide en cuatro partes, como se muestra en la figura 12-26, con las ubicaciones de los centroides indicadas con respecto al punto A. Las distancias son:

$$x_1 = \left(\frac{2}{3}\right) (12 \text{ plg}) = 8 \text{ plg}$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{2}\right) (12 \text{ plg}) + 12 \text{ plg} = 18 \text{ plg}$$

$$x_3 = \left(\frac{1}{2}\right) (12 \text{ plg}) + 12 \text{ plg} = 20 \text{ plg}$$

$$x_4 = \left(\frac{2}{3}\right) (12 \text{ plg}) + 24 \text{ plg} = 30 \text{ plg}$$

**Paso 4.** Ahora se puede usar el teorema 2 para calcular el valor de  $t_{AE}$ , la desviación del punto A a partir de la tangente al punto E, calculando el momento de cada una de las cuatro áreas mostradas sombreadas en el diagrama  $M/EI$  de la figura 12-28.

$$t_{AE} = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4$$

$$A_1x_1 = (0.5)(2.35 \times 10^{-4} \text{ plg}^{-1})(12 \text{ plg})(8 \text{ plg}) = 1.128 \times 10^{-2} \text{ plg}$$

$$A_2x_2 = (7.74 \times 10^{-5} \text{ plg}^{-1})(12 \text{ plg})(18 \text{ plg}) = 1.672 \times 10^{-2} \text{ plg}$$

$$A_3x_3 = (0.5)(7.74 \times 10^{-5} \text{ plg}^{-1})(12 \text{ plg})(20 \text{ plg}) = 9.293 \times 10^{-3} \text{ plg}$$

$$A_4x_4 = (1.55 \times 10^{-4} \text{ plg}^{-1})(12 \text{ plg})(30 \text{ plg}) = 5.580 \times 10^{-2} \text{ plg}$$

Por tanto:

$$t_{AE} = y_E = \sum (A_i x_i) = 9.309 \times 10^{-2} \text{ plg} = 0.093 \text{ plg}$$

**Comentario** Como antes, este valor es igual a la deflexión del punto E a la mitad de la viga. Comparándola con la deflexión de 0.260 plg determinada en el ejemplo 12-8, la adición de la cubreplaca redujo la deflexión máxima en casi 64%.

**Vigas simplemente apoyadas asimétricamente cargadas.** La diferencia principal entre este tipo de viga y las antes consideradas es que el punto de deflexión máxima no se conoce. Se debe tener un especial cuidado al describir la geometría del diagrama  $M/EI$  y de la curva de deflexión de la viga.

El procedimiento general para determinar la deflexión en cualquier punto de la curva de deflexión en el caso de una viga simplemente apoyada asimétricamente cargada se describe a continuación. Debido a los innumerables patrones de carga diferentes, la manera específica de aplicar este procedimiento se tiene que ajustar a cualquier problema dado. Se recomienda verificar los principios fundamentales del método del área de momento al terminar de resolver un problema. El método se ilustrará con un ejemplo.

Procedimiento para determinar la deflexión de una viga simplemente apoyada asimétricamente cargada —método del área de momento

1. Dibuje los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante.
2. Construya el diagrama  $M/EI$  y divida el momento flexionante en cualquier punto entre el valor de la rigidez de la viga,  $EI$ , en dicho punto.
3. Bosquee la forma probable de la curva de deflexión. En seguida trace la tangente a la curva de deflexión en uno de los apoyos. Con el teorema 2, calcule la desviación vertical del otro apoyo con respecto a la línea tangente. Se requiere el momento del diagrama  $M/EI$  completo con respecto al segundo apoyo.
4. Utilizando proporciones, calcule la distancia del eje cero a la línea tangente del paso 3 en el punto donde se desea determinar la deflexión.
5. Con el teorema 2, calcule la desviación vertical del punto de interés con respecto a la línea tangente del paso 3. Se usará el momento de la parte del diagrama  $M/EI$  entre el primer apoyo y el punto de interés.
6. Reste la desviación calculada en el paso 5 de la determinada en el paso 4. El resultado es la deflexión de la viga en el punto deseado.

**Ejemplo 12-10**

Determine la deflexión a la mitad de la viga mostrada en la figura 12-29, a 1.0 m de los apoyos. La viga es una viga de acero American Standard, S3 × 5.7.

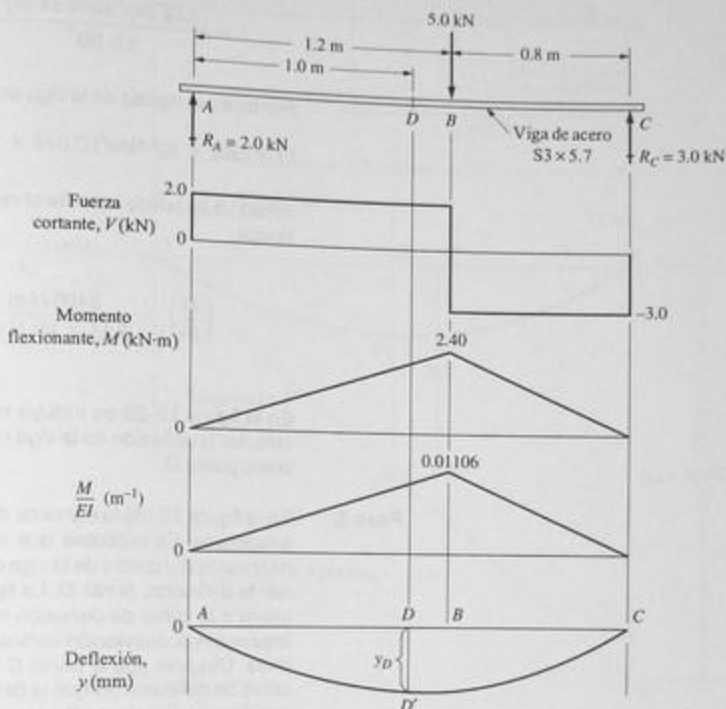


FIGURA 12-29 Viga del ejemplo 12-10.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular la deflexión a la mitad de la viga.
	<b>Datos</b>	La viga y la carga mostrada en la figura 12-29. La viga es de acero. La viga es un perfil American Standard S3 × 5.7
	<b>Análisis</b>	Use el procedimiento para determinar la deflexión de una viga simplemente apoyada asimétricamente cargada—método del área de momento.
<b>Resultados</b>	<b>Paso 1.</b>	En la figura 12-29 se muestran los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante.
	<b>Paso 2.</b>	La rigidez de la viga se mantiene uniforme a lo largo de ella, lo que hace que el diagrama $M/EI$ sea igual al diagrama del momento flexionante. El valor de $M/EI$ en el punto B se puede calcular dividiendo el momento flexionante en ese lugar (2.40 kN·m o 2400 N·m) por $EI$ .



Se utilizará  $E = 207 \text{ GPa}$  para acero. En el apéndice se encuentra  $I = 2.52 \text{ plg}^4$ , y éste se debe convertir en unidades métricas.

$$I = \frac{(2.52 \text{ plg}^4)(0.0254 \text{ m})^4}{1.0 \text{ plg}^4} = 1.049 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Por tanto, la rigidez de la viga es:

$$EI = (207 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(1.049 \times 10^{-6} \text{ m}^4) = 2.17 \times 10^5 \text{ N-m}^2$$

Ahora ya se puede calcular el valor de  $M/EI$  en el punto B de la viga.

$$\left(\frac{M}{EI}\right)_B = \frac{2400 \text{ N-m}}{2.17 \times 10^5 \text{ N-m}^2} = 0.01106 \text{ m}^{-1}$$

En la figura 12-29 se incluye el diagrama  $M/EI$ . Se desea calcular la deflexión de la viga en su punto medio, marcado como punto D.

### Paso 3.

En la figura 12-29 la curva de deflexión de la viga aparece exagerada. Es probable que la deflexión máxima ocurra muy cerca del centro de la viga donde se tiene que determinar la deflexión, punto D. La figura 12-30 muestra la tangente a la curva de deflexión en el punto A en el extremo izquierdo y la desviación vertical del punto C a partir de esta línea. Observe que el punto C es un punto conocido de la curva de deflexión porque la deflexión allí es cero. Ahora se puede usar el teorema 2 para calcular  $t_{CA}$ . Se usa el diagrama  $M/EI$  completo, descompuesto en dos triángulos.

$$t_{CA} = A_{CA1}x_{C1} + A_{CA2}x_{C2}$$

$$A_{CA1}x_{C1} = (0.5)(0.01106 \text{ m}^{-1})(0.8 \text{ m})(0.533 \text{ m}) = 0.002359 \text{ m}$$

$$A_{CA2}x_{C2} = (0.5)(0.01106 \text{ m}^{-1})(1.2 \text{ m})(1.2 \text{ m}) = 0.007963 \text{ m}$$

Por tanto:

$$t_{CA} = 0.002359 + 0.007963 = 0.010322 \text{ m} = 10.322 \text{ mm}$$

### Paso 4.

Use el principio de las proporciones para determinar la distancia  $DD''$  de D a la línea tangente.

$$\frac{t_{CA}}{CA} = \frac{DD''}{AD}$$

o:

$$DD'' = t_{CA} \times \frac{AD}{CA} = (10.322 \text{ mm}) \times \frac{1.0 \text{ m}}{2.0 \text{ m}} = 5.161 \text{ mm}$$

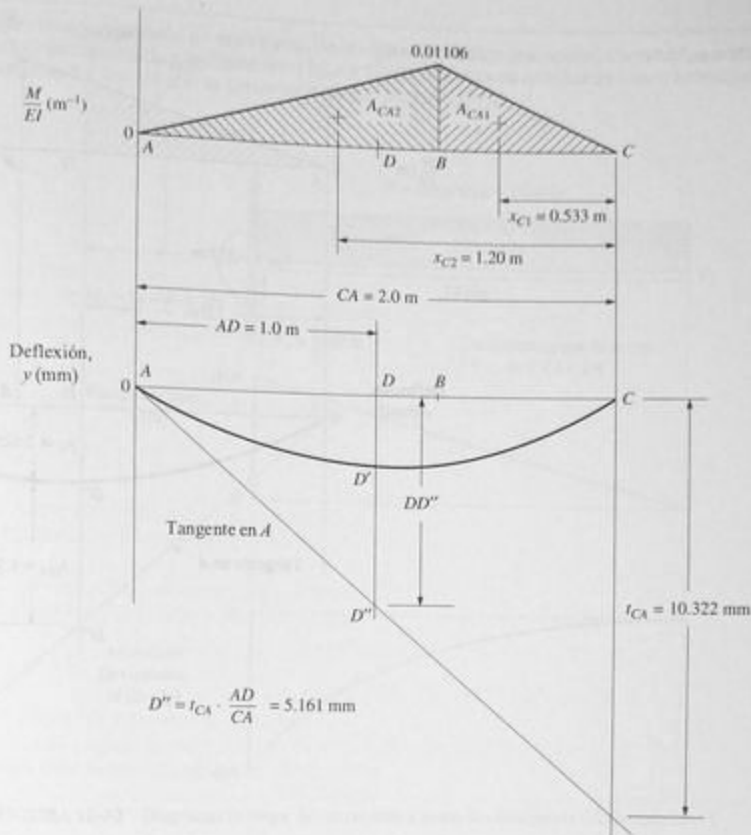


FIGURA 12-30 Diagramas de área de momento del ejemplo 12-10.

**Paso 5.** Calcule la desviación,  $t_{D'A}$ , del punto  $D'$  a partir de la línea tangente al punto A con el teorema 2. Se usa la parte del diagrama  $M/EI$  entre  $D$  y  $A$  como se muestra en la figura 12-31.

$$t_{D'A} = A_{DA} x_{D1} = (0.5)(0.00922 \text{ m}^{-1})(1.0 \text{ m})(0.333 \text{ m}) = 0.001536 \text{ m}$$

$$t_{D'A} = 1.536 \text{ mm}$$

**Paso 6.** Por la geometría del diagrama de deflexión mostrado en la figura 12-31 la deflexión en el punto  $D$ ,  $y_D$ , es:

$$y_D = DD' = DD'' - t_{D'A} = 5.161 - 1.536 = 3.625 \text{ mm}$$

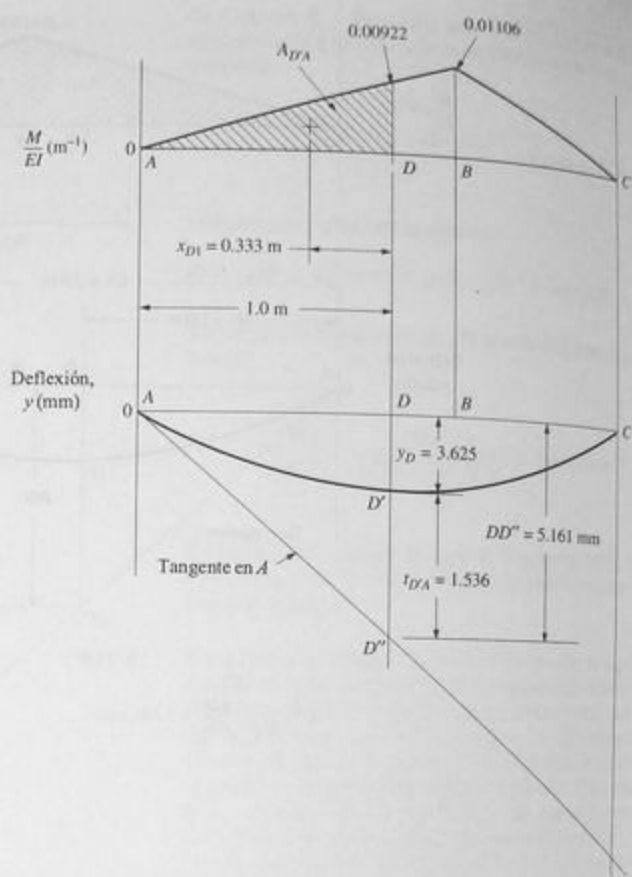


FIGURA 12-31 Diagramas de área de momento del ejemplo 12-10.

## 12-10 VIGAS CON CARGAS DISTRIBUIDAS—MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTO

El procedimiento general para determinar la deflexión de vigas sometidas a cargas distribuidas es el mismo que se demostró para vigas sometidas a cargas concentradas. Sin embargo, la forma de las curvas del momento flexionante y de  $M/EI$  es diferente y requiere el uso de otras fórmulas para calcular el área y la ubicación del centroide que se usan en el método del área de momento. El ejemplo siguiente ilustra las diferencias que cabe esperar.

**Ejemplo 12-11**

Determine la deflexión en el extremo de la viga en voladizo que soporta una carga uniformemente distribuida mostrada en la figura 12-32. La viga es un tubo de acero estructural hueco de  $6 \times 2 \times 1/4$  con la dimensión de 6.0 plg horizontal.

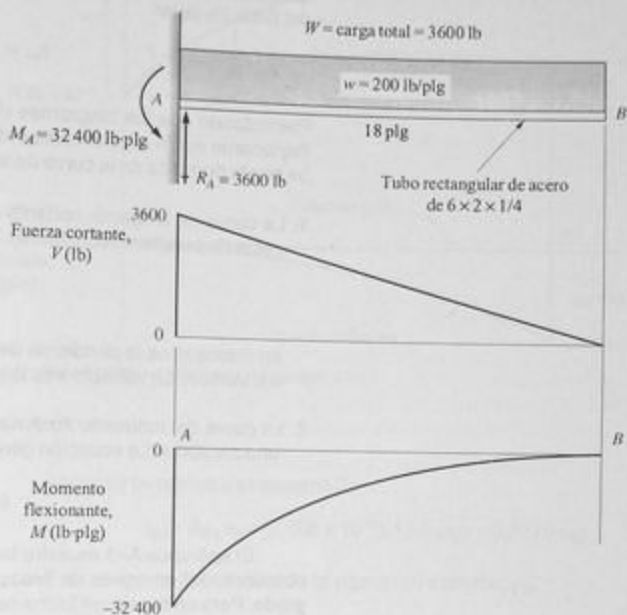


FIGURA 12-32 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante del ejemplo 12-11.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular la deflexión en el extremo de la viga en voladizo.
	<b>Datos</b>	La viga y la carga mostradas en la figura 12-32. La viga es un tubo rectangular de acero, de $6 \times 2 \times 1/4$ , con la dimensión de 6.0 plg horizontal.
	<b>Análisis</b>	Se puede usar el mismo procedimiento básico del ejemplo 12-5.
	<b>Resultados</b>	La solución comienza con la preparación de los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante, mostrados en la figura 12-32. Luego la curva $M/EI$ será igual a la curva del momento flexionante porque la rigidez de la viga es uniforme. En el apéndice A-9 se encuentra $I = 2.31 \text{ plg}^4$ . Por tanto, con $E = 30 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$ , para el acero:

$$EI = (30 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2)(2.31 \text{ plg}^4) = 6.93 \times 10^7 \text{ lb-plg}^2$$

Ahora la figura 12-33 muestra la curva  $M/EI$  junto con la curva de deflexión de la viga. La línea horizontal en el diagrama de deflexión es la

tangente a la forma deflexionada de la viga en el punto A, donde la viga está empotrada. Por tanto, en el extremo derecho de la viga, la desviación de la curva de deflexión de la viga respecto a la tangente,  $t_{BA}$  es igual a la deflexión de la viga.

Utilizando el teorema 2, la desviación  $t_{BA}$  es igual al producto del área de la curva  $M/EI$  entre B y A por la distancia del punto B al centroide del área. Es decir:

$$t_{BA} = A_{BA} \cdot x_B$$

Recordando que los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante están relacionados entre sí de tal modo que la curva de arriba sea la derivada de la curva de abajo, se puede concluir lo siguiente:

1. La curva de la fuerza cortante es una curva de primer grado (línea recta de pendiente constante). Su ecuación es de la forma:

$$V = m \cdot x + b$$

en donde  $m$  es la pendiente de la línea y  $b$  es su intersección con el eje vertical. La variable  $x$  es la posición en la viga.

2. La curva del momento flexionante es una curva de segundo grado, una parábola. La ecuación general de la curva es de la forma:

$$M = a \cdot x^2 + b$$

El apéndice A-1 muestra las relaciones para calcular el área y la ubicación del centroide de áreas delimitadas por curvas de segundo grado. Para un área cuya forma sea la de las curvas del momento flexionante o  $M/EI$ :

$$\text{área} = \frac{L \cdot h}{3}$$

$$x = \frac{L}{4}$$

en donde  $L$  = longitud de la base del área

$h$  = altura del área

$x$  = distancia de un lado del área al centroide

Observe que la distancia correspondiente del vértice de la curva al centroide es:

$$x' = \frac{3L}{4}$$

Ahora, con los datos mostrados en la figura 12-33:

$$A_{BA} = \frac{L \cdot h}{3} = \frac{(18 \text{ plg})(-4.68 \times 10^{-4} \text{ plg}^{-1})}{3} = 2.808 \times 10^{-3}$$

$$x_B = \frac{3L}{4} = \frac{3(18 \text{ plg})}{4} = 13.5 \text{ plg}$$

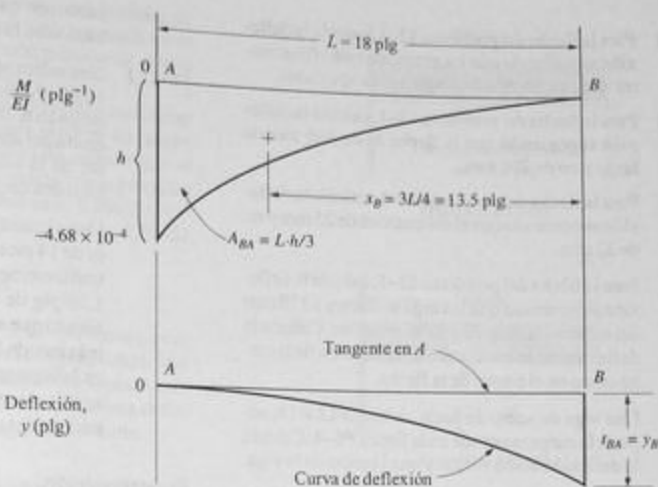


FIGURA 12-33 Curvas  $M/EI$  y de deflexión del ejemplo 12-11.

Ahora se puede usar el teorema 2:

$$t_{BA} = A_{BA} x_B = (2.808 \times 10^{-3})(13.5 \text{ plg}) = 0.0379 \text{ plg}$$

Ésta es igual a la deflexión de la viga en su extremo,  $y_B$ .

## BIBLIOGRAFÍA

- Aluminum Association, *Engineering Data for Aluminum Structures*, 5th ed., Washington, DC, 1986.
- Blodgett, Omer W., *Design of Weldments*, James F. Lincoln Arc Welding Foundation, Cleveland, OH, 1963.
- Moet, Robert L., *Machine Elements in Mechanical Design*, 2nd ed., Macmillan Publishing Co., Columbus, OH, 1992.
- Popov, E. P., *Engineering Mechanics of Solids*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.
- Young, W. C., *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 6th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.

## PROBLEMAS

### Método de la fórmula

- 12-1.M Una flecha circular de 32 mm de diámetro y 700 mm de largo se somete a una carga de 3.0 kN en su centro. Si la flecha es de acero y está simplemente apoyada en sus extremos, calcule la deflexión en el centro.

- 12-2.M Para la flecha del problema 12-1, calcule la deflexión si la flecha es de aluminio 6061-T6 en lugar de acero.

- 12-3.M Para la flecha del problema 12-1, calcule la deflexión suponiendo que los extremos están fijos contra rotación en vez de simplemente apoyados.
- 12-4.M Para la flecha del problema 12-1, calcule la deflexión suponiendo que la flecha es de 350 mm de largo y no de 700 mm.
- 12-5.M Para la flecha del problema 12-1, calcule la deflexión suponiendo que el diámetro es de 25 mm y no de 32 mm.
- 12-6.M Para la flecha del problema 12-1, calcule la deflexión suponiendo que la carga se coloca a 175 mm del extremo izquierdo y no en el centro. Calcule la deflexión tanto en el punto de aplicación de la carga como en el centro de la flecha.
- 12-7.I Una viga de acero de patín ancho, W12 × 16, soporta la carga mostrada en la figura P6-4. Calcule la deflexión en las cargas y en el centro de la viga.
- 12-8.I Un tubo de acero estándar cédula 40 de 1 1/2 plg soporta una carga de 650 lb en el centro de su claro de 28 plg, simplemente apoyado. Calcule la deflexión del tubo en el punto de aplicación de la carga.
- 12-9.I Una viga I estándar Aluminum Association, 18 × 6.181, soporta una carga uniformemente distribuida de 1125 lb/plg en un claro de 10 pies. Calcule la deflexión en el centro del claro.
- 12-10.I Para la viga del problema 12-9, calcule la deflexión en un punto a 3.5 pies del extremo izquierdo de la viga.
- 12-11.I Una viga de patín ancho de acero, W12 × 30, soporta la carga mostrada en la figura P6-12. Calcule la deflexión en la carga.
- 12-12.I Para la viga del problema 12-11, calcule la deflexión en la carga suponiendo que el apoyo izquierdo se recorre 2.0 pies hacia la carga.
- 12-13.I Para la viga del problema 12-11, calcule la deflexión máxima hacia arriba y determine su ubicación.
- 12-14.I Un tubo de acero cédula 40 de 1 plg se utiliza como viga en voladizo de 8 plg de longitud para soportar una carga de 120 lb en su extremo. Calcule la deflexión del tubo en el extremo.
- 12-15.M Se tiene que usar una barra de acero circular para soportar una carga concentrada única de 3.0 kN en el centro de un claro de 700 mm de longitud sobre apoyos simples. Determine el diámetro requerido de la barra si su deflexión no debe exceder de 0.12 mm.
- 12-16.M Para la barra diseñada en el problema 12-15, calcule el esfuerzo en la barra y especifique un acero adecuado que produzca un factor de diseño de  $\phi$  basado en la resistencia última.
- 12-17.I Una solera plana de acero de 0.100 plg de ancho y 1.200 plg de largo se sujeta por un extremo y se carga en el otro como viga en voladizo (como en el caso *a* del apéndice A-23). ¿Cuál debe ser el espesor de la solera para que se deflexione 0.15 plg bajo una carga de 0.52 lb?
- 12-18.I Una vigueta de madera de un edificio comercial es de 14 pies 6 plg de longitud y soporta una carga uniformemente distribuida de 50 lb/plg. Es de 1.50 plg de ancho por 9.25 plg de altura. Suponiendo que es de pino del sur, calcule la deflexión máxima de la viga. Además, calcule el esfuerzo en la vigueta causado por flexión y cortante horizontal, y compárelo con los esfuerzos permisibles para madera de pino del sur grado núm. 2.

### Superposición

- 12-19.M Una viga de aluminio extruido (6061-T6) soporta las cargas mostradas en la figura P6-6. Calcule la deflexión de la viga en cada una de las cargas. En la figura P7-11 se muestra el perfil de la viga.
- 12-20.M Las cargas mostradas en la figura P6-5 representan las patas de un motor colocado sobre un bastidor. El bastidor tiene la sección transversal mostrada en la figura P7-12 cuyo momento de inercia es de  $16\,956\text{ mm}^4$ . Calcule la deflexión en cada una de las cargas. El bastidor es de aleación de aluminio 2014-T4.
- 12-21.C Calcule la deflexión máxima de una viga de acero W18 × 55 cuando se somete a la carga mostrada en la figura P6-7.
- 12-22.I Un tubo de acero cédula 40 de 1 plg soporta las dos cargas mostradas en la figura P6-18. Calcule la deflexión del tubo en cada una de las cargas.
- 12-23.M Una viga en voladizo soporta dos cargas como se muestra en la figura P6-21. Si la viga es una barra de acero rectangular de 20 mm de ancho por 80 mm de altura, calcule la deflexión en su extremo.
- 12-24.M Para la viga del problema 12-23, calcule la deflexión suponiendo que la barra es de aluminio 2014-T4 y no de acero.
- 12-25.M Para la viga del problema 12-23, calcule la deflexión suponiendo que la barra es de magnesio, ASTM AZ 63A-T6, y no de acero.
- 12-26.I La carga mostrada en la figura P6-55 es soportada por una barra circular de acero de 0.800 plg de diámetro. Calcule la deflexión de su extremo derecho.

12-27.M Especifique una viga de patin ancho estándar de acero capaz de soportar la carga mostrada en la figura P6-7 con una deflexión máxima de menos de 1/360 veces su longitud.

12-28.I Se pretende usar un canal Aluminum Association con sus patas hacia abajo para soportar las cargas mostradas en la figura P6-43 de manera que la cara plana pueda estar en contacto con la carga. La deflexión máxima permisible es de 0.080 plg. Especifique un canal adecuado.

### Método de integración sucesiva

Para los problemas siguientes, 12-29 al 12-37, use el procedimiento general descrito en la sección 12-7 para determinar las ecuaciones de las curvas de deflexión de las vigas. A menos que se indique de otra manera, calcule la máxima deflexión de la viga con las ecuaciones y diga dónde ocurre.

12-29.I En la figura P12-29 se muestra la carga. La viga es una barra rectangular de acero, de 1.0 plg de ancho por 2.0 plg de altura.

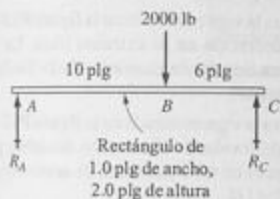


FIGURA P12-29

12-30.I En la figura P12-30 se muestra la carga. La viga es un perfil de patin ancho de acero W18 x 55.

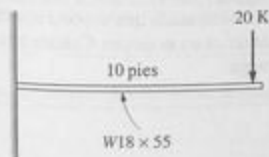


FIGURA P12-30

12-31.C En la figura P12-31 se muestra la carga. La viga es un tubo de acero cédula 40 de 2 1/2 plg.

12-32.I En la figura P12-32 se muestra la carga. La viga es un perfil de patin ancho de acero W24 x 76.

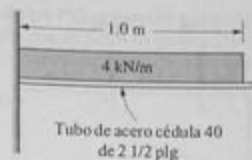


FIGURA P12-31

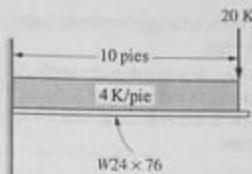


FIGURA P12-32

12-33.M En la figura P12-33 se muestra la carga. Diseñe una barra circular de acero que limite la deflexión en el extremo de la viga a 5.0 mm.

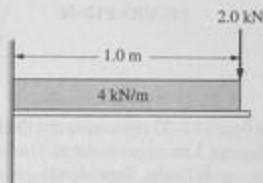


FIGURA P12-33

12-34.C En la figura P12-34 se muestra la carga. Diseñe una viga de acero que limite la deflexión máxima a 1.0 mm. Use cualquier perfil, incluidos los del apéndice.

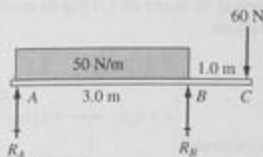


FIGURA P12-34

12-35.C En la figura P12-35 se muestra la carga. Seleccione una viga I de aluminio que limite el esfuerzo a



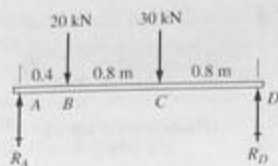


FIGURA P12-35

- 120 MPa; en seguida calcule la deflexión máxima en la viga.
- 12-36.C Una viga de acero de patin ancho W14 × 26 soporta las cargas mostradas en la figura P12-36. Calcule la deflexión máxima entre los apoyos y en cada extremo.

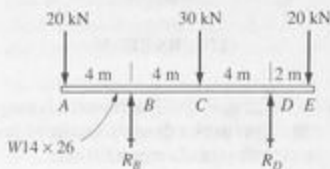


FIGURA P12-36

- 12-37.M La figura 12-37 representa una flecha de acero de máquina. Las cargas se deben a los engranes montados en la flecha. Suponiendo que el diámetro de la flecha no cambia, determine el diámetro requerido para limitar la deflexión en cualquiera de los engranes a 0.13 mm.

### Método del área de momento

Utilice el método del área de momento para la solución de los problemas siguientes:

- 12-38.I Para la viga mostrada en la figura P12-29, calcule la deflexión en la carga. La viga es una barra rectangular de acero de 1.0 plg de ancho por 2.0 plg de altura.

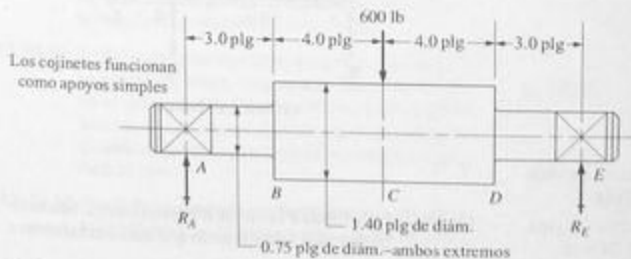


FIGURA P12-47

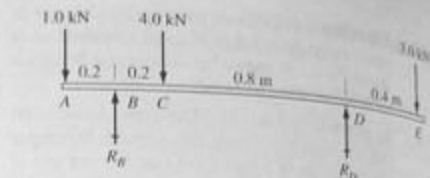


FIGURA P12-37

- 12-39.I Para la viga mostrada en la figura P12-29, calcule la deflexión a la mitad, a 8.0 plg de uno u otro apoyo. La viga es una barra rectangular de acero de 1.0 plg de ancho por 2.0 plg de altura.
- 12-40.I Para la viga mostrada en la figura P12-30, calcule la deflexión en su extremo libre. La viga es un perfil de patín ancho de acero W18 × 55.
- 12-41.C Para la viga mostrada en la figura P12-31, calcule la deflexión en su extremo libre. La viga es un tubo de acero cédula 40 de 2 1/2 plg.
- 12-42.I Para la viga mostrada en la figura P12-32, calcule la deflexión en su extremo libre. La viga es un perfil de patín ancho de acero W24 × 76.
- 12-43.M Para la viga mostrada en la figura P12-33, calcule la deflexión en su extremo libre. La viga es una barra circular de aluminio 6061-T6 de 100 mm de diámetro.
- 12-44.C Para la viga mostrada en la figura P12-34, calcule la deflexión en el extremo derecho, punto C. La viga es un tubo cuadrado de acero estructural de 2 × 2 × 1/4.
- 12-45.C Para la viga mostrada en la figura P12-35, calcule la deflexión en el punto C. La viga es una viga L17 × 5.800, de aluminio 6061-T6.
- 12-46.C Para la viga mostrada en la figura P12-36, calcule la deflexión en el punto A. La viga es un perfil de patin ancho de acero W14 × 26.
- 12-47.I La figura P12-47 muestra una flecha circular de acero escalonada que soporta una carga concentrada única en su centro. Calcule la deflexión bajo la carga.

12-48.I La figura P12-48 muestra una viga compuesta de tubería estructural de acero. Calcule la deflexión en la carga.

12-49.I La figura P12-40 muestra una viga en voladizo hecha con un perfil de patín ancho de acero W18  $\times$  55 con cubreplacas soldadas en las caras supe-

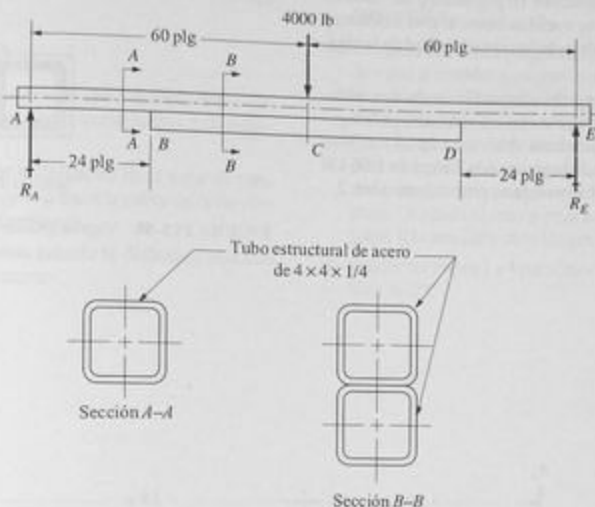


FIGURA P12-48

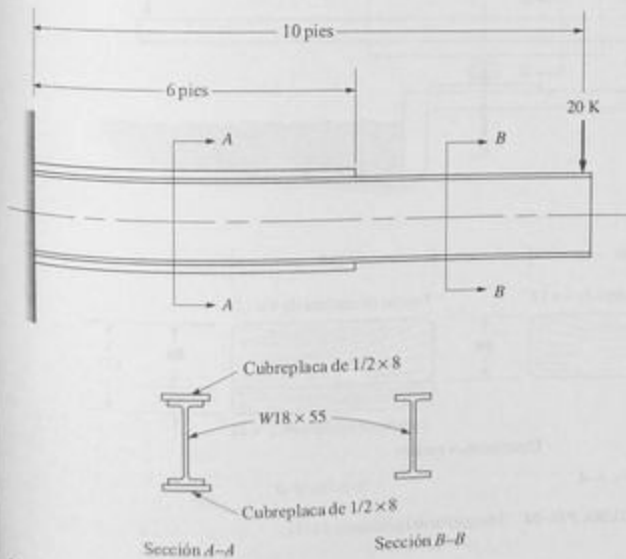


FIGURA P12-49

rior e inferior de la viga a lo largo de los primeros 6.0 pies. Calcule la deflexión en el extremo libre de la viga.

- 12-50.I El miembro superior de una grúa de caballete se armó como se muestra en la figura P12-50. Las dos piezas de los extremos son tubos estructurales de acero de  $3 \times 3 \times 1/4$  plg. La pieza de en medio es de  $4 \times 4 \times 1/2$ . Los tubos de 3 plg se insertan apretadamente 10 plg dentro del tubo de 4 plg y luego se sueldan entre sí con soldadura de latón. Calcule la deflexión a la mitad de la viga.

- 12-51.M Se hace un trampolín rústico clavando dos tablo- nes de madera entre sí como se muestra en la figura P12-51. Calcule la deflexión en el extremo libre si el clavadista ejerce una fuerza de 1.80 kN en el extremo. La madera es pino del sur núm. 2.

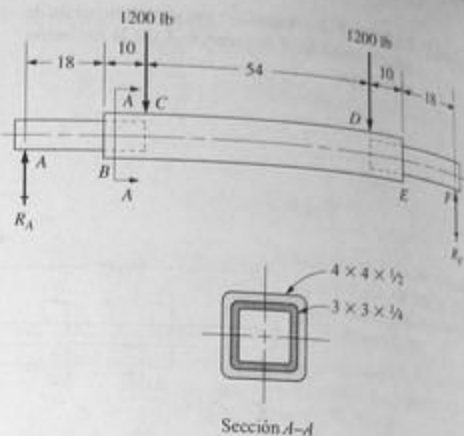


FIGURA P12-50 Viga de grúa de pórtico del problema 12-50

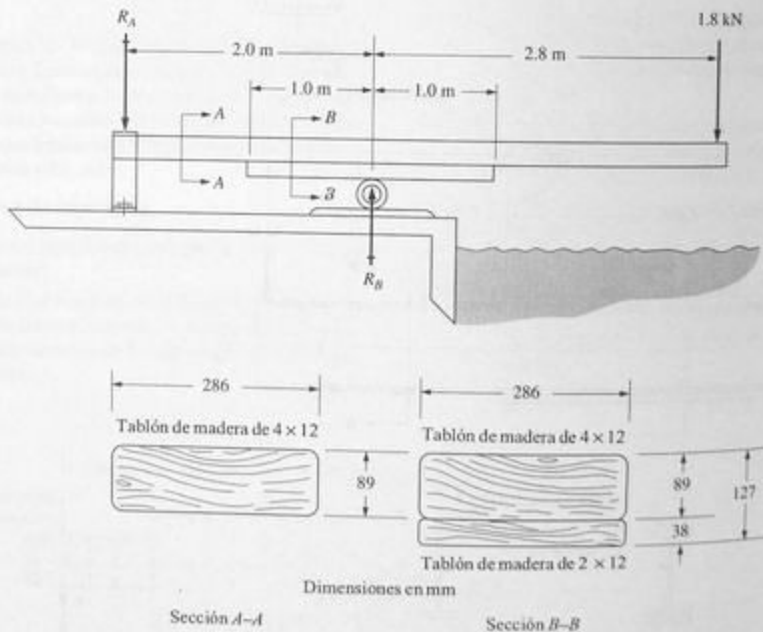


FIGURA P12-51 Trampolín del problema 12-51.

## TAREAS DE COMPUTACIÓN

1. Escriba un programa para evaluar la deflexión de una viga simplemente apoyada sometida a una carga concentrada entre los apoyos utilizando las fórmulas dadas en el caso *b* del apéndice A-22. El programa debe aceptar la introducción de datos como la carga, la longitud del extremo saliente, si lo hay, los valores de rigidez de la viga ( $E$  e  $I$ ), y el punto en donde se va a calcular la deflexión.

### Adiciones

- Diseñe el programa de modo que calcule la deflexión en una serie de puntos para trazar la curva de deflexión completa.
- Además de calcular la deflexión de la serie de puntos, haga que el programa trace la curva de deflexión en un graficador o impresora.
- Haga que el programa calcule la deflexión máxima en el punto donde ocurre.

- Repita la tarea 1 para cualquiera de los patrones de carga y apoyos mostrados en el apéndice A-22.
- Escriba un programa como el de la tarea 1 para el caso *b* del apéndice A-22, pero haga que acepte dos o más cargas concentradas en cualquier punto de la viga y calcule la deflexión en puntos específicos con el principio de superposición.
- Combine dos o más programas que determinen la deflexión de vigas sometidas a un patrón de carga dado, de modo que se pueda usar el principio de superposición para calcular la deflexión en cualquier punto a causa de la carga combinada. Por ejemplo, combine los casos *b* y *d* del apéndice A-22 para manejar cualquier viga con una combinación de cargas concentradas y una carga uniformemente distribuida completa. O, añada el caso *g* para incluir una carga distribuida sobre sólo una parte de la longitud de la viga.
- Repita las tareas 1 a 4 para las vigas en voladizo del apéndice A-23.

# 13

## Vigas estáticamente indeterminadas

### 13-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Las vigas consideradas en los capítulos anteriores fueron vigas con dos y sólo dos apoyos simples y en voladizo con un extremo fijo y el otro libre. Se demostró que todas las fuerzas de reacción y los momentos flexionantes desconocidos se podían determinar con las ecuaciones clásicas de equilibrio.



Ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F = 0 \quad \text{en cualquier dirección}$$

$$\Sigma M = 0 \quad \text{con respecto a cualquier punto}$$

Estas vigas se llaman *estáticamente determinadas*.

Este capítulo se ocupa de vigas que no quedan comprendidas dentro de las categorías antes mencionadas y por tanto se llaman *estáticamente indeterminadas*. Para analizar tales vigas se requieren métodos diferentes los cuales se demostrarán en este capítulo. Asimismo, se comparará el comportamiento de vigas diseñadas para realizar una función similar pero provistas de sistemas de apoyo diferentes, de las cuales unas son estáticamente determinadas y otras estáticamente indeterminadas.

Después de terminar el estudio de este capítulo, el lector será capaz de:

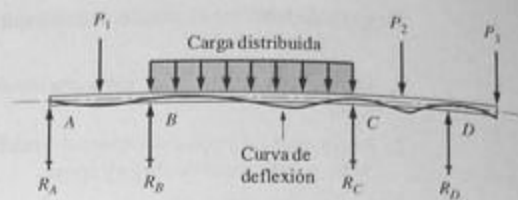
1. Definir los conceptos de *estáticamente determinada* y *estáticamente indeterminada*.
2. Reconocer las vigas estáticamente indeterminadas a partir de las descripciones de las condiciones de carga y apoyo.
3. Definir las *vigas continuas*.
4. Definir una *viga en voladizo soportada*.
5. Definir una viga con un *extremo fijo*.
6. Usar las fórmulas establecidas para analizar ciertos tipos de vigas estáticamente indeterminadas.
7. Usar el principio de superposición para combinar casos simples para los que haya fórmulas disponibles para resolver casos de carga más complejos.
8. Usar el *teorema de los tres momentos* para analizar vigas continuas con tres o más apoyos sometidas a cualquier combinación de cargas concentradas y distribuidas.
9. Comparar la resistencia y la rigidez relativas de vigas con diferentes sistemas de apoyo y patrones de carga.

### 13-2 EJEMPLOS DE VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

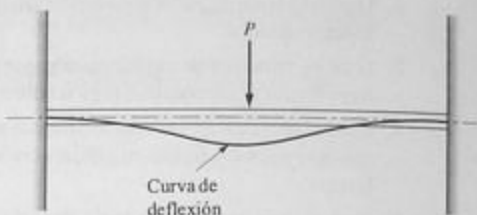
Las vigas con más de dos apoyos simples, las vigas en voladizo con un segundo apoyo o las vigas con dos extremos fijos son ejemplos importantes de vigas estáticamente indeterminadas. La figura 13-1 muestra el método tradicional de representar estos tipos de vigas. Las formas representativas, si bien exageradas, de las curvas de deflexión de las vigas también se muestran. Son de notarse las diferencias significativas entre éstas y las curvas de las vigas del capítulo anterior.

La figura 13-1(a) se llama *viga continua* y el nombre proviene del hecho de que la viga es continua sobre varios apoyos. Es importante señalar que la forma de la curva de deflexión también es continua a través de los apoyos. Este hecho es útil al analizar tales vigas. Las vigas continuas ocurren con frecuencia en estructuras de edificios y en puentes de carreteras. Muchas casas campestres con sótanos contienen vigas de ese tipo dispuestas de un lado al otro de la casa para soportar las cargas producidas por las viguetas de piso y los muros divisorios. Los puentes sobre autopistas para el tráfico local con frecuencia están apoyados en los extremos a ambos lados de la autopista y también a la mitad en el camellón central. Nótese que las vigas de puentes como éstos por lo general son de una pieza o están conectadas para formar una *viga continua* rígida.

La viga con un *extremo fijo* mostrada en la figura 13-1(b) se usa en estructuras de edificios y también en estructuras de máquinas por el elevado grado de rigidez provisto. La creación de la condición de extremo fijo requiere que las conexiones en los extremos impidan la rotación de éstos así como también para que desempeñen la función de apoyo para las cargas verticales. La figura 13-2 muestra una manera de lograr la condición de apoyo fijo. Soldando una viga transversal en las columnas de apoyo se obtendría el mismo resultado. Se debe tener cuidado al evaluar vigas con extremos fijos para garantizar que las conexiones impidan la rotación de la viga en el apoyo y resistan los momentos



(a) Viga continua—viga sobre tres o más apoyos simples



(b) Viga con los dos extremos fijos



(c) Viga en voladizo apoyada

FIGURA 13-1 Ejemplos de vigas estáticamente indeterminadas.

producidos por la restricción. Sin el debido cuidado, podría aparecer una condición entre la de los extremos fijos y la de los apoyos simples, que dificultaría el análisis y conduciría a cometer errores.

La viga en voladizo apoyada se podría construir como se muestra en la figura 13-3. La carga sobre el techo plano es soportada por una viga rigidamente conectada a una columna por uno de sus extremos y simplemente apoyada en otra columna por el otro.

Las vigas continuas y las vigas con extremos fijos tienen ciertas ventajas sobre las simplemente apoyadas. Son más rígidas y en vigas de tamaño equivalente por lo general se producen esfuerzos más bajos; por otra parte, se pueden usar vigas de menor tamaño y peso con el mismo grado de resistencia y rigidez. Las desventajas son que los análisis son más difíciles y el efecto de las pequeñas variaciones de las condiciones de apoyos pueden ser significativas.

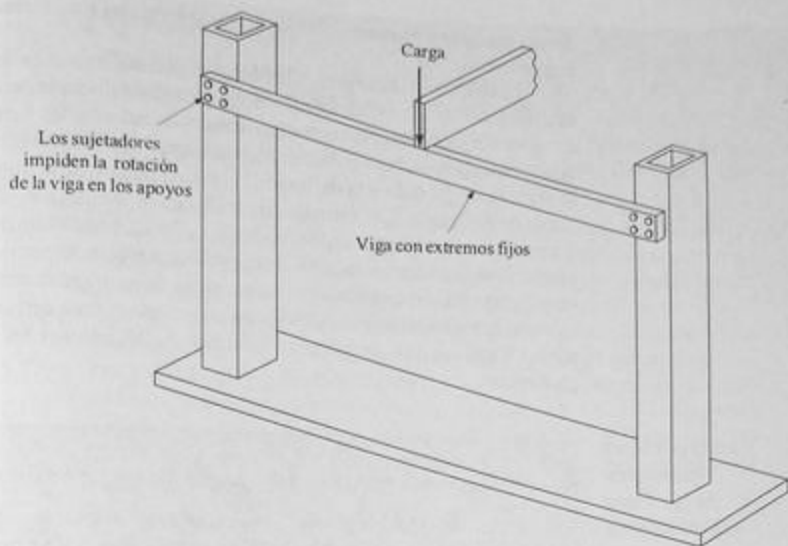


FIGURA 13-2 Viga con extremos fijos.

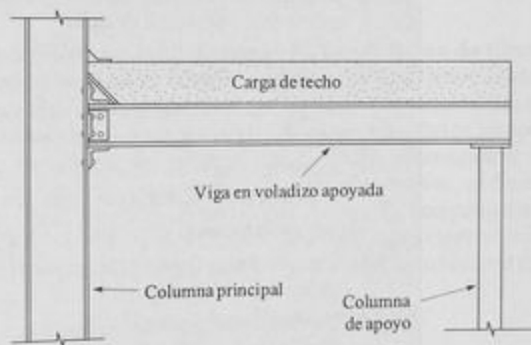


FIGURA 13-3 Viga en voladizo apoyada.

### 13-3 FÓRMULAS PARA VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

El apéndice A-24 contiene varios ejemplos de vigas estáticamente indeterminadas y fórmulas para calcular las reacciones en los apoyos y la deflexión en cualquier punto de las vigas. Estas fórmulas se pueden aplicar directamente como se demostró en el capítulo 12 en el caso de vigas estáticamente determinadas. También se muestran diagramas de



fuerza cortante y momento flexionante y la fórmulas necesarias para calcular los valores en puntos críticos.

Las características generales de las vigas estáticamente indeterminadas son bastante diferentes de las estáticamente determinadas estudiadas en los capítulos anteriores. Éstas se ven con toda claridad en la manera de calcular las fuerzas y momentos de reacción en los apoyos, la distribución del momento flexionante con respecto a la posición en la viga, la magnitud de la deflexión en varios puntos de la viga y la forma general de la curva de deflexión. Las fórmulas incluidas en el apéndice A-24 se derivaron utilizando los principios estudiados en los capítulos 6, 7 y 12 de este libro junto con consideraciones especiales para adecuar la naturaleza estáticamente indeterminada de las condiciones de carga y apoyo. Se pueden usar las técnicas de *superposición* y el *teorema de los tres momentos* más adelante analizados en este capítulo para derivar estas fórmulas. Al revisar las fórmulas que vienen en el apéndice A-24, nótese las siguientes características generales.

**Características  
generales  
de las vigas  
estáticamente  
indeterminadas**

*Vigas en voladizo apoyadas (Casos a a d en el apéndice A-24)*

1. El extremo fijo funciona como un apoyo rígido que resiste cualquier tendencia a girar de la viga. Por tanto en general se produce un momento flexionante significativo en ese lugar.
2. El segundo apoyo se considera como apoyo simple. Si el apoyo simple se localiza en el extremo libre de la viga, como en los casos *a*, *b* y *c*, el momento flexionante allí es cero.
3. Si la viga en voladizo apoyada dispone de un extremo saliente, como en el caso *d*, el máximo momento flexionante a menudo ocurre en el apoyo simple. La forma de la curva del momento flexionante por lo general es opuesta a la de los casos sin extremo saliente.
4. Existe un punto de momento flexionante cero en una viga en voladizo entibada, por lo general cerca del extremo fijo.

*Vigas con extremos fijos (Casos e, f y g del apéndice A-24)*

1. Los momentos flexionantes en los extremos fijos *no* son cero y pueden ser los máximos en la viga.
2. Cuando las cargas están dirigidas hacia abajo en una viga con los extremos fijos, los momentos flexionantes en los extremos son *negativos*, lo que indica que la curva de deflexión cerca de ellos es *cóncava hacia abajo*.
3. Cuando las cargas están dirigidas hacia abajo, los momentos flexionantes cerca del centro de las vigas con extremos fijos son *positivos*, lo que indica que la curva de deflexión allí es *cóncava hacia arriba*.
4. Por lo general existen dos puntos de momento flexionante cero en las vigas con extremos fijos.
5. La pendiente de la curva de deflexión de una viga con extremos fijos es cero en éstos por la restricción creada allí contra rotación.
6. Los sujetadores utilizados para fijar los extremos de una viga deben ser capaces de resistir los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes en estos puntos. Se debe consultar el capítulo 16 sobre Conexiones con respecto a las técnicas de diseño y análisis de conexiones a prueba de momentos.

*Vigas continuas* (Casos *h, i y j* del apéndice A-24)

1. Los puntos de momento flexionante máximo positivo por lo general ocurren cerca del centro de los claros entre los apoyos.
2. Los momentos flexionantes máximos negativos por lo general ocurren en los apoyos interiores y con frecuencia son los momentos flexionante máximos.
3. Sobre todo en el caso de vigas continuas, con frecuencia es económicamente deseable diseñar la sección transversal y sus dimensiones para reforzar las secciones sometidas a valores localmente elevados de los momentos flexionantes. Un ejemplo sería diseñar el perfil principal de la viga para que soporte el momento máximo positivo entre los apoyos y en seguida agregar placas de refuerzo a la caras superior e inferior de la viga cerca de los apoyos para incrementar el momento de inercia y el módulo de sección en las regiones de momento flexionante elevado. Otro enfoque sería incrementar el peralte de la viga cerca de los apoyos. Los pasos elevados sobre carreteras y los puentes sobre ríos con frecuencia poseen estas características de diseño.
4. En los casos en que las vigas continuas que se tienen que fabricar con secciones que se sujetan entre sí en el sitio de la obra, conviene colocar las conexiones cerca de un punto de momento flexionante cero para simplificar su diseño.

**Comparación del tipo de apoyo de una viga con el uso de fórmulas estándar.** La aplicación de las fórmulas de vigas estáticamente indeterminadas es similar al proceso utilizado en el capítulo 12 para vigas estáticamente determinadas. En los ejemplos siguientes se demuestra el uso de varias fórmulas contenidas en los apéndices A-22, A-23 y A-24 y también se generan datos con los cuales se compara el desempeño de cuatro tipos diferentes de apoyos para alcanzar el mismo objetivo; es decir, soportar una carga dada a una distancia dada de uno o dos apoyos. La comparación se basa en la magnitud del esfuerzo flexionante y la deflexión en las cuatro vigas del mismo material, perfil y tamaño. La viga de mejor desempeño, por tanto, es aquella con el menor esfuerzo y menor deflexión.

Los parámetros de las comparaciones son los siguientes:

1. Los cuatro tipos de viga a ser comparados son:
  - a. Viga en voladizo
  - b. Viga simplemente apoyada
  - c. Viga en voladizo apoyada
  - d. Viga con ambos extremos fijos o empotrados
2. Cada viga debe soportar una carga concentrada estática única de 1200 lb.
3. La carga se debe colocar a 30 plg de cualquiera de los apoyos.
4. Las vigas serán de acero estructural A36 ASTM cuyas propiedades son las siguientes:  $s_y = 36\,000 \text{ lb/plg}^2$ ;  $E = 30 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$ .
5. El esfuerzo flexionante máximo permisible se basará en la norma AISC:

$$\sigma_d = 0.66s_y = 0.66(36\,000 \text{ lb/plg}^2) = 23\,760 \text{ lb/plg}^2$$

6. La deflexión máxima permisible se basará en el límite de  $L/360$ , en donde  $L$  es la longitud de la viga.

Se puede demostrar que, de los cuatro tipos de vigas y sistemas de apoyo a considerar, la viga en voladizo es la más deficiente con respecto a esfuerzo y deflexión. Por consiguiente, el proceso de comparación se iniciará especificando el perfil y el tamaño de la sección transversal de la viga que garanticen que la viga satisface los requisitos establecidos en los incisos 5 y 6. Por tanto, se utilizará el mismo perfil y tamaño para los otros tres diseños. Los ejemplos siguientes generan los resultados para la comparación deseada.

Ejemplo 13-1: Diseño y análisis de la viga en voladizo.

Ejemplo 13-2: Análisis de la viga simplemente apoyada.

Ejemplo 13-3: Análisis de la viga en voladizo apoyada.

Ejemplo 13-4: Análisis de la viga doblemente empotrada o con ambos extremos fijos.

Ejemplo 13-5: Comparación de los cuatro diseños de viga.

- Ejemplo 13-1** Para la viga en voladizo mostrada en la figura 13-4, especifique el canal de acero estándar más ligero que limite el esfuerzo flexionante a  $23\,760 \text{ lb/plg}^2$  y la deflexión

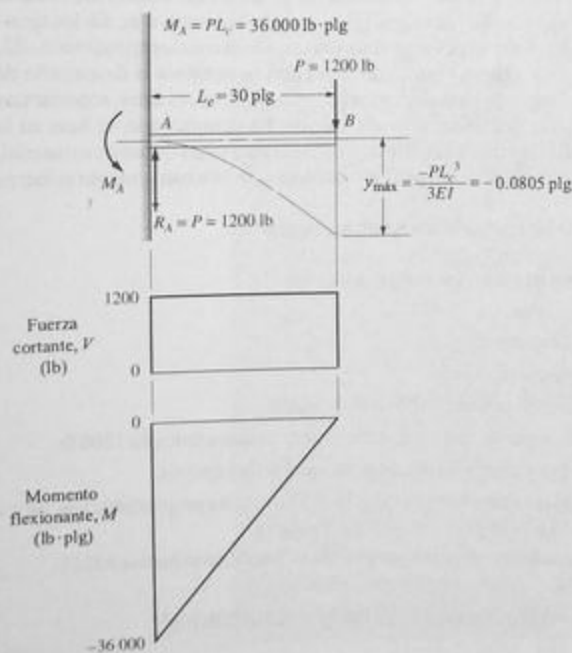


FIGURA 13-4 Viga en voladizo.

máxima a  $L/360$ . El canal debe colocarse con las patas hacia abajo y la cara plana del alma hacia arriba para montar la carga. Para el perfil de viga seleccionado calcule el máximo esfuerzo y deflexión esperados.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Diseñar la viga en voladizo y calcular el esfuerzo y la deflexión resultante.
	<b>Datos</b>	Las dimensiones de la viga y la carga mostradas en la figura 13-4. El perfil debe ser un canal de acero estándar con las patas hacia abajo.
		$\sigma_d = 23\,760 \text{ lb/plg}^2$ ; $y_{\text{máx}} = L/360$ con $L = L_c = 30 \text{ plg}$
	<b>Análisis</b>	La figura 13-4 contiene los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante con los cuales se determina que $M_{\text{máx}} = 36\,000 \text{ lb}\cdot\text{plg}$ . Por tanto:

$$\sigma = \sigma_d = M/S$$

*Análisis del esfuerzo:* Para un estado de esfuerzo, el módulo de sección requerido es:

$$S = M/\sigma_d = (36\,000 \text{ lb}\cdot\text{plg})/(23\,760 \text{ lb/plg}^2) = 1.515 \text{ plg}^3$$

Del apéndice A-6, considerando las propiedades con respecto al eje Y-Y, se selecciona C12  $\times$  25 como la sección más ligera conveniente. Sus propiedades son:

$$S = 1.88 \text{ plg}^3; \quad I = 4.47 \text{ plg}^4; \quad w = 25 \text{ lb/plg}$$

*Deflexión:* La máxima deflexión permisible es:

$$y_{\text{máx}} = -L/360 = -(30 \text{ plg})/360 = -0.0833 \text{ plg}$$

Según el apéndice A-23, la fórmula para la deflexión máxima es:

$$y_{\text{máx}} = -PL^3/3EI \quad \text{en el extremo libre de la viga en voladizo}$$

Por tanto el momento de inercia requerido es:

$$I = -PL^3/3Ey_{\text{máx}}$$

$$I = \frac{-(1200 \text{ lb})(30 \text{ plg})^3}{3(30 \times 10^6)(-0.0833 \text{ plg})} = 4.32 \text{ plg}^4$$

El perfil de viga previamente seleccionado es satisfactorio con respecto a deflexión.

*Esfuerzo flexionante real:*

$$\sigma = M/S = (36\,000 \text{ lb}\cdot\text{plg})/(1.88 \text{ plg}^3) = 19\,150 \text{ lb/plg}^2$$

*Deflexión real:*

$$y_{\text{máx}} = \frac{-PL^3}{3EI} = \frac{-(1200 \text{ lb})(30 \text{ plg})^3}{3(30 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2)(4.47 \text{ plg}^4)} = -0.0805 \text{ plg}$$

**Resultados** *Resumen de los resultados:*  
 Perfil: canal estándar de acero C12 × 25

$$\sigma = 19\,150 \text{ lb/plg}^2$$

$$y_{\max} = -0.0805 \text{ plg}$$

**Comentario** Estos resultados se compararán con los de los demás diseños de los ejemplos siguientes.

**Ejemplo 13-2**

La viga simplemente apoyada mostrada en la figura 13-5 se tiene que fabricar con un canal estándar de acero C12 × 25 con las patas hacia abajo. Calcule el esfuerzo y la deflexión máximos esperados y compárelos con los resultados del ejemplo 13-1 de la viga en voladizo.

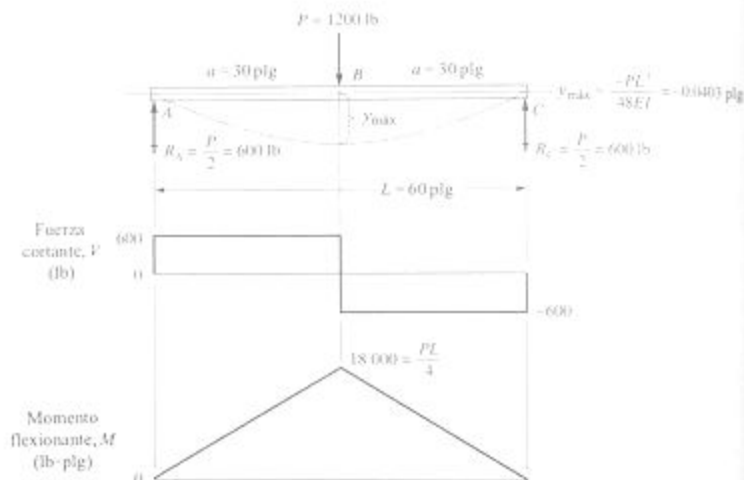


FIGURA 13-5 Viga simplemente apoyada.

**Solución Objetivo**

Calcular el esfuerzo y la deflexión máximos. Comparar con la viga en voladizo.

**Datos**

Las dimensiones de la viga y la carga mostradas en la figura 13-5. El perfil es un canal estándar de acero C12 × 25, con las patas hacia abajo. Propiedades:  $S = 1.88 \text{ plg}^3$ ,  $I = 4.47 \text{ plg}^4$

**Análisis**

Basándose en la figura 13-5 se encuentra  $M_{\max} = 18\,000 \text{ lb-plg}$ . Por tanto, *Esfuerzo flexionante real:*

$$\sigma = M/S = (18\,000 \text{ lb-plg}) / (1.88 \text{ plg}^3) = 9575 \text{ lb/plg}^2$$

Deflexión real:

$$y_{\max} = \frac{-PL^3}{48EI} = \frac{-(1200 \text{ lb})(60 \text{ plg})^3}{48(30 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2)(4.47 \text{ plg}^4)} = -0.0403 \text{ plg}$$

**Resultados** Comparación de los resultados con los de la viga en voladizo: Utilizando el subíndice 1 para la viga en voladizo y 2 para la viga simplemente apoyada:

$$\sigma_2 / \sigma_1 = (9575 \text{ lb/plg}^2) / (19\,150 \text{ lb/plg}^2) = 0.50$$

$$y_2 / y_1 = (-0.0403 \text{ plg}) / (-0.0805 \text{ plg}) = 0.50$$

**Comentario** Estos resultados se compararán con los otros diseños del ejemplo 13-5.

**Ejemplo 13-3**

La viga en voladizo apoyada, que se muestra en la figura 13-6, se tiene que hacer con un canal estándar de acero, C12 x 25, con las patas hacia abajo. Calcule el esfuerzo y la deflexión máximos especificados y compárelos con los resultados del ejemplo 13-1 de la viga en voladizo.

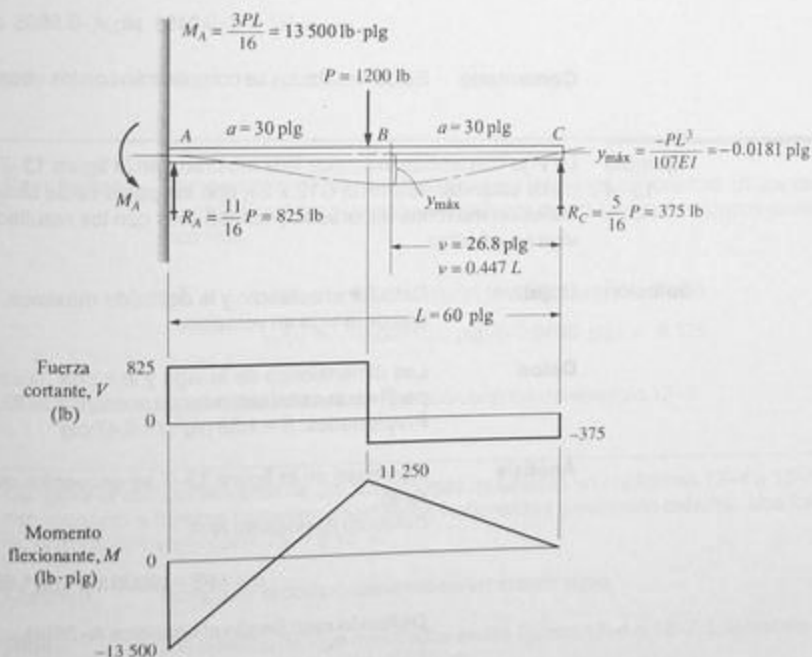


FIGURA 13-6 Viga en voladizo apoyada.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular el esfuerzo y la deflexión máximos. Comparar con la viga en voladizo.
	<b>Datos</b>	Las dimensiones de la viga y la carga mostradas en la figura 13-6. El perfil es una canal estándar de acero, C12 x 25, con las patas hacia abajo. Propiedades: $S = 1.88 \text{ plg}^3$ , $I = 4.47 \text{ plg}^4$
	<b>Análisis</b>	Con base en la figura 13-6 se encuentra que $M_{\text{máx}} = 13\,500 \text{ lb}\cdot\text{plg}$ . Por tanto, <i>Esfuerzo flexionante real:</i> $\sigma = M/S = (13\,500 \text{ lb}\cdot\text{plg})/(1.88 \text{ plg}^3) = 7180 \text{ lb}/\text{plg}^2$ <i>Deflexión real:</i> Según el apéndice A-24(a): $y_{\text{máx}} = \frac{-PL^3}{107EI} = \frac{-(1200 \text{ lb})(60 \text{ plg})^3}{107(30 \times 10^6 \text{ lb}/\text{plg}^2)(4.47 \text{ plg}^4)} = -0.0181 \text{ plg}$
	<b>Resultados</b>	<i>Comparación de los resultados con los de la viga en voladizo.</i> Utilizando el subíndice 1 para la viga en voladizo y 3 para la viga en voladizo apoyada: $\sigma_3/\sigma_1 = (7180 \text{ lb}/\text{plg}^2)/(19\,150 \text{ lb}/\text{plg}^2) = 0.375$ $y_3/y_1 = (-0.0181 \text{ plg})/(-0.0805 \text{ plg}) = 0.225$
	<b>Comentario</b>	Estos resultados se compararán con los otros diseños del ejemplo 13-5.

**Ejemplo 13-4** La viga con ambos extremos fijos mostrada en la figura 13-7 se tiene que hacer con un canal estándar de acero, C12 x 25, con las patas hacia abajo. Calcule el esfuerzo y la deflexión máximos esperados y compárelos con los resultados del ejemplo 13-1 de la viga en voladizo.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular el esfuerzo y la deflexión máximos. Comparar con los resultados de la viga en voladizo.
	<b>Datos</b>	Las dimensiones de la viga y la carga mostradas en la figura 13-7. El perfil es un canal estándar de acero, C12 x 25, con las patas hacia abajo. Propiedades: $S = 1.88 \text{ plg}^3$ , $I = 4.47 \text{ plg}^4$
	<b>Análisis</b>	Con base en la figura 13-7 se encuentra que $M_{\text{máx}} = 9000 \text{ lb}\cdot\text{plg}$ . Por tanto, <i>Esfuerzo flexionante real:</i>

$$\sigma = M/S = (9000 \text{ lb}\cdot\text{plg})/(1.88 \text{ plg}^3) = 4787 \text{ lb}/\text{plg}^2$$

*Deflexión real:* Según el apéndice A-24(e),

$$y_{\text{máx}} = \frac{-PL^3}{192EI} = \frac{-(1200 \text{ lb})(60 \text{ plg})^3}{192(30 \times 10^6 \text{ lb}/\text{plg}^2)(4.47 \text{ plg}^4)} = -0.0101 \text{ plg}$$

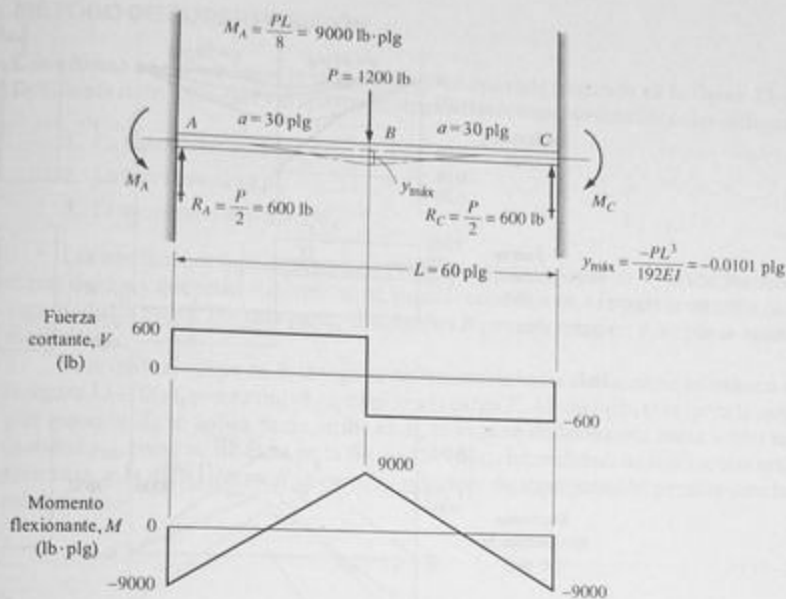


FIGURA 13-7 Viga con ambos extremos fijos.

**Resultados** Comparación de los resultados con los de la viga en voladizo: Utilizando el subíndice 1 para la viga en voladizo y 4 para la viga con ambos extremos fijos:

$$\sigma_4/\sigma_1 = (4787 \text{ lb/plg}^2)/(19\ 150 \text{ lb/plg}^2) = 0.250$$

$$y_4/y_1 = (-0.001101 \text{ plg})/(-0.0805 \text{ plg}) = 0.125$$

**Comentario** Estos resultados se compararán con los del ejemplo 13-5.

**Ejemplo 13-5** Compare el comportamiento de las cuatro vigas mostradas en las figuras 13-4 a 13-7 con respecto a fuerzas cortantes, momentos flexionantes y deflexión máxima. Use los resultados de los ejemplos 13-1 a 13-4.

**Solución** **Objetivo** Comparar el comportamiento de las cuatro vigas.

**Datos** Los diseños de viga mostrados en las figuras 13-4 a 13-7. Los resultados de los ejemplos 13-1 a 13-4.

**Análisis** La figura 13-8 muestra la comparación.



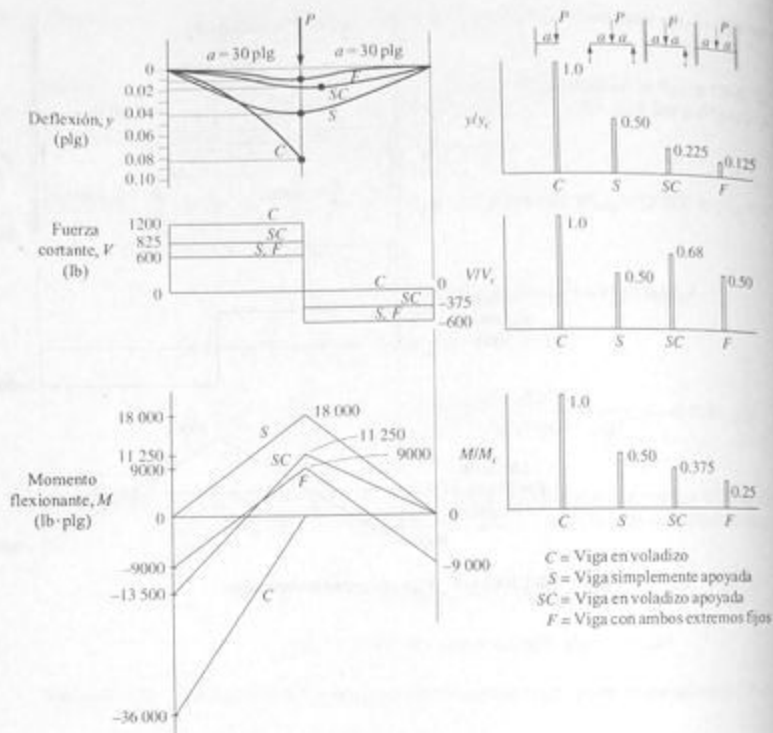


FIGURA 13-8 Comparación del comportamiento en el diseño de las cuatro vigas de las figuras 13-4 a la 13-7.

### Resultados

En la figura 13-8, los diagramas del lado izquierdo son los diagramas de deflexión, fuerza cortante y momento flexionante como función de la posición en la viga de los cuatro diseños superpuestos. En cada caso, es obvio que la viga en voladizo produce el valor máximo por un margen significativo. Los diagramas del lado derecho son gráficas de barras del comportamiento relativo donde a la deflexión, a la fuerza cortante y al momento flexionante se les asigna un valor de 1.0.

### Comentario

Los resultados mostrados en la figura 13-8 indican que de ser práctico conviene considerar dos apoyos en lugar de uno. Por otra parte, la viga con los dos extremos fijos es la más deseable puesto que produce sólo 1/8 de la deflexión, 1/2 de la fuerza cortante y 1/4 del momento flexionante en comparación con la viga en voladizo con una carga, distancia de la carga a los apoyos, perfil y tamaños dados. Desde luego, el uso del segundo apoyo debe ser práctico.

### 13-4 MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN

Considérese en primer lugar la viga en voladizo apoyada mostrada en la figura 13-9. Debido a la restricción en  $A$  y al apoyo simple en  $B$ , las reacciones desconocidas incluyen:

1. La fuerza vertical  $R_B$
2. La fuerza vertical  $R_A$
3. El momento restrictivo  $M_A$

Las condiciones supuestas para esta viga son que los apoyos en  $A$  y  $B$  son absolutamente rígidos y que están al mismo nivel, y que la conexión en  $A$  impide la rotación de la viga en dicho punto. Por otra parte, el apoyo en  $B$  permite rotación y no puede resistir momentos.

Si se quita el apoyo en  $B$ , la viga se deflexionaría hacia abajo, como se muestra en la figura 13-10(a), una cantidad  $y_{B1}$  debido a la carga  $P$ . Ahora bien, si se quita la carga  $P$  y la reacción  $R_B$  se aplica hacia arriba en  $B$ , la viga se deflexionaría hacia arriba una cantidad  $y_{B2}$ , como se muestra en la figura 13-10(b). En realidad, ambas fuerzas están aplicadas, y la deflexión en  $B$  es *cero*. El principio de superposición permite concluir entonces que:

$$y_{B1} + y_{B2} = 0 \quad (13-1)$$

Esta ecuación, junto con las ecuaciones normales de equilibrio, permiten evaluar las tres incógnitas, como se demuestra en el ejemplo siguiente. Se debe reconocer que los princi-

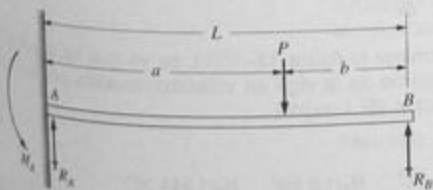


FIGURA 13-9 Viga en voladizo apoyada.



(a)



(b)

FIGURA 13-10 Superposición aplicada a la viga en voladizo apoyada.

pios de equilibrio estático siguen siendo válidos para vigas estáticamente indeterminadas. Sin embargo, no son suficientes para obtener una solución directa.

**Ejemplo 13-6** Determine las reacciones en los apoyos *A* y *B* de la viga en voladizo mostrada en la figura 13-9 suponiendo que la carga *P* es de 2600 N y que actúa a 1.20 m hacia afuera de *A*. La longitud total de la viga es de 1.80 m. En seguida dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos y diseñe la viga especificando una configuración, un material y sus dimensiones requeridas. Use un factor de diseño de 8 basado en la resistencia última puesto que la carga será repetida.

**Solución** **Objetivo** Determinar las reacciones en los apoyos, dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante y diseñar la viga.

**Datos** La carga aplicada a la viga mostrada en la figura 13-9.  $P = 2600$  N (repetida).  $L = 1.80$  m.  $a = 1.20$  m. Use un factor de diseño  $N = 8$  basado en  $s_u$ .

**Análisis** Se utiliza el método de superposición.

**Resultados** *Reacción en B,  $R_B$*

En primer lugar se determina la reacción en *B* con el método de superposición. La ecuación (13-1) establece que, en esta situación:

$$y_{B1} + y_{B2} = 0 \quad (13-1)$$

La ecuación para  $y_{B1}$  se puede determinar con las fórmulas de deflexión del apéndice A-23. Tal como se sugiere en la figura 13-10(a), se requiere la deflexión en el extremo de una viga en voladizo que soporta una carga intermedia. Por tanto:

$$y_{B1} = \frac{-Pa^2}{6EI}(3L - a)$$

en donde  $P = 2600$  N

$a = 1.20$  m

$L = 1.80$  m

Los valores de  $E$  e  $I$  aún no se conocen, pero la deflexión se puede expresar en función de  $EI$ .

$$\begin{aligned} y_{B1} &= \frac{(-2600 \text{ N})(1.20 \text{ m})^2}{6EI}[3(1.80 \text{ m}) - 1.20 \text{ m}] \\ &= \frac{-2621 \text{ N}\cdot\text{m}^3}{EI} \end{aligned}$$

Ahora al examinar la figura 13-10(b), se ve que se requiere la deflexión en el extremo de la viga en voladizo causada por la carga concentrada que actúa allí. Luego:

$$y_{B2} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{R_B(1.8 \text{ m})^3}{3EI} = \frac{R_B(1.944 \text{ m}^3)}{EI}$$

Con estos valores en la ecuación (13-1) se obtiene:

$$\frac{-2621 \text{ N}\cdot\text{m}^3}{EI} + \frac{R_B(1.944 \text{ m}^3)}{EI} = 0$$

El término  $EI$  se elimina, con lo que se obtiene la solución para  $R_B$ .

$$R_B = \frac{2621 \text{ N}\cdot\text{m}^3}{1.944 \text{ m}^3} = 1348 \text{ N}$$

Los valores de  $R_A$  y  $M_A$  se determinan ahora con las ecuaciones de equilibrio estático.

Reacción en A,  $R_A$

$$\sum F = 0 \quad (\text{in the vertical direction})$$

$$R_A + R_B - P = 0$$

$$R_A = P - R_B = 2600 \text{ N} - 1348 \text{ N} = 1252 \text{ N}$$

Momento flexionante en A,  $M_A$

Si se suman los momentos con respecto al punto A se obtiene:

$$0 = M_A - 2600 \text{ N} (1.2 \text{ m}) + 1348 \text{ N} (1.8 \text{ m})$$

$$M_A = 693 \text{ N}\cdot\text{m}$$

El signo positivo del resultado indica que el sentido supuesto del momento de reacción en la figura 13-9 es el correcto. Sin embargo, éste es un momento negativo porque hace que la viga se deflexione cóncava hacia abajo cerca del apoyo A.

*Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante*

Ahora ya se pueden dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante como se muestra en la figura 13-11, utilizando las técnicas tradicionales. El momento flexionante máximo ocurre en la carga donde  $M = 809 \text{ N}\cdot\text{m}$ .

*Diseño de la viga*

Ahora ya se puede diseñar la viga. Supóngase que la instalación real es similar a la ilustrada en la figura 13-12, con el extremo izquierdo de la viga soldado y con el extremo derecho apoyado en otra viga. Una barra rectangular trabajaría bien dispuesta de esta manera y se supondrá una relación de  $h = 3t$ . Un acero al carbón como el AISI 1040 laminado en caliente, proporciona una resistencia última de 621 MPa. Su porcentaje de alargamiento, 25%, sugiere una buena ductilidad, la que ayudará a resistir la repetición de las cargas. El diseño debe basarse en el esfuerzo flexionante:

$$\sigma = \frac{M}{S}$$

Pero sea:

$$\sigma = \sigma_s = \frac{S_u}{N} = \frac{621 \text{ MPa}}{8} = 77.6 \text{ MPa}$$

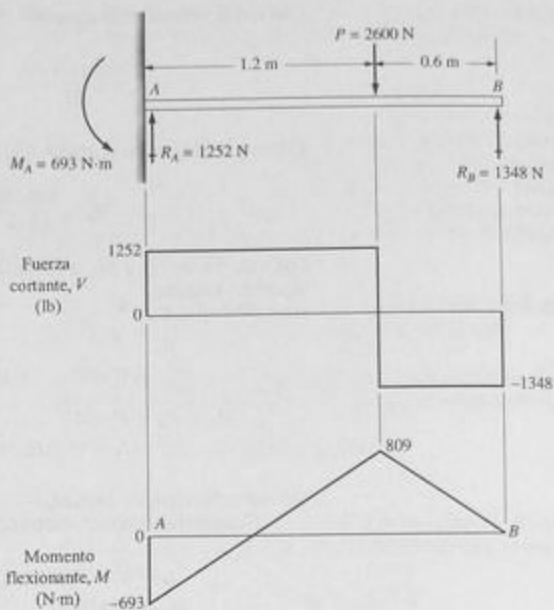


FIGURA 13-11 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga en voladizo apoyada del ejemplo 13-6.

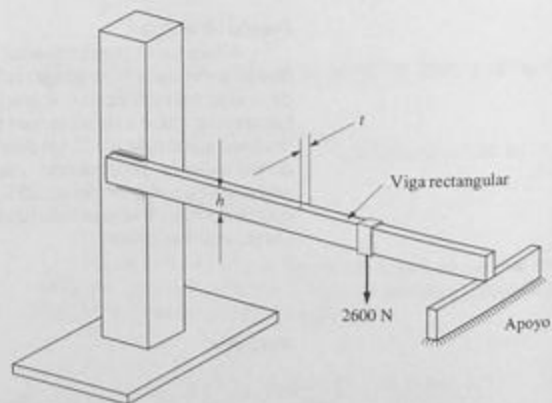


FIGURA 13-12 Montaje físico de una viga en voladizo apoyada.

Por consiguiente: 
$$S = \frac{M}{\sigma_d} = \frac{809 \text{ N}\cdot\text{m}}{77.6 \text{ N}/\text{mm}^2} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 10\,425 \text{ mm}^3$$

En el caso de una barra rectangular:

$$S = \frac{th^2}{6} = \frac{t(3t)^2}{6} = \frac{9t^3}{6} = 1.5t^3$$

Entonces:

$$1.5t^3 = 10\,425 \text{ mm}^3$$

$$t = 19.1 \text{ mm}$$

Se usa el tamaño de 20 mm para  $t$ . Por tanto:

$$h = 3t = 3(20 \text{ mm}) = 60 \text{ mm}$$

### Comentario

El diseño final se puede resumir como una barra rectangular de acero AISI 1040 laminado en caliente, de 20 mm de espesor y 60 mm de altura, con su extremo izquierdo soldado a un apoyo rígido y con su extremo derecho simplemente apoyado. El esfuerzo máximo en la barra sería menor de 77.6 MPa, y daría un factor de diseño de por lo menos 8 basado en la resistencia última.

El método de superposición se puede aplicar a cualquier viga en voladizo apoyada cuya ecuación de la deflexión provocada por la carga aplicada se puede determinar. Se puede usar cualquiera de las fórmulas de deflexión de vigas como las del apéndice, el método del área de momento o el método de análisis matemático desarrollado en el capítulo 12.

Las vigas continuas también se pueden analizar con el método de superposición. Considérese la viga sobre tres apoyos mostrada en la figura 13-13. Las tres reacciones en los apoyos desconocidas la hacen estáticamente indeterminada. La reacción  $R_C$  adicional se puede determinar con la técnica sugerida en la figura 13-14. Si se quita el apoyo en  $C$ , la viga experimentaría la deflexión  $y_{C1}$  hacia abajo debido a las cargas de 800 lb. Se puede usar el caso  $c$  del apéndice A-22 para determinar  $y_{C1}$ . Luego suponiendo que las cargas se

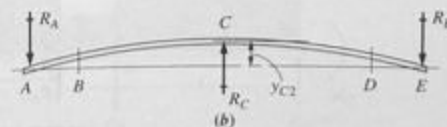
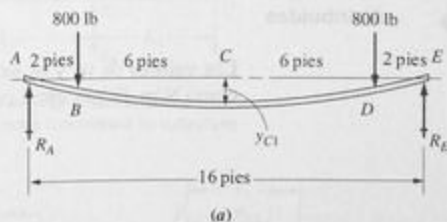


FIGURA 13-14 Superposición aplicada a una viga continua.

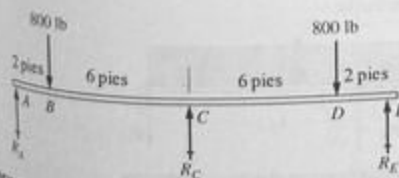


FIGURA 13-13 Viga continua.

retiran y que se reemplaza la reacción  $R_C$ , resultaría la deflexión hacia arriba  $y_C$ . Se pueden usar las fórmulas del caso *a* del apéndice A-22.

De nuevo en este caso, la deflexión real en *C* es cero debido al apoyo firme. Por consiguiente:

$$y_C + y_{C2} = 0$$

A partir de esta relación se puede calcular el valor de  $R_C$ . Las reacciones restantes  $R_A$  y  $R_B$  se determinan de la manera tradicional, lo que permite el trazo de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

### 13-5 VIGAS CONTINUAS—TEOREMA DE LOS TRES MOMENTOS

Con el *teorema de los tres momentos* se puede analizar una viga apoyada por cualquier número de apoyos. De hecho el teorema relaciona los momentos flexionantes en tres apoyos sucesivos entre sí y con las cargas que actúan en la viga. En el caso de una viga con únicamente tres apoyos, el teorema permite el cálculo directo del momento en el apoyo intermedio. Las condiciones conocidas en los extremos proporcionan datos para calcular los momentos en ellos. Luego se puede usar el principio de estática para determinar las reacciones.

En el caso de vigas con más de tres apoyos, el teorema se aplica en sucesión a juegos de tres apoyos adyacentes (dos claros), para obtener un juego de ecuaciones que se pueden resolver simultáneamente para los momentos desconocidos.

Se puede usar el teorema de los tres momentos para cualquier combinación de cargas. Se desarrollaron formas especiales del teorema para cargas uniformemente distribuidas y concentradas. En este capítulo se usarán estas formas.

**Cargas uniformemente distribuidas en claros adyacentes.** La figura 13-15 muestra la disposición de las cargas y la definición de los términos aplicables a la ecuación (13-2).

Ecuación de los tres momentos—cargas distribuidas



$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = \frac{-w_1 L_1^3}{4} - \frac{w_2 L_2^3}{4} \quad (13-2)$$

Los valores de  $w_1$  y  $w_2$  se expresan en unidades de fuerza por unidad de longitud tales como N/m, lb/pie, etc. Los momentos flexionantes en los apoyos *A*, *B* y *C* son  $M_A$ ,  $M_B$  y  $M_C$ .

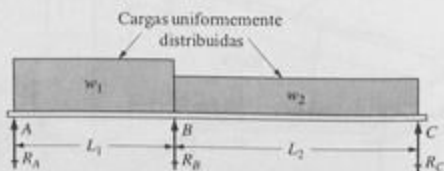


FIGURA 13-15 Cargas uniformemente distribuidas sobre una viga continua de dos claros.

$M_C$ . Si se conocen  $M_A$  y  $M_C$  en los extremos de la viga,  $M_B$  se determina de manera directa con la ecuación (13-2). La aplicación de esta ecuación se ilustrará con ejemplos.

El caso especial en que dos claros iguales soportan cargas uniformes permite simplificar la ecuación (13-2). Si  $L_1 = L_2 = L$  y  $w_1 = w_2 = w$ , entonces:

$$M_A + 4M_B + M_C = \frac{-wL^2}{2} \quad (13-3)$$

**Cargas concentradas en claros adyacentes.** Si los claros adyacentes soportan sólo una carga concentrada cada uno, como se muestra en la figura 13-16, entonces la ecuación (13-4) es aplicable.

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = \frac{-P_1 a}{L_1}(L_1^2 - a^2) - \frac{P_2 b}{L_2}(L_2^2 - b^2) \quad (13-4)$$

El caso especial de dos claros iguales que soportan cargas iguales centralmente colocadas permite simplificar la ecuación (13-4). Si  $P_1 = P_2 = P$  y  $a = b = L/2$ , entonces:

$$M_A + 4M_B + M_C = 3PL/4 \quad (13-5)$$

**Combinaciones de cargas uniformemente distribuidas y varias cargas concentradas.** Éste es un caso un tanto general, al permitir que cada claro soporte una carga uniformemente distribuida y cualquier número de cargas concentradas, como se

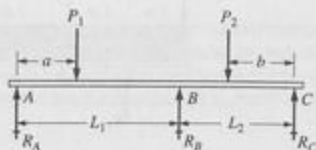


FIGURA 13-16 Viga continua de dos claros con una carga concentrada en cada claro.

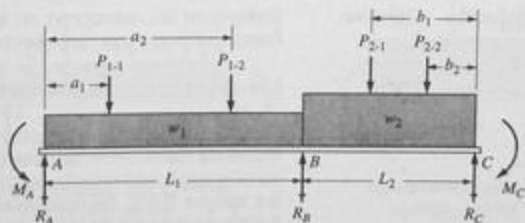


FIGURA 13-17 Notación general para los términos de la ecuación 13-6.



⇒ Ecuación de los tres momentos—  
forma general

indica en la figura 13-17. La ecuación general de una carga como esa es una combinación de las ecuaciones (13-2) y (13-4), dada como ecuación (13-6).

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\sum \left[ \frac{P_i a_i}{L_i} (L_i^2 - a_i^2) \right]_1 - \sum \left[ \frac{P_i b_i}{L_i} (L_i^2 - b_i^2) \right]_2 - \frac{w_1 L_1^3}{4} - \frac{w_2 L_2^3}{4} \quad (13-6)$$

El término entre corchetes con el subíndice 1 se tiene que evaluar para *cada* carga concentrada en el claro 1 y luego sumarse los resultados. Asimismo, el término del subíndice 2 se aplica repetidamente para todas las cargas que actúan el claro 2. Nótese que las distancias  $a_i$  se miden a partir de la reacción en A para cada carga que actúa en el claro 1, y las distancias  $b_i$  se miden a partir de la reacción en C para cada carga que actúa en el claro 2. Los momentos en los extremos A y C pueden ser producidos por momentos concentrados aplicados allí o por cargas aplicadas en extremos salientes más allá de los apoyos. Cualquiera de los términos de la ecuación (13-6) se puede ignorar en la solución de un problema si no existe una carga o momento apropiado en una sección particular para la que se va a escribir la ecuación. Se podrían incluir otras cargas concentradas además de las mostradas en la figura 13-17.

**Ejemplo 13-7**

Se tiene que analizar la combinación de cargas distribuidas y cargas concentradas mostrada en la figura 13-18, para determinar las reacciones en los tres apoyos y los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos. La viga de 17 m se va a usar como viga de piso en una nave industrial.

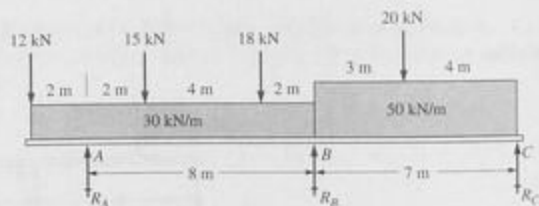


FIGURA 13-18 Viga del ejemplo 13-7.

- Solución**    **Objetivo**    Determinar las reacciones en los apoyos y dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.
- Datos**    Las cargas mostradas en la figura 13-18.
- Análisis**    Como el patrón incluye tanto cargas concentradas como cargas uniformemente distribuidas, se debe usar la ecuación (13-6). El subíndice 1 se refiere al claro 1 entre los apoyos A y B, y el subíndice 2 al claro 2 entre los apoyos B y C. Se debe evaluar la magnitud real de  $M_A$  y  $M_C$  para facilitar la solución de la ecuación (13-6). Como el punto C está en el extremo de una claro simplemente apoyado,  $M_C = 0$ . En el punto A se

puede considerar la parte saliente de la viga a la izquierda de  $A$  como un diagrama de cuerpo libre y luego sumar los momentos con respecto a  $A$  para determinar el momento interno en dicho punto. Junto con la carga de 12 kN a 2.0 m de  $A$ , actúa una resultante de la carga de 60 kN creada por la carga distribuida que actúa a 1.0 de  $A$ . Por tanto:

$$M_A = -12 \text{ kN} (2 \text{ m}) - 60 \text{ kN} (1 \text{ m}) = -84 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Se evaluará cada término restante en la ecuación (13-6).

$$\begin{aligned} M_A L_1 &= -84 \text{ kN}\cdot\text{m} (8 \text{ m}) = -672 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 \\ 2M_B(L_1 + L_2) &= 2M_B(8 + 7) = M_B(30 \text{ m}) \\ -\sum \left[ \frac{P_i a_i}{L_i} (L_i^2 - a_i^2) \right]_1 &= -\frac{15(2)}{8} (8^2 - 2^2) - \frac{18(6)}{8} (8^2 - 6^2) \\ &= -603 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 \\ -\sum \left[ \frac{P b_i}{L_i} (L_i^2 - b_i^2) \right]_2 &= -\frac{20(4)}{7} (7^2 - 4^2) = -377 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 \\ -\frac{w_1 L_1^3}{4} &= -\frac{30(8)^3}{4} = -3840 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 \\ -\frac{w_2 L_2^3}{4} &= -\frac{50(7)^3}{4} = -4288 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

Ahora con estos valores en la ecuación (13-6) se obtiene:

$$-672 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 + M_B(30 \text{ m}) + 0 = (-603 - 377 - 3840 - 4288) \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Resolviendo para  $M_B$  se obtiene:

$$M_B = 281 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

**Reacciones en los apoyos.** Los tres momentos calculados en los puntos de apoyo  $A$ ,  $B$  y  $C$  permiten calcular las reacciones en dichos puntos. El procedimiento de solución comienza al considerar cada uno de los claros como cuerpos libres separados, como se muestra en la figura 13-19.

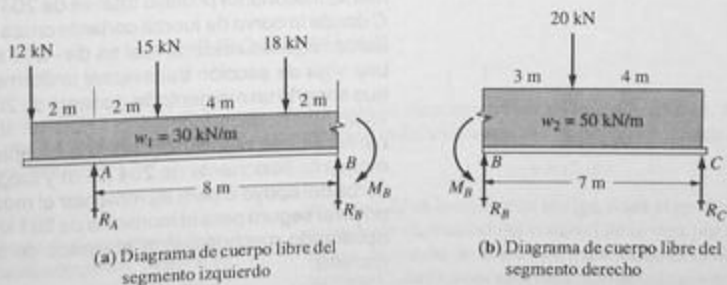


FIGURA 13-19 Diagramas de cuerpo libre de los segmentos de viga utilizados en las reacciones  $R_A$ ,  $R_B$  y  $R_C$ .

En cada caso, cuando la viga se divide en  $B$ , el momento  $M_B$  se muestra actuando en la sección cortada para mantener el equilibrio. Luego, utilizando el segmento izquierdo, se pueden sumar los momentos con respecto a  $B$  y resolver para la reacción izquierda,  $R_A$ .

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0 &= 12 \text{ kN}(10 \text{ m}) + 15 \text{ kN}(6 \text{ m}) + 300 \text{ kN}(5 \text{ m}) - 281 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ &\quad - R_A(8 \text{ m}) \\ R_A &= 183 \text{ kN}\end{aligned}$$

Asimismo, la utilización del segmento derecho y la suma de los momentos con respecto al punto  $B$  permiten calcular la reacción derecha,  $R_C$ .

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0 &= 20 \text{ kN}(3 \text{ m}) + 350 \text{ kN}(3.5 \text{ m}) - 281 \text{ kN}\cdot\text{m} - R_C(7 \text{ m}) \\ R_C &= 143 \text{ kN}\end{aligned}$$

Ahora se puede usar la  $\sum F_V = 0$  para calcular la reacción intermedia,  $R_B$ .

$$\begin{aligned}\sum F_V = 0 &= 12 \text{ kN} + 15 \text{ kN} + 18 \text{ kN} + 20 \text{ kN} + 300 \text{ kN} + 350 \text{ kN} \\ &\quad - 183 \text{ kN} - 143 \text{ kN} - R_B \\ R_B &= 389 \text{ kN}\end{aligned}$$

*Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.* Ya se tienen los datos necesarios para dibujar los diagramas completos, como se muestra en la figura 13-20.

**Comentario** En suma, las reacciones son:

$$\begin{aligned}R_A &= 183 \text{ kN} \\ R_B &= 389 \text{ kN} \\ R_C &= 143 \text{ kN}\end{aligned}$$

La figura 13-20 muestra que los máximos momentos flexionantes positivos locales ocurren entre los apoyos, y que los momentos máximos flexionantes negativos locales ocurren en los apoyos. El máximo momento flexionante positivo total es de 204 kN·m en un punto a 2.86 m de  $C$  donde la curva de fuerza cortante cruza el eje cero. El momento flexionante negativo máximo real es de -281 kN·m en el apoyo  $B$ . Si se usa una viga de sección transversal uniforme se tendría que diseñar para que soporte un momento flexionante de 281 kN·m. Pero nótese que éste es un pico perfectamente localizado en el diagrama de momento flexionante. Puede resultar económico diseñar la viga para que soporte el momento flexionante de 204 kN·m y luego agregar placas de refuerzo cerca del apoyo  $B$  para incrementar el módulo de sección en ese lugar a un nivel seguro para el momento de 281 kN·m. Probablemente usted ha observado muchos pasos elevados de carreteras diseñados de esta manera.

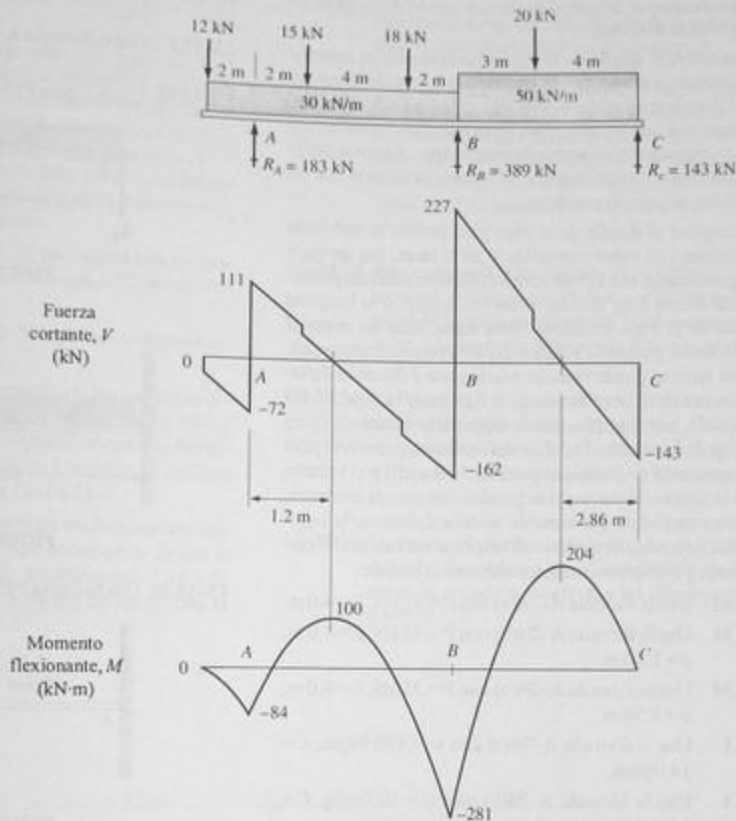


FIGURA 13-20 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del ejemplo 13-7.

## PROBLEMAS

Para los problemas 13-1 a 13-27, use las fórmulas del apéndice A-24 para completar cualquiera de lo siguiente según las instrucciones dadas para una tarea particular.

- Determine las reacciones y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos. Reporte la fuerza cortante máxima y el momento flexionante máximo e indique dónde ocurren.

- Quando se disponga de fórmulas de deflexión, calcule también la deflexión máxima de la viga expresada como:

$$y = C_d/EI$$

en donde  $EI$  es la rigidez de la viga, o sea el producto del módulo de elasticidad del material de la viga por el momento de inercia de la sección transversal de la viga. El término  $C_d$  será entonces el resultado del cálculo de todas las demás variables de la ecuación de deflexión para el

tipo de apoyos, longitud de claro, y patrón de carga particulares de una viga.

- c. Complete el diseño de la viga especificando un material adecuado, y el perfil y el tamaño para la sección transversal. La norma de diseño debe incluir la especificación con respecto a que los esfuerzos flexionantes y los esfuerzos cortantes sean seguros para el material dado. A menos que se especifique de otra manera en la tarea, considere que todas las cargas son estáticas.
- d. Complete el diseño de la viga para limitar la deflexión máxima a un valor especificado en la tarea. Sin un valor especificado, use  $L/360$  como deflexión máxima permisible donde  $L$  es el claro entre los apoyos o la longitud total de la viga. El diseño debe especificar un material adecuado, y el perfil y el tamaño de la sección transversal. Esta tarea se puede vincular con la parte *b* donde la deflexión se calculó en función de la rigidez de la viga,  $EI$ . En seguida, por ejemplo, puede especificar el material y su valor de  $E$ , calcular la deflexión limitante, y resolver para el momento de inercia requerido,  $I$ . El perfil y el tamaño de la sección transversal se pueden determinar entonces. Tenga en cuenta que también se debe demostrar la seguridad de cualquier diseño con respecto a esfuerzos flexionantes y esfuerzos cortantes como en el inciso *c*.

- 13-1.M Use la fórmula A-24(a) con  $P = 35 \text{ kN}$ ,  $L = 4.0 \text{ m}$ .
- 13-2.M Use la fórmula A-24(b) con  $P = 35 \text{ kN}$ ,  $L = 4.0 \text{ m}$ ,  $a = 1.50 \text{ m}$ .
- 13-3.M Use la fórmula A-24(b) con  $P = 35 \text{ kN}$ ,  $L = 4.0 \text{ m}$ ,  $a = 2.50 \text{ m}$ .
- 13-4.I Use la fórmula A-24(c) con  $w = 400 \text{ lb/plg}$ ,  $L = 14.0 \text{ pies}$ .
- 13-5.I Use la fórmula A-24(c) con  $w = 50 \text{ lb/plg}$ ,  $L = 16.0 \text{ plg}$ .
- 13-6.I Use la fórmula A-24(d) con  $P = 350 \text{ lb}$ ,  $L = 10.8 \text{ plg}$ ,  $a = 2.50 \text{ plg}$ .
- 13-7.M Use la fórmula A-24(e) con  $P = 35 \text{ kN}$ ,  $L = 4.0 \text{ m}$ .
- 13-8.M Use la fórmula A-24(f) con  $P = 35 \text{ kN}$ ,  $L = 4.0 \text{ m}$ ,  $a = 1.50 \text{ m}$ .
- 13-9.M Use la fórmula A-24(f) con  $P = 35 \text{ kN}$ ,  $L = 4.0 \text{ m}$ ,  $a = 2.50 \text{ m}$ .
- 13-10.I Use la fórmula A-24(g) con  $w = 400 \text{ lb/pie}$ ,  $L = 14.0 \text{ pies}$ .
- 13-11.I Use la fórmula A-24(g) con  $w = 50 \text{ lb/plg}$ ,  $L = 16.0 \text{ plg}$ .
- 13-12.I Use la fórmula A-24(h) con  $w = 400 \text{ lb/pie}$ ,  $L = 7 \text{ pies}$ .
- 13-13.I Use la fórmula A-24(h) con  $P = 50 \text{ lb/plg}$ ,  $L = 8.0 \text{ plg}$ .
- 13-14.I Use la fórmula A-24(i) con  $w = 400 \text{ lb/pie}$ ,  $L = 56 \text{ plg}$ .
- 13-15.I Use la fórmula A-24(i) con  $w = 50 \text{ lb/plg}$ ,  $L = 5.333 \text{ plg}$ .

- 13-16.I Use la fórmula A-24(j) con  $w = 400 \text{ lb/pie}$ ,  $L = 3.5 \text{ pies}$ .
- 13-17.I Use la fórmula A-24(j) con  $w = 50 \text{ lb/plg}$ ,  $L = 4.0 \text{ plg}$ .
- 13-18.M Use la figura P13-1.

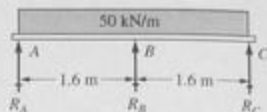


FIGURA P13-1

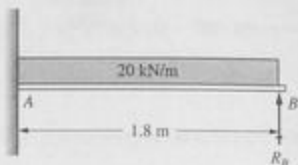


FIGURA P13-2

- 13-19.M Use la figura P13-2.

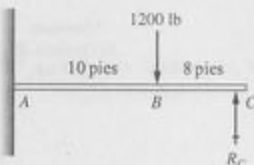


FIGURA P13-3

- 13-20.I Use la figura P13-3.
- 13-21.M Use la fórmula A-24(d) con  $P = 18 \text{ kN}$ ,  $L = 2.75 \text{ m}$ ,  $a = 1.40 \text{ m}$ .
- 13-22.I Use la fórmula A-24(f) con  $P = 8500 \text{ lb}$ ,  $L = 109 \text{ plg}$ ,  $a = 75 \text{ plg}$ .
- 13-23.I Use la fórmula A-24(h) con  $w = 4200 \text{ lb/pie}$ ,  $L = 16.0 \text{ pies}$ .
- 13-24.M Use la fórmula A-24(i) con  $w = 50 \text{ kN/m}$ ,  $L = 3.60 \text{ pies}$ .
- 13-25.I Use la fórmula A-24(j) con  $w = 15 \text{ lb/plg}$ ,  $L = 36 \text{ plg}$ .
- 13-26.I Use la fórmula A-24(e) con  $P = 140 \text{ lb}$ ,  $L = 54 \text{ plg}$ .
- 13-27.M Use la fórmula A-24(b) con  $P = 250 \text{ N}$ ,  $L = 55 \text{ mm}$ ,  $a = 15 \text{ mm}$ .
- 13-28.M Compare los problemas 13-4, 13-10, 13-12, 13-14 y 13-16 con respecto a los valores máximos de fuerza cortante, momento flexionante y deflexión.
- 13-29.M Compare los problemas 13-5, 13-11, 13-13, 13-15 y 13-17 con respecto a los valores máximos de

fuerza cortante, momento flexionante y deflexión.

- 13-30.I Especifique un diseño adecuado para una viga simplemente apoyada en sus extremos, que se va a someter a una carga uniformemente distribuida de 120 lb/pie en un claro de 24 pies. La viga debe ser segura tanto a esfuerzo flexionante como a esfuerzo cortante y además debe ser de pino del sur grado núm. 2. En seguida calcule la deflexión máxima de la viga que diseñó.
- 13-31.I Repita el problema 13-30 pero ahora con un apoyo adicional a la mitad de la viga, a 12 pies de uno u otro extremo.
- 13-32.I Repita el problema 13-30 con cuatro apoyos separados 8 pies entre sí.
- 13-33.I Compare el comportamiento de las tres vigas diseñadas en los problemas 13-30, 13-31 y 13-32 con respecto a fuerza cortante, momento flexionante y deflexión máxima. Complete el análisis como en los problemas 13-1 a 13-5.
- 13-34.I Un tablón de una cubierta de madera soporta una carga como la del caso *j* del apéndice A-24 con  $w = 100 \text{ lb/pie}$  y  $L = 24 \text{ plg}$ . El tablón es de  $2 \times 6$  y de 1.50 plg de espesor y 5.50 plg de ancho con la

dimensión larga horizontal. ¿Sería seguro el tablón si fuera de pino del sur grado núm. 2.

- 13-35.M Se proponen dos diseños para un trampolín, como se muestra en la figura P13-4. Compare los diseños con respecto a fuerza cortante, momento flexionante y deflexión. Expresé la deflexión en términos de la rigidez de la viga,  $EI$ . Observe qué casos de los apéndices A-22 y A-24 se pueden usar.
- 13-36.M Para cada uno de los diseños del problema 13-35 mostrados en la figura P13-4, especifique el material, la sección transversal y las dimensiones finales. El trampolín debe ser de 600 mm de ancho.
- 13-37.M La figura P13-5 muestra una viga de techo de un andén de carga de una nave industrial. Calcule las reacciones en los apoyos y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos.
- 13-38.M Complete el diseño de la viga para el techo que describe el problema 13-37, especificando el material, la sección transversal y las dimensiones finales.

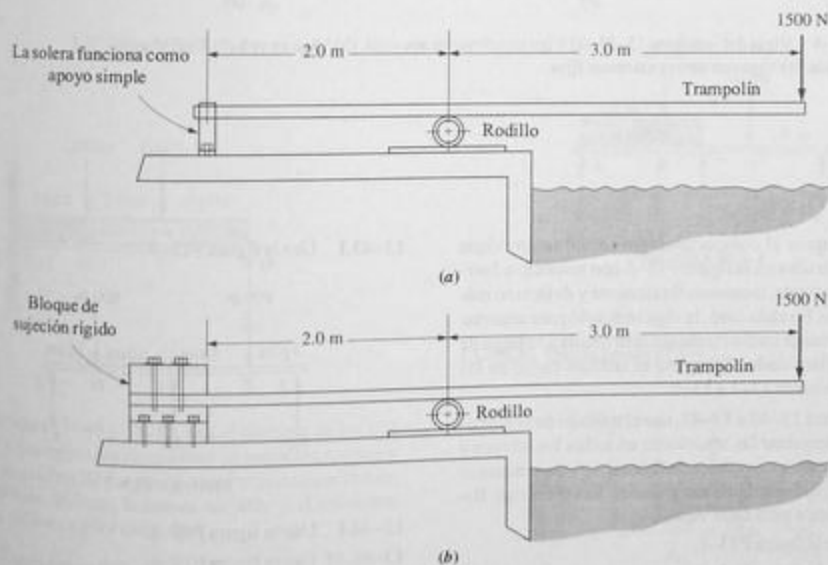


FIGURA P13-4 Propuestas para los trampolines de los problemas 13-35 y 13-36. (a) Apoyos simples con un extremo saliente. (b) Viga en voladizo apoyada con un extremo saliente.



FIGURA P13-5 Viga de techo del andén de carga de los problemas 13-37 y 13-38.

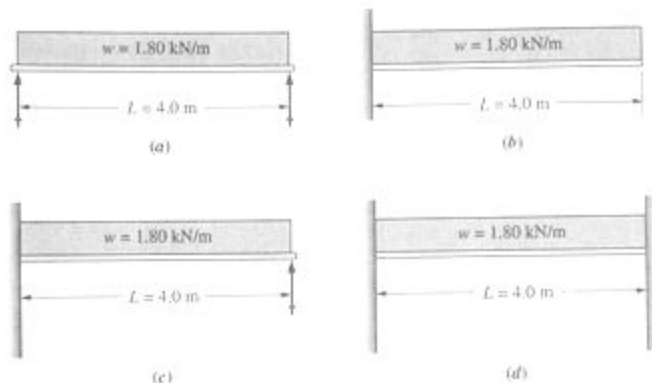


FIGURA P13-6 Vigas del problema 13-39. (a) Viga simplemente apoyada. (b) Viga en voladizo. (c) Viga en voladizo apoyada. (e) Viga con ambos extremos fijos.

- 13-39.M Compare el comportamiento de las cuatro vigas mostradas en la figura P13-6 con respecto a fuerza cortante, momento flexionante y deflexión máxima. En cada caso, la viga se diseñó para soportar una carga uniformemente distribuida a lo largo de un claro dado. Complete el análisis como en los problemas 13-1 a 13-5.

En los problemas 13-40 a 13-47, use el método de superposición para determinar las reacciones en todos los apoyos y dibuje los diagramas completos de fuerza cortante y momento flexionante. Indique la fuerza cortante y el momento flexionante máximos para cada viga.

- 13-40.M Use la figura P13-1.  
13-41.M Use la figura P13-2.  
13-42.I Use la figura P13-3.

- 13-43.I Use la figura P13-7.

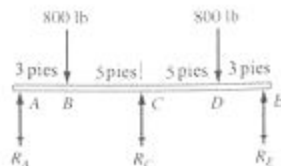


FIGURA P13-7

- 13-44.I Use la figura P13-8.  
13-45.M Use la figura P13-9.  
13-46.M Use la figura P13-10.  
13-47.I Use la figura P13-11.

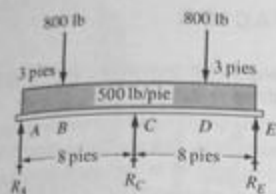


FIGURA P13-8

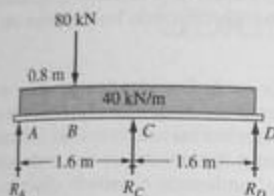


FIGURA P13-9

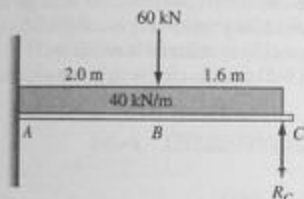


FIGURA P13-10

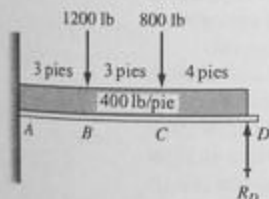


FIGURA P13-11

En los problemas 13-48 a 13-55, use el teorema de los tres momentos y determine las reacciones en todos los apoyos y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos. Indique la fuerza cortante y el momento flexionante máximos para cada viga.

13-48.M Use la figura P13-1.

13-49.I Use la figura P13-7.

13-50.I Use la figura P13-8.

13-51.M Use la figura P13-9.

13-52.M Use la figura P13-12.

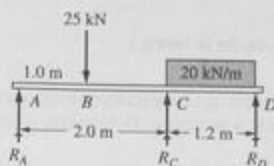


FIGURA P13-12

13-53.M Use la figura P13-13.

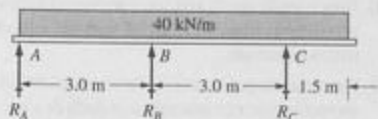


FIGURA P13-13

13-54.M Use la figura P13-14.

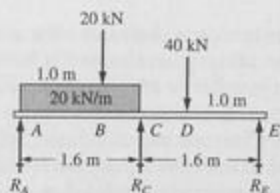


FIGURA P13-14

13-55.M Use la figura P13-15.

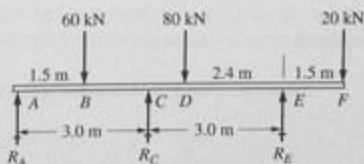


FIGURA P13-15



1. Escriba un programa para calcular las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes críticos para cualquiera de los tipos de viga estáticamente indeterminada del apéndice A-24.

## Ampliaciones de la tarea 1

- Use el modo gráfico para trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos de las vigas.
- Calcule el módulo de sección requerido de la sección transversal de la viga para limitar el esfuerzo causado por flexión a una cantidad especificada.
- Incluya una tabla de propiedades de sección para vigas de patín ancho de acero e indague los tamaños adecuados para soportar la carga.
- Suponiendo que la sección transversal de la viga será una sección transversal circular sólida, calcule el diámetro requerido.
- Suponiendo que la sección transversal de la viga será un rectángulo con una relación dada de altura a espesor, calcule las dimensiones requeridas.
- Suponiendo que la sección transversal de la viga será

un rectángulo con una altura  $o$  espesor dado, calcule la otra dimensión requerida.

- Suponiendo que la viga tiene que ser de madera y de perfil rectangular, calcule el área requerida de la sección transversal de la viga para limitar el esfuerzo cortante a un valor especificado. Use la fórmula de cortante especial para vigas rectangulares del capítulo 9.
  - Añada el cálculo de la deflexión en puntos específicos de la viga utilizando las fórmulas del apéndice A-24.
- Combine dos o más fórmulas del apéndice A-22 en un programa con el objeto de usar el método de superposición para determinar las reacciones, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en una viga estáticamente indeterminada utilizando el método descrito en la sección 13-4.
  - Escriba un programa para solucionar la ecuación (13-6), el teorema de los tres momentos aplicado a una viga continua de dos claros con combinaciones de cargas uniformemente distribuidas y varias cargas concentradas. Observe que esta ecuación se reduce a la ecuación (13-2), (13-3), (13-4) o (13-5) cuando ciertos términos son cero.

# 14

## Columnas

### 14-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

*Una columna es un miembro relativamente largo, cargado a compresión.*

El análisis de columnas es diferente de lo antes estudiado porque el modo de falla es diferente. En el capítulo 3, cuando se analizó el esfuerzo de compresión, se supuso que el miembro fallaba por cedencia del material cuando se aplicaba un esfuerzo mayor que la resistencia a la cedencia del material. Esto es cierto en el caso de miembros cortos.

Una columna alta esbelta falla por *pandeo*, nombre común que recibe la *inestabilidad elástica*. En lugar de aplastar o desmembrar el material, la columna se deflexiona de manera drástica a una cierta carga crítica y luego se desploma repentinamente. Se puede usar cualquier miembro delgado para ilustrar el fenómeno de pandeo. Inténtelo con una regla de madera o plástico, una barra o solera delgada de metal, o un popote para beber. Al irse incrementando la fuerza de manera gradual, aplicada directamente hacia abajo, se alcanza la carga crítica cuando la columna comienza a flexionarse. Normalmente, se puede retirar la carga sin que provoque un daño permanente puesto que no hay cedencia. Así pues, una columna falla por pandeo a un esfuerzo menor que la resistencia a la cedencia del material en la columna. El objetivo de los métodos de análisis de columnas es predecir la carga o el nivel de esfuerzo al cual una columna se volvería inestable y se pandearía.

Después de terminar el estudio de este capítulo, el lector será capaz de:

1. Definir una *columna*.
2. Diferenciar entre una columna y un miembro corto sometido a compresión.
3. Describir el fenómeno de *pandeo*, también llamado *inestabilidad elástica*.

4. Definir *radio de giro* de la sección transversal de una columna y ser capaz de calcular su magnitud.
5. Entender que es de esperarse que una columna se pandee con respecto al eje para el cual el radio de giro es mínimo.
6. Definir el *factor de fijación de los extremos*,  $K$ .
7. Especificar el valor apropiado del factor de fijación de los extremos,  $K$ , según los tipos de apoyos de los extremos de una columna.
8. Definir *longitud efectiva*,  $L_e$ .
9. Definir *razón de esbeltez* y calcular su valor.
10. Definir *razón de esbeltez de transición*, también conocida como *constante de columna*,  $C_C$ , y calcular su valor.
11. Usar los valores de la razón de esbeltez y de la constante de columna para determinar cuándo una columna es *larga* o *corta*.
12. Usar la *fórmula de Euler* para calcular la carga de pandeo crítica en columnas largas.
13. Usar la *fórmula de J. B. Johnson* para calcular la carga crítica en columnas cortas.
14. Aplicar un factor de diseño a la carga crítica de pandeo para determinar la *carga permisible* en una columna.
15. Reconocer los perfiles eficientes para secciones transversales de columna.
16. Diseñar columnas para que soporten con seguridad cargas axiales de compresión dadas.
17. Aplicar las especificaciones del American Institute of Steel Construction (AISC) al análisis de columnas.
18. Aplicar la especificación de la Aluminum Association al análisis de columnas.

## 14-2 RAZÓN DE ESBELTEZ

Hemos definido a la columna como un miembro esbelto relativamente largo cargado a compresión. Esta descripción se plantea en términos relativos y no es muy útil para el análisis.

La medida de la esbeltez de una columna ha de tener en cuenta la longitud, el perfil de la sección transversal y las dimensiones de la columna, y la manera de sujetar los extremos de la columna en las estructuras que generan las cargas y las reacciones en la columna. La medida de esbeltez comúnmente utilizada es la *razón de esbeltez*, definida como:



**Razón de esbeltez**

$$SR = \frac{KL}{r} = \frac{L_e}{r} \quad (14-1)$$

en donde  $L$  = *longitud real* de la columna entre los puntos de apoyo o de restricción lateral

$K$  = *factor de fijación de los extremos*

$L_e$  = *longitud efectiva*, teniendo en cuenta la manera de fijar los extremos (observe que  $L_e = KL$ )

$r$  = *radio de giro mínimo* de la sección transversal de la columna

A continuación se analiza cada uno de estos términos.

**Longitud real,  $L$ .** En una columna simple con la carga aplicada en un extremo y la reacción creada en el otro, la longitud real es, obviamente, la longitud entre sus extremos. Pero en componentes de estructuras cargados a compresión que disponen de medios de sujeción laterales que impiden que se pandee, la longitud real se considera entre los puntos de restricción. Cada una de las partes, entonces, se considera como una columna aparte.

**Factor de fijación de los extremos,  $K$ .** El factor de fijación de los extremos mide el grado de limitación contra rotación de cada extremo. Por lo general, se consideran tres tipos clásicos de conexiones de extremos: el extremo de pasador, el extremo fijo y el extremo libre. La figura 14-1 muestra varias combinaciones de tipos de extremos con los valores correspondientes de  $K$ . Obsérvese que se dan dos valores de  $K$ . Uno es el valor teórico y el otro es el que por lo general se usa en situaciones prácticas, aunque se debe reconocer que es difícil lograr el extremo verdaderamente fijo, como se verá a continuación.

Los extremos de pasador están imposibilitados contra rotación. Cuando una columna con sus dos extremos de pasador se pandea, adopta la forma de una curva uniforme entre sus extremos, como se muestra en la figura 14(a). Éste es el caso básico de pandeo de columna y el valor de  $K = 1.0$  se aplica a columnas con dos extremos de pasador. Un tipo ideal de extremo de pasador es la articulación de rótula que permite el giro de la columna en cualquier dirección con respecto a cualquier eje. Una junta de pasador cilíndrico, permite la libre rotación con respecto al eje del pasador, aunque crea algo de restricción en el plano perpendicular a su eje. Por esta razón se debe tener cuidado al aplicar factores de fijación a pasadores cilíndricos. Se supone que el extremo de pasador está guiado de tal modo que la línea de acción de la carga axial no cambia.

En teoría, los extremos fijos impiden perfectamente la rotación de columna en sus extremos. A medida que la columna tiende a pandearse, la curva de deflexión del eje de la

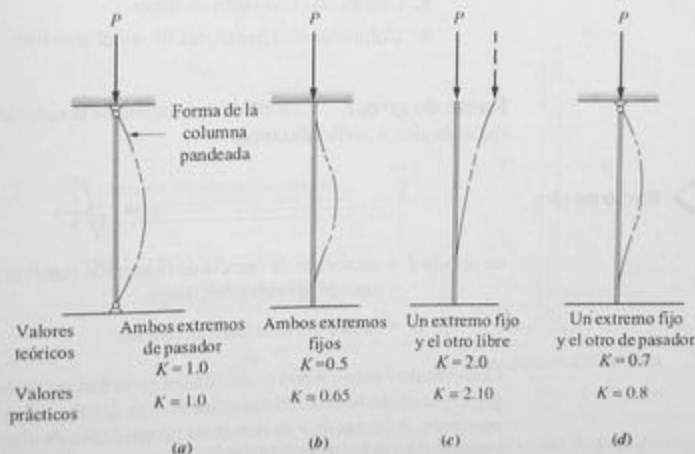


FIGURA 14-1 Valores de  $K$  para longitud efectiva,  $L_e = KL$ , para diferentes conexiones de extremos.

columna debe aproximarse al extremo fijo con una pendiente cero, como se ilustra en la figura 14-1(b). La figura pandeada se arquea hacia afuera a la mitad pero exhibe dos puntos de inflexión donde se invierte la dirección de la curvatura cerca de los extremos. El valor teórico del factor de fijación de los extremos es  $K = 0.5$ , el cual indica que la columna actúa como si fuera sólo la mitad de larga de lo que realmente es. Las columnas con extremos fijos son mucho más rígidas que las columnas con extremos de pasador y, por consiguiente, son capaces de soportar cargas mayores antes de pandearse. Se debe entender que es muy difícil fijar los extremos de una columna a la perfección. Se requiere que la conexión a la columna sea rígida y firme y que la estructura a la que se transfieren las cargas también sea rígida y firme. Por ello, en la práctica se recomienda el valor mayor de  $K = 0.65$ .

El extremo libre de una columna puede girar y también trasladarse. Pero como puede moverse en cualquier dirección, éste es el peor caso de fijación de los extremos de una columna. El único modo práctico de usar una columna con un extremo libre es tener el extremo opuesto fijo, como se ilustra en la figura 14.1(c). Una columna como ésta en ocasiones se conoce como el caso del *astabandera* porque el extremo fijo se comporta como un astabandera insertada profundamente en un orificio de ajuste apretado, mientras el otro extremo libre puede moverse en cualquier dirección. Conocida como la condición de extremo libre, el valor teórico de  $K$  es 2.0. Un valor práctico es  $K = 2.10$ .

En la figura 14-1(d) se muestra la combinación de un extremo fijo y un extremo de pasador. Nótese que la curva de deflexión se aproxima al extremo fijo con una pendiente cero mientras que el extremo de pasador gira libremente. El valor teórico de  $K = 0.7$  se aplica a esa condición de fijación mientras que en la práctica se recomienda  $K = 0.80$ .

**Longitud efectiva,  $L_e$ .** La longitud efectiva combina la longitud real con el factor de fijación de extremos;  $L_e = KL$ . En los problemas de este libro se usan los valores prácticos recomendados del factor de fijación de extremos, como se muestra en la figura 14-1. En suma, para calcular la longitud efectiva se usarán las siguientes relaciones:

### ➡ Longitud efectiva

- |   |                         |
|---|-------------------------|
| 1. Columnas con extremos de pasador:            | $L_e = KL = 1.0(L) = L$ |
| 2. Columnas con extremos fijos:                 | $L_e = KL = 0.65(L)$    |
| 3. Columnas con extremos libres:                | $L_e = KL = 2.10(L)$    |
| 4. Columnas con pasadores fijos y el otro fijo: | $L_e = KL = 0.80(L)$    |

**Radio de giro,  $r$ .** La medida de esbeltez de la sección transversal de la columna es su radio de giro,  $r$ , definida como:

### ➡ Radio de giro

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (14-2)$$

en donde  $I$  = momento de inercia de la sección transversal de la columna con respecto a uno de los ejes principales.

$A$  = área de la sección transversal.

Como tanto  $I$  como  $A$  son propiedades geométricas de la sección transversal, el radio de giro,  $r$ , también lo es. En el apéndice A-1 se dan fórmulas para calcular  $r$  de varios perfiles comunes. Además de  $r$  se dan otras propiedades de algunos de los perfiles estándar del apéndice. Para los que no se da  $r$ , con los valores disponibles de  $I$  y  $A$  y la ecuación (14-2) se puede calcular  $r$  de manera muy simple.

Nótese que el valor del radio de giro,  $r$ , depende del eje con respecto al cual se va a calcular. En la mayoría de los casos, se tiene que determinar el eje con respecto al cual el *radio de giro es mínimo*, porque ése es el eje con respecto al cual la columna probablemente se pandeará. Considérese, por ejemplo, una columna de sección rectangular cuyo ancho sea mucho mayor que su espesor, como se ilustra en la figura 14-2. Se puede usar una regla graduada simple para demostrar que cuando se carga a compresión axial una peca o ninguna restricción en los extremos, la columna siempre se pandeará con respecto al eje que pasa por la dimensión mínima. En el caso del rectángulo mostrado en las figuras 14-2(b) y (c):

$$r_{\min} = r_Y = 0.289t$$

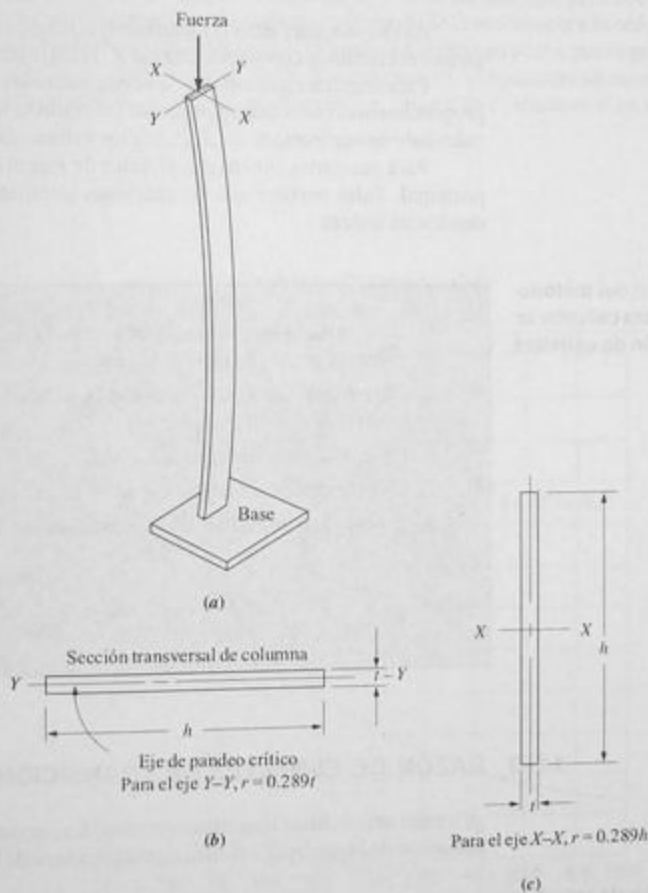


FIGURA 14-2 Pandeo de una columna rectangular esbelta. (a) Apariencia general de la columna pandeada. (b) Radio de giro con respecto al eje Y-Y. (c) Radio de giro con respecto al eje X-X.

en donde  $t$  es el espesor del rectángulo. Nótese que:

$$r_x = 0.289h$$

en donde  $h$  es la altura del rectángulo y que  $h > t$ . Por tanto:

$$r_x > r_y$$

y por tanto  $r_y$  es el radio mínimo de giro en la sección.

Para las vigas de patín ancho (apéndice A-7) y para las vigas American Standard (Apéndice A-8), el valor mínimo de  $r$  es el calculado con respecto al eje  $Y-Y$ ; es decir:

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Asimismo, para tubería estructural rectangular (apéndice A-9), el radio mínimo de giro es el calculado con respecto al eje  $Y-Y$ . En la tabla se dan valores de  $r$ .

Para ángulos estructurales de acero, llamados perfiles  $L$ , ni el eje  $X-X$  ni el eje  $Y-Y$  proporcionan el radio de giro mínimo. Tal como se ilustra en el apéndice A-5, el  $r_{\min}$  es el calculado con respecto al eje  $Z-Z$ , con los valores dados en la tabla.

Para secciones simétricas, el valor de  $r$  es el mismo con respecto a cualquier eje principal. Tales perfiles son las secciones circulares sólidas o huecas y las secciones cuadradas huecas.


#### Resumen del método para calcular la razón de esbeltez

1. Determine la longitud real de la columna,  $L$ , entre los puntos extremos o entre los puntos de restricción lateral.
2. Determine el factor de fijación de extremos con base en el tipo de apoyo de los extremos y en la figura 14-1.
3. Calcule la longitud efectiva,  $L_e = KL$ .
4. Calcule el radio *mínimo* de giro de la sección transversal de la columna.
5. Calcule la razón de esbeltez por medio de:

$$SR = \frac{L_e}{r_{\min}}$$

### 14-3 RAZÓN DE ESBELTEZ DE TRANSICIÓN

¿Cuándo se considera larga una columna? La respuesta a esta pregunta requiere la determinación de la *razón de esbeltez de transición*, o de la constante de columna  $C_c$ .

 Razón de esbeltez  
de transición

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{s_y}} \quad (14-3)$$

Las reglas siguientes tienen que ver con el valor de  $C_c$ .

Si la razón de esbeltez efectiva real,  $L_e/r$  es mayor que  $C_c$ , entonces la columna es larga, y al analizar la columna se debe usar la fórmula de Euler.

Si la razón real,  $L_e/r$  es menor que  $C_c$ , entonces la columna es corta. En este caso, se debe usar la fórmula de J. B. Johnson, los reglamentos especiales o la fórmula del esfuerzo de compresión directo, como se verá en secciones posteriores.

Cuando se va a analizar una columna dada para determinar la carga que soportará, en primer lugar habrá que calcular el valor de  $C_c$  y la razón real  $L_e/r$  para decidir qué método de análisis se debe usar. Nótese que  $C_c$  depende de la resistencia a la cedencia,  $s_y$ , y del módulo de elasticidad  $E$  del material. Cuando se trabaja con acero, por lo general se considera  $E = 207 \text{ GPa}$  ( $30 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$ ). Con este valor y suponiendo un intervalo de valores de resistencia a la cedencia, se obtienen los valores de  $C_c$  mostrados en la figura 14-3.

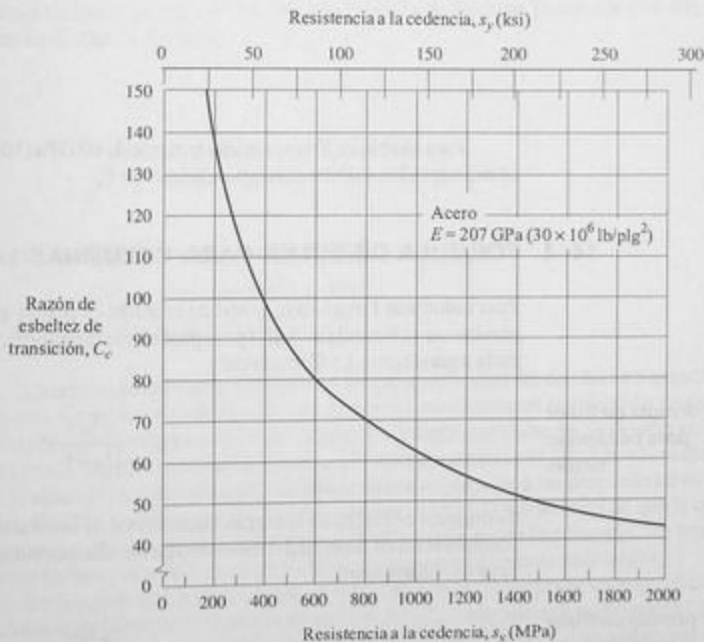


FIGURA 14-3 Razón de esbeltez de transición  $C_c$  contra resistencia a la cedencia del acero.



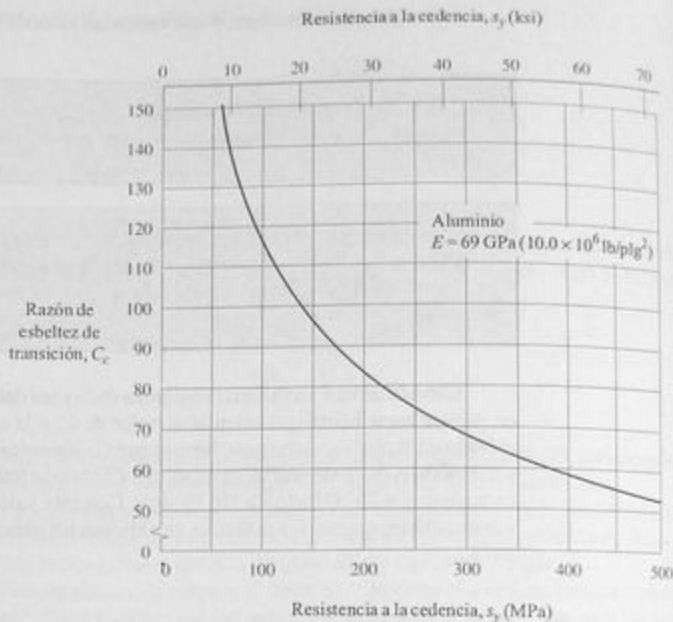


FIGURA 14-4 Razón de esbeltez de transición  $C_{cr}$  contra resistencia a la cedencia del aluminio.

Para aluminio,  $E$  es aproximadamente de  $69 \text{ GPa } (10 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2)$ . En la figura 14-4 se muestran los valores correspondientes de  $C_{cr}$ .

#### 14-4 FÓRMULA DE EULER PARA COLUMNAS LARGAS

Para columnas largas cuya razón de esbeltez es mayor que el valor de transición  $C_{cr}$ , se puede usar la fórmula de Euler para predecir la carga crítica con la que la columna comenzaría a pandearse. La fórmula es:

➡ **Fórmula de Euler para columnas largas**

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{(L_e/r)^2} \quad (14-4)$$

en donde  $A$  es el área de la sección transversal de la columna. Otra forma de expresar esta fórmula sería en función del momento de inercia, puesto que  $r^2 = I/A$ . Entonces, la fórmula se transforma en:

➡ **Fórmula de Euler para columnas largas**

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (14-5)$$

## 14-5 FÓRMULA DE J. B. JOHNSON PARA COLUMNAS CORTAS

Si la razón de esbeltez efectiva real de una columna,  $L_e/r$ , es menor que el valor de transición  $C_c$ , la fórmula de Euler predice una carga crítica exorbitante. Una fórmula recomendada para el diseño de máquinas en el intervalo de  $L_e/r$  menor que  $C_c$  es la fórmula de J. B. Johnson.

Fórmula de J. B. Johnson para columnas cortas

$$P_{cr} = A s_c \left[ 1 - \frac{s_c (L_e/r)^2}{4\pi^2 E} \right] \quad (14-6)$$

Ésta es una forma de un conjunto de ecuaciones llamadas ecuaciones parabólicas, y concuerda perfectamente bien con el comportamiento de columnas de acero de maquinaria típica.

La fórmula de Johnson da el mismo resultado que la fórmula de Euler de la carga crítica a la razón de esbeltez de transición  $C_c$ . Entonces, en el caso de columnas muy cortas, la carga crítica se aproxima a la pronosticada por la ecuación del esfuerzo de compresión directo,  $\sigma = P/A$ . Por consiguiente, se puede decir que la fórmula de Johnson se aplica mejor a columnas de longitud intermedia.

## 14-6 FACTORES DE DISEÑO PARA COLUMNAS Y CARGA PERMISIBLE

Debido a que una columna falla por pandeo y por falla última o cedencia del material, los métodos antes utilizados para calcular el esfuerzo de diseño no se aplican a columnas.

Así que, la *carga permisible* se calcula dividiendo la carga de pandeo crítica con la fórmula de Euler [ecuación (14-4)] o la fórmula de Johnson [ecuación (14-6)] por un factor de diseño,  $N$ . Es decir:

Carga permisible sobre una columna

$$P_a = \frac{P_{cr}}{N} \quad (14-7)$$

en donde  $P_a$  = carga segura permisible

$P_{cr}$  = carga de pandeo crítica

$N$  = factor de diseño

La selección del factor de diseño es la responsabilidad del diseñador a menos que el proyecto figure en un reglamento. Los factores a considerar en la selección de un factor de diseño son similares a los utilizados para determinar factores de diseño aplicados a esfuerzos. Un factor común utilizado en el diseño mecánico es  $N = 3.0$ , y la razón por la que se seleccionó este valor es la incertidumbre con respecto a las propiedades del material, la fijación de los extremos, lo recto de la columna o la posibilidad de que la carga se aplique con algo de excentricidad y no a lo largo del eje de la columna. En ocasiones se usan factores mayores en situaciones críticas y para columnas muy largas.

En la construcción de edificios, donde el diseño está regido por las especificaciones del American Institute of Steel Construction, AISC, se recomienda un factor de 1.92 para columnas largas. La Aluminum Association requiere  $N = 1.95$  para columnas largas. Véanse las secciones 14-9 y 14-10.

## 14-7 RESUMEN-MÉTODO DE ANÁLISIS DE COLUMNAS

El objetivo de esta sección es resumir los conceptos presentados en las secciones 14-2 a 14-6 en un procedimiento que se pueda usar para analizar columnas. Se puede aplicar a columnas rectas de sección transversal uniforme a lo largo de ellas, en las que la carga de compresión se aplica alineada con el eje centroidal de la columna. En fin de cuentas, se supone que se conocen los factores siguientes:

Método de análisis de columnas

1. La longitud real,  $L$ .
2. La manera de conectar la columna a sus apoyos.
3. La forma de la sección transversal de la columna y sus dimensiones.
4. El material del cual está hecha la columna.

Entonces, el procedimiento es:

1. Determine el factor de fijación de extremos,  $K$ , el tipo de conexión entre la columna y sus apoyos con la información dada en la figura 14-1.
2. Calcule la longitud efectiva,  $L_e = KL$ .
3. Calcule el valor mínimo del radio de giro de la sección transversal por medio de  $r_{\min} = \sqrt{I_{\min}/A}$ ; o determine  $r_{\min}$  con tablas de datos.
4. Calcule la máxima razón de esbeltez con:

$$SR_{\max} = \frac{L_e}{r_{\min}}$$

5. Con el módulo de elasticidad,  $E$ , y la resistencia a la cedencia,  $s_y$ , del material, calcule la constante de columna:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{s_y}}$$

6. Compare el valor de  $SR$  con  $C_c$ .
  - a. Si  $SR > C_c$ , la columna es larga. Use la fórmula de Euler para calcular la carga crítica de pandeo:

$$P_{\sigma} = \frac{\pi^2 EA}{(SR)^2}$$

- b. Si  $SR < C_c$ , la columna es corta. Use la fórmula de Johnson para calcular la carga crítica de pandeo:

$$P_{\sigma} = A s_y \left[ 1 - \frac{s_y (SR)^2}{4\pi^2 E} \right]$$

7. Especifique el factor de diseño,  $N$ .

8. Calcule la carga permisible,  $P_a$ .

$$P_a = \frac{P_c}{N}$$

**Ejemplo 14-1**

Se tiene que usar un miembro circular sometido a compresión con ambos extremos de pasador de acero AISI 1020 estirado en frío en una máquina. Su diámetro es de 25 mm y su altura de 950 mm. ¿Cuál es la carga máxima que el miembro puede soportar antes de pandearse? También calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de  $N = 3$ .

**Solución**

**Objetivo**

Calcular la carga crítica de pandeo para la columna y la carga permisible para un factor de diseño de  $N = 3$ .

**Datos**

$L = 950$  mm. Sección transversal circular;  $D = 25$  mm. Extremos de pasador. La columna es de acero, AISI 1020 estirado en frío. Del apéndice A-13:  $s_y = 441$  MPa;  $E = 207$  GPa =  $207 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>

**Análisis**

Use las instrucciones para analizar columnas centralmente cargadas.

**Resultados**

**Paso 1.** Determine el factor de fijación de los extremos. Para la columna con extremos de pasador,  $K = 1.0$ .

**Paso 2.** Calcule la longitud efectiva.

$$L_e = KL = 1.0(L) = 950 \text{ mm}$$

**Paso 3.** Calcule el valor mínimo del radio de giro. En el apéndice A-1, para cualquier eje de una sección circular transversal,  $r = D/4$ . Entonces:

$$r = \frac{D}{4} = \frac{25 \text{ mm}}{4} = 6.25 \text{ mm}$$

**Paso 4.** Calcule la razón de esbeltez,  $SR = L_e/r$ .

$$\frac{L_e}{r} = \frac{950 \text{ mm}}{6.25 \text{ mm}} = 152$$

**Paso 5.** Calcule la constante de columna  $C_c$ .

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{s_y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(207 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}{441 \times 10^6 \text{ N/m}^2}} = 96.2$$

**Paso 6.** Compare  $C_c$  con  $L_e/r$  y decida si la columna es larga o corta. En seguida, use la fórmula apropiada para calcular la carga crítica de pandeo. Como  $L_e/r$  es mayor que  $C_c$ , se aplica la fórmula de Euler.

$$P_c = \frac{\pi^2 EA}{(L_e/r)^2}$$

El área es:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(25 \text{ mm})^2}{4} = 491 \text{ mm}^2$$

Por tanto:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2(207 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(491 \text{ mm}^2)}{(152)^2} \times \frac{1 \text{ m}^2}{(10^3 \text{ mm})^2} = 43.4 \text{ kN}$$

**Paso 7.** Se especifica un factor de diseño de  $N = 3$ .

**Paso 8.** La carga permisible  $P_s$  es:

$$P_s = \frac{P_{cr}}{N} = \frac{43.4 \text{ kN}}{3} = 14.5 \text{ kN}$$

**Ejemplo 14-2** Determine la carga crítica sobre una columna de acero de sección transversal cuadrada de 12 mm por lado y 300 mm de longitud. La columna tiene que ser de acero AISI 1040 laminado en frío. Uno de sus extremos se soldará rígidamente a un apoyo firme y el otro se conectará con una junta de pasador. También calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de  $N = 3$ .

**Solución** **Objetivo** Calcular la carga crítica de pandeo para la columna y la carga permisible para un factor de diseño de  $N = 3$ .

**Datos**  $L = 300 \text{ mm}$ . La sección transversal es cuadrada; cada lado es  $b = 12 \text{ mm}$ . Un extremo de pasador; un extremo fijo. La columna es de acero; AISI 1040 laminado en frío. En el apéndice A-13:  $s_y = 414 \text{ MPa}$ ;  $E = 207 \text{ GPa} = 207 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

**Análisis** Use las *Instrucciones para analizar columnas centralmente cargadas*.

**Resultados** **Paso 1.** Determine el factor de fijación de los extremos. Para la columna con extremo fijo y el otro de pasador,  $K = 0.80$  es un valor práctico. (Figura 14-1.)

**Paso 2.** Calcule la longitud efectiva.

$$L_e = KL = 0.80(L) = 0.80(300 \text{ mm}) = 240 \text{ mm}$$

**Paso 3.** Calcule el valor mínimo del radio de giro. En el apéndice A-1, para una sección transversal cuadrada,  $r = b/\sqrt{12}$ . Entonces:

$$r = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{12 \text{ mm}}{\sqrt{12}} = 3.46 \text{ mm}$$

**Paso 4.** Calcule la razón de esbeltez,  $SR = L_e/r$ .

$$\frac{L_e}{r} = \frac{KL}{r} = \frac{(0.8)(300 \text{ mm})}{3.46 \text{ mm}} = 69.4$$

**Paso 5.** Normalmente, se calcularía el valor de la constante de columna,  $C_c$ . Pero, en este caso, se utiliza la figura 14-3. Para un acero con una resistencia a la cedencia de 414 MPa.  $C_c = 96$ , aproximadamente.

- Paso 6.** Compare  $C_c$  con  $L_e/r$  y decida si la columna es larga o corta. A continuación use la fórmula apropiada para calcular la carga de pandeo crítica. Como  $L_e/r$  es menor que  $C_c$ , se debe usar la fórmula de Johnson (ecuación 14-6).

$$P_{cr} = A s_y \left[ 1 - \frac{s_y (L_e/r)^2}{4\pi^2 E} \right]$$

El área de la sección transversal cuadrada es:

$$A = b^2 = (12 \text{ mm})^2 = 144 \text{ mm}^2$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P_{cr} &= (144 \text{ mm}^2) \left( \frac{414 \text{ N}}{\text{mm}^2} \right) \left[ 1 - \frac{(414 \times 10^6 \text{ N/m}^2) (69.4)^2}{4\pi^2 (207 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} \right] \\ &= 45.1 \text{ kN} \end{aligned}$$

- Paso 7.** Se especifica un factor de diseño de  $N = 3$ .

- Paso 8.** La carga permisible,  $P_a$ , es:

$$P_a = \frac{P_{cr}}{N} = \frac{45.1 \text{ kN}}{3} = 15.0 \text{ kN}$$

## 14-8 PERFILES EFICIENTES PARA SECCIONES TRANSVERSALES DE COLUMNA

Cuando se diseña una columna que va a soportar una carga especificada, el diseñador tiene la responsabilidad de seleccionar la forma general de su sección transversal y determinar las dimensiones requeridas. Los principios siguientes pueden ayudar en la selección inicial del perfil.

Un perfil eficiente es aquel que utiliza una pequeña cantidad de material para realizar una función dada. Para columnas, el objetivo es incrementar al máximo el radio de giro con el objeto de reducir la razón de esbeltez. Nótese también que como  $r = \sqrt{I/A}$ , maximizando el momento de inercia para un área dada tiene el mismo efecto.

Cuando se analizó el momento de inercia en los capítulos 7 y 8, se señaló que es deseable disponer toda el área posible de la sección transversal tan lejos del centroide como sea posible. En las vigas, analizadas en el capítulo 8, por lo general sólo un eje era el importante, el eje con respecto al cual ocurría la flexión. En columnas, el pandeo en general puede ocurrir en cualquier dirección. Por consiguiente, es deseable que las propiedades sean uniformes con respecto a cualquier eje. La sección circular hueca, comúnmente llamada tubo, es un perfil muy eficiente para usarse como columna. Le sigue de cerca el tubo cuadrado hueco. También se pueden usar secciones compuestas de secciones estructurales estándar, como se muestra en la figura 14-5.

Las columnas de edificios con frecuencia se arman con perfiles especiales de patin ancho llamadas *secciones para columna*. Cuentan con patines relativamente anchos y gruesos en comparación con los perfiles por lo general seleccionados para vigas. Esto hace que el momento de inercia con respecto al eje  $Y-Y$  sea más similar a aquél con

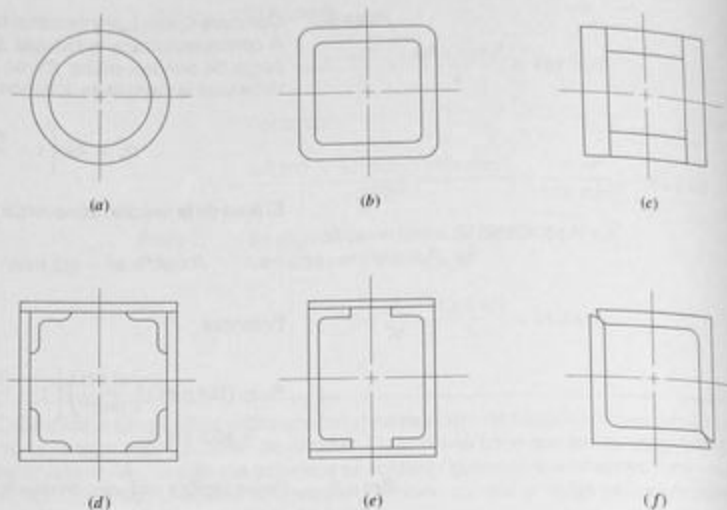


FIGURA 14-5 Ejemplos de perfiles de columna eficientes. (a) Tubo de sección circular hueco. (b) Tubo cuadrado hueco. (c) Sección tubular hecha de vigas de madera. (d) Ángulos de patas iguales con placas. (e) Canales de aluminio con placas. (f) Dos ángulos de patas iguales.

respecto al eje  $X-X$ . El resultado es que los radios de giro con respecto a los dos ejes también son casi iguales. La figura 14-6 muestra una comparación de dos perfiles de patín ancho de 12 plg; uno es una sección de columna y el otro es un perfil de viga típico. Nótese que el radio de giro mínimo se debe utilizar al calcular la razón de esbeltez.

## 14-9 ESPECIFICACIONES DEL AISC

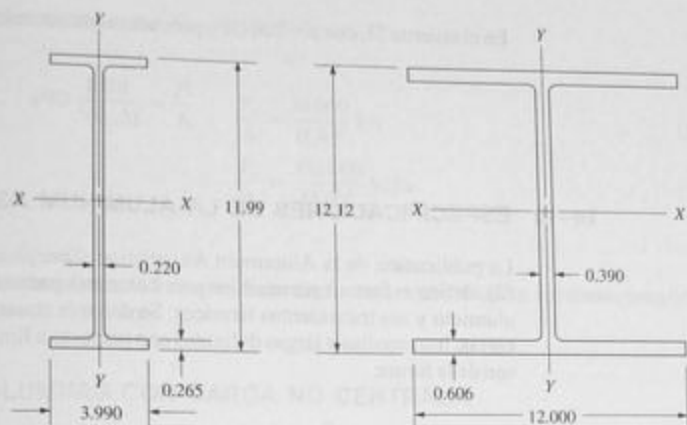
Las columnas son elementos esenciales de muchas estructuras. El diseño y el análisis de columnas de acero en aplicaciones de construcción están regidas por las especificaciones del AISC, el American Institute of Steel Construction (1). La especificación define una carga o esfuerzo unitario permisible para columnas el cual es la carga axial permisible  $P_a$  dividida entre el área de la sección transversal de la columna. Las fórmulas de diseño están expresadas en función de la razón de esbeltez de transición  $C_c$ , definidas en la ecuación (14-3), la resistencia a la cedencia del material de la columna y la razón de esbeltez efectiva  $L_e/r$ . Cuando  $L_e/r < C_c$ :

$$\frac{P_a}{A} = \left[ 1 - \frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2} \right] \frac{s_y}{FS} \quad (14-8)$$

en donde  $P_a$  = carga permisible o de diseño:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{s_y}} \quad (\text{Use } E = 29 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2 [200 \text{ GPa}] \text{ para acero estructural})$$

$FS$  = factor de seguridad



(a) Perfil de viga W12 x 16

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 4.71 \text{ plg}^2 \\ I_x &= 103 \text{ plg}^4 \\ I_y &= 2.82 \text{ plg}^4 \\ r_x &= 4.68 \text{ plg} \\ r_y &= 0.77 \text{ plg} \\ r_x/r_y &= 6.08 \end{aligned}$$

(b) Sección de columna W12 x 65

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 19.1 \text{ plg}^2 \\ I_x &= 533 \text{ plg}^4 \\ I_y &= 175 \text{ plg}^4 \\ r_x &= 5.28 \text{ plg} \\ r_y &= 3.02 \text{ plg} \\ r_x/r_y &= 1.75 \\ r_y &\text{ casi igual a } r_x \end{aligned}$$

FIGURA 14-6 Comparación de un perfil de viga de patín ancho con una sección de columna.

El Column Research Council desarrolló la ecuación (14-8), la cual es idéntica a la fórmula Johnson. El factor de seguridad  $FS$  es una función de la razón entre la esbeltez efectiva y  $C_c$  con el objeto de incluir el efecto de encorvadura accidental, una pequeña excentricidad de la carga, esfuerzos residuales y cualesquiera incertidumbres en la evaluación del factor de longitud efectiva  $K$ . La ecuación para  $FS$  es:

$$FS = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3} \quad (14-9)$$

El valor de  $FS$  varía desde 1.67 cuando la razón  $(L_e/r)/C_c = 0$  hasta 1.92 cuando  $(L_e/r)/C_c = 1.0$ .

Para columnas largas,  $L_e/r > C_c$ , se usa la ecuación de Euler como se definió antes pero con un factor de seguridad de 1.92.

$$\frac{P_o}{A} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2 (1.92)} \quad (14-10)$$

Para acero estructural con  $E = 29 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$ :

$$\frac{P_o}{A} = \frac{149 \times 10^6}{(L_e/r)^2} \text{ lb/plg}^2 \quad (14-11)$$



En el sistema SI, con  $E = 200$  GPa para acero estructural:

$$\frac{P_c}{A} = \frac{1028}{(L_c/r)^2} \text{ GPa} \quad (14-12)$$

## 14-10 ESPECIFICACIONES DE LA ALUMINUM ASSOCIATION

La publicación de la Aluminum Association, *Specifications for Aluminum Structures* (2), define esfuerzos permisibles para columnas para cada una de varias aleaciones de aluminio y sus tratamientos térmicos. Se dan tres ecuaciones diferentes para columnas cortas, intermedias y largas definidas con respecto a límites de esbeltez. Las ecuaciones son de la forma:

$$\frac{P_c}{A} = \frac{s_y}{FS} \quad (\text{columnas cortas}) \quad (14-13)$$

$$\frac{P_c}{A} = \frac{B_c - D_c(L/r)}{FS} \quad (\text{columnas intermedias}) \quad (14-14)$$

$$\frac{P_c}{A} = \frac{\pi^2 E}{FS(L/r)^2} \quad (\text{columnas largas}) \quad (14-15)$$

En los tres casos, se recomienda  $FS = 1.95$  para edificios y estructuras similares. El análisis de columnas cortas presupone que no ocurrirá pandeo y la seguridad depende de la resistencia a la cedencia del material. La ecuación (14-15) para columnas largas es la fórmula de Euler con un factor de seguridad aplicado. La fórmula para columna intermedia (ecuación 14-14) depende de las constantes de pandeo  $B_c$  y  $D_c$ , las cuales son funciones de la resistencia a la cedencia de la aleación de aluminio y el módulo de elasticidad. La división entre columnas intermedias y largas es similar a la  $C_c$  utilizada previamente en este capítulo.

Las siguientes son ecuaciones específicas para la aleación 6061-T6 empleada en estructuras de edificios en la forma de lámina, placa, extrusiones y perfiles estructurales, varillas, barras y tubos. La razón de esbeltez  $L/r$  se debe evaluar con la longitud real  $L$  (extremos armados con pasadores). Se supone que en el factor de seguridad se incluye cualquier tipo de restricción de los extremos.

Columnas cortas:  $L/r < 9.5$

$$\frac{P_c}{A} = 19 \text{ ksi (131 MPa)} \quad (14-16)$$

Columnas intermedias:  $9.5 < L/r < 66$

$$\frac{P_c}{A} = \left( 20.2 - 0.126 \frac{L}{r} \right) \text{ ksi} \quad (14-17a)$$

$$\frac{P_c}{A} = \left( 139 - 0.869 \frac{L}{r} \right) \text{ MPa} \quad (14-17b)$$

$$\frac{P_a}{A} = \frac{51\,000}{(L/r)^2} \text{ ksi} \quad (14-18a)$$

$$\frac{P_a}{A} = \frac{352\,000}{(L/r)^2} \text{ MPa} \quad (14-18b)$$

Véase la referencia 2 con respecto a esfuerzos de diseño para columnas para otras aleaciones de aluminio.

## 14-11 COLUMNAS CON CARGA NO CENTRADA

Todos los métodos de análisis estudiados hasta ahora en este capítulo han estado limitados a cargas en los que las cargas de compresión sobre las columnas actúan alineadas con el eje centroidal de la sección transversal de la columna. Además, se supuso que el eje de la columna es perfectamente recto antes de la aplicación de las cargas. Se usa el término *columna centralmente cargada recta* para describir un caso como éste.

Muchas columnas reales violan estas suposiciones hasta cierto grado. La figura 14-7 muestra dos condiciones como éstas. Si una columna inicialmente está encorvada, la fuerza de compresión aplicada a la columna tiende a flexionarla además de pandearla, y la falla ocurriría a una carga menor que la pronosticada con las ecuaciones utilizadas en este capítulo. Una *columna excéntricamente cargada* es una en la que existe una desviación a propósito de la línea de acción de la carga de compresión con respecto al eje centroidal de la columna. En este caso, asimismo, existe algo de esfuerzo de flexión además del esfuerzo de compresión axial que tiende a provocar pandeo. Las referencias

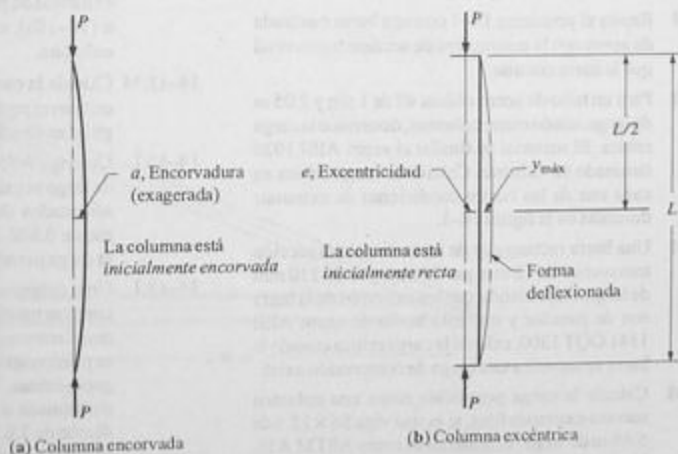


FIGURA 14-7 Ilustración de columnas encorvadas y excéntricas.

3 y 4 proporcionan métodos adicionales para ocuparse de las columnas con cargas no centradas. Cuando existe una pequeña cantidad de encorvadura o excentricidad, el uso de un factor de diseño mayor que el normal tendería a compensar.

## BIBLIOGRAFÍA

1. American Institute of Steel Construction, *Manual of Steel Construction*, 9th ed., Chicago, 1989.
2. Aluminum Association, *Specifications for Aluminum Structures*, 5th ed., Washington, DC, 1986.
3. Mott, Robert L., *Machine Elements in Mechanical Design*, 2nd ed., Macmillan Publishing Co., New York, 1992.
4. Timoshenko, S., and Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, 1961.

## PROBLEMAS

- 14-1.M** Determine la carga crítica para una columna con ambos extremos de pasador hecha de una barra circular de acero AISI 1020 laminado en caliente. El diámetro de la barra es de 20 mm, y su longitud de 800 mm.
- 14-2.M** Repita el problema 14-1 con la longitud de 350 mm.
- 14-3.M** Repita el problema con la barra hecha de aluminio 6061-T6 en lugar de acero.
- 14-4.M** Repita el problema 14-1 con los extremos de la columna fijos en lugar de articulados.
- 14-5.M** Repita el problema 14-1 con una barra cuadrada de acero con la misma área de sección transversal que la barra circular.
- 14-6.M** Para un tubo de acero cédula 40 de 1 plg y 2.05 m de largo, usado como columna, determine la carga crítica. El material es similar al acero AISI 1020 laminado en caliente. Calcule la carga crítica en cada una de las cuatro condiciones de extremos descritas en la figura 14-1.
- 14-7.M** Una barra rectangular de acero tiene una sección transversal de 12 mm por 25 mm y es de 210 mm de largo. Suponiendo que los extremos de la barra son de pasador y que está hecha de acero AISI 1141 OQT 1300, calcule la carga crítica cuando la barra se somete a una carga de compresión axial.
- 14-8.M** Calcule la carga permisible sobre una columna con sus extremos fijos, si es una viga S6 × 12.5 de 5.45 m de largo. El material es acero ASTM A36. Use la fórmula AISC.
- 14-9.I** El área de una plataforma elevada es de 20 pies por 40 pies y se va a diseñar para que soporte una carga uniforme de 75 libras por pie cuadrado. Se propone que se use un tubo de acero cédula 40 de 3 plg como columnas para soportar la plataforma a 8 pies sobre el piso con la base fija y el extremo superior libre. ¿Cuántas columnas se requerirían si se desea un factor de diseño de 3.0? Use  $s_y = 30\,000$  lb/plg<sup>2</sup>.
- 14-10.M** Una viga I de aluminio 6061-T6 de 2.80 m de largo, 110 × 8.646, se usa como columna con sus dos extremos de pasador. Con las ecuaciones (14-16) a (14-18b), calcule la carga permisible sobre la columna.
- 14-11.M** Calcule la carga permisible para la columna descrita en el problema 14-10 suponiendo que la longitud es de sólo 1.40 m.
- 14-12.I** Una viga W8 × 15 de acero ASTM A36 y 12.50 pies de largo se usa como columna. Sus extremos están afianzados de tal modo que  $L_e$  es aproximadamente 0.80L. Con las fórmulas AISC, determine la carga permisible sobre la columna.
- 14-13.I** Una columna se compone de cuatro ángulos, como se muestra en la figura 14-8. Los ángulos se mantienen unidos con barras de enlace, las cuales se pueden ignorar en el análisis de las propiedades geométricas. Utilizando las ecuaciones estándar de Johnson o de Euler con  $L_e = L$  y un factor de diseño de 3.0, calcule la carga permisible sobre la columna si es de 18.4 pies de largo. Los ángulos son de acero ASTM A36.

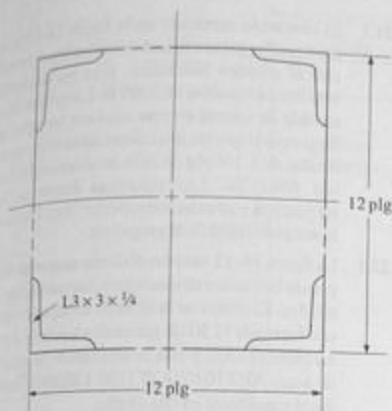


FIGURA 14-8 Sección transversal de columna compuesta del problema 14-13.

- 14-14.I Calcule la carga permisible sobre una columna compuesta cuya sección transversal es la mostrada en la figura 14-9. Use  $L_c = L$  y aluminio 6061-T6. La columna es de 10.5 pies de largo. Use las fórmulas de la Aluminum Association.
- 14-15.C La figura 14-10 muestra una viga con sus extremos soportados por juntas de pasador. La barra inclinada soporta el extremo derecho de la viga, pero también la somete a una fuerza de compresión axial. ¿Sería satisfactoria en esta aplicación

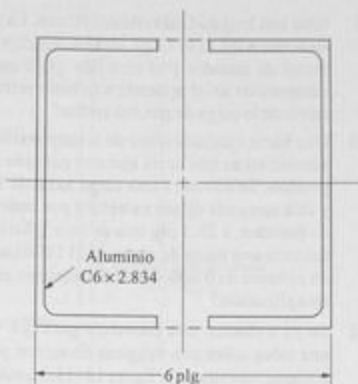


FIGURA 14-9 Sección transversal de columna compuesta del problema 14-14.

- una viga  $S6 \times 12.5$  si soporta 1320 kg en su extremo? La viga es de acero ASTM A36.
- 14-16.I Un eslabón en un mecanismo de 8.40 plg de largo tiene una sección transversal rectangular de  $1/4 \text{ plg} \times 1/8 \text{ plg}$ , y se somete a una carga de compresión de 50 lb. Si el eslabón cuenta con extremos de pasador, ¿es seguro contra pandeo? El eslabón es de acero AISI 1040 estirado en frío.
- 14-17.M Una biela de pistón de amortiguador es de 12 mm de diámetro y afuera del cuerpo del amortiguador

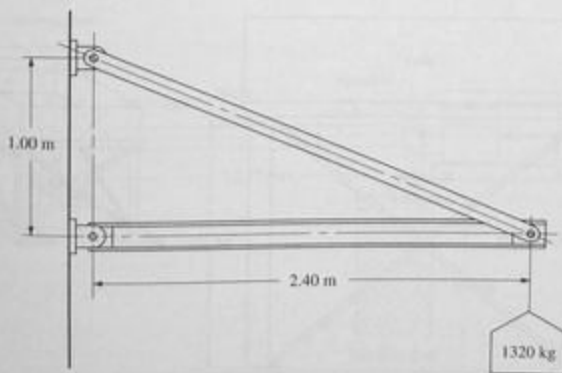


FIGURA 14-10 Estructura del problema 14-15.

tiene una longitud máxima de 190 mm. La biela es de acero AISI 1141 OQT 1300. Considere un extremo de pasador y el otro fijo. ¿Qué carga de compresión axial aplicada a la biela sería de un tercio de la carga de pandeo crítica?

- 14-18.I Una barra estabilizadora de la suspensión de un automóvil es una barra circular cargada a compresión. Se somete a una carga axial de 1375 lb y está apoyada en sus extremos por conexiones de pasador, a 28.5 plg uno de otro. ¿Sería satisfactoria una barra de acero AISI 1020 laminada en caliente de 0.800 plg de diámetro en este tipo de aplicación?
- 14-19.I Se va a diseñar una estructura para que soporte una tolva sobre una máquina de extruir plástico, como se muestra en la figura 14-11. La tolva debe ser soportada por cuatro columnas que comparten la carga por igual. La estructura se refuerza con riostras cruzadas. Se propone que las columnas sean de tubo cédula 40 estándar de 2 plg. Se empotrarán en el suelo. Debido al arriostamiento transversal, el extremo superior de las columnas está guiado de modo que se comporte como si estuviera redondeado o armado con pasador. El tubo es de acero AISI 1020 laminado en caliente. La tolva está diseñada para soportar 20 000 lb de plástico molido. ¿Son las columnas propuestas adecuadas para esta carga?
- 14-20.I Analice cómo se vería afectado el diseño del problema 14-19 si el descuidado conductor de un montacargas embistiera las riostras cruzadas y las rompiera.
- 14-21.I El ensamble mostrado en la figura 14-12 se usa para probar piezas tirando de ellas repetidamente con el cilindro hidráulico. Éste puede soportar una fuerza máxima de 3000 lb. Las piezas del ensamble de interés en este caso son las columnas. Se propone que las dos columnas sean barras cuadradas de 1 1/4 plg de lado de aleación de aluminio 6061-T6. Las columnas tienen su base empotrada y su extremo superior libre. Determine la aceptabilidad de la propuesta.
- 14-22.I La figura 14-13 muestra el diseño propuesto de una prensa hidráulica utilizada para compactar desechos sólidos. El pistón de la derecha es capaz de ejercer una fuerza de 12 500 lb por medio de la biela al ariete. La biela es recta y está centralmente cargada y es de acero AISI 1040 OQT 1100. Calcule el factor de diseño resultante en este diseño.
- 14-23.I Para las condiciones descritas en el problema 14-22, especifique el diámetro requerido de la biela suponiendo que es una sección transversal circular sólida. Use un factor de diseño de 4.0.
- 14-24.I Para las condiciones descritas en el problema 14-22, especifique un tubo de acero estándar adecuado para usarse como biela. Use un factor de diseño de 4.0. El tubo está hecho de acero estructural ASTM A501.
- 14-25.I Para las condiciones descritas en el problema 14-22, especifique una viga I estándar, propia para usarse como biela. Use un factor de diseño de 4.0. La viga I tiene que ser de aleación de aluminio 6061-T6. La conexión entre la biela y el pistón es como se muestra en la figura 14-14.

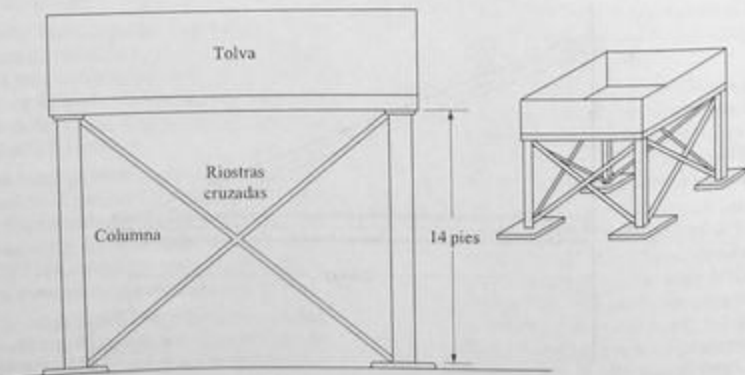
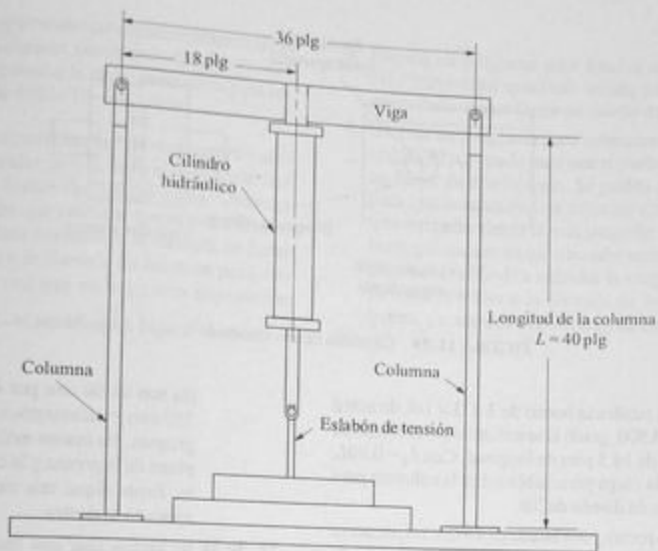


FIGURA 14-11 Tolva de los problemas 14-19 y 14-20.



Nota: El cilindro tira hacia arriba el eslabón de tensión y hacia abajo la viga con una fuerza de 3000 lb.

FIGURA 14-12 Máquina de prueba del problema 14-21.

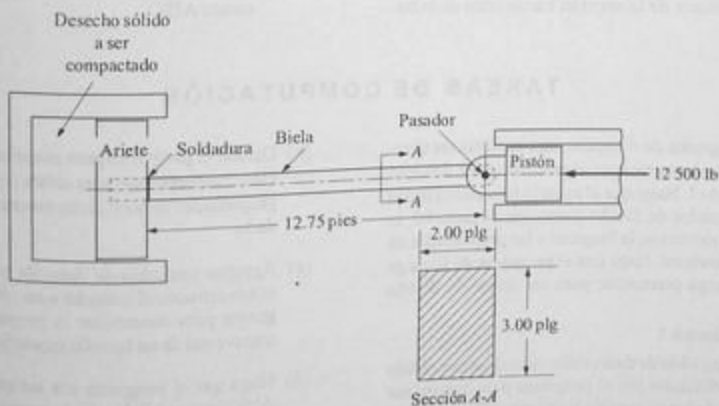


FIGURA 14-13 Compactador de desechos sólidos de los problemas 14-22, 14-23, 14-24 y 14-25.

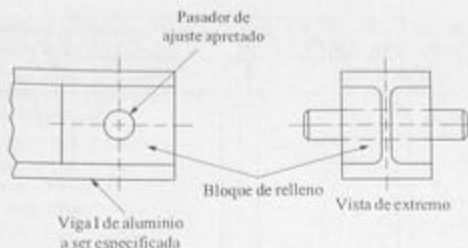


FIGURA 14-14 Conexión de un extremo de la viga I del problema 14-25.

- 14-26.I Un tubo cuadrado hueco de  $3 \times 3 \times 1/4$ , de acero ASTM A500, grado B se utiliza como columna de edificio de 16.5 pies de longitud. Con  $L_c = 0.80L$ , calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de 3.0.
- 14-27.I Un tubo rectangular hueco de  $4 \times 2 \times 1/4$ , de acero ASTM A500, grado B se usa como columna de edificio de 16.5 pies de longitud. Con  $L_c = 0.80L$ , calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de 3.0.
- 14-28.I Una columna se arma soldando dos ángulos de acero estándar de  $3 \times 3 \times 1/4$ , como se muestra en la figura 14-5(f). Los ángulos son de acero estructural ASTM A36. Si la longitud de la columna es de 16.5 pies y  $L_c = 0.8L$ , calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de 3.0.
- 14-29.M Una barra rectangular de acero AISI 1020 laminado en caliente, se usa como riostra de seguridad para sujetar el ariete de una gran prensa punzonadora mientras se instalan los troqueles en ella. Las dimensiones de la sección transversal de la ba-

rra son de 60 mm por 40 mm. Su longitud es de 750 mm y sus extremos se sueldan a placas planas gruesas, las cuales están apoyadas en la bancada plana de la prensa y la cara inferior plana del ariete. Especifique una carga segura que se podría aplicar a la riostra.

- 14-30.M Se piensa usar una canal de aluminio 6061-T4,  $C4 \times 1.738$ , como columna de 4.25 m de longitud. Se considera que los extremos son de pasador. Calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de 4.0.
- 14-31.M En un intento por mejorar la capacidad de soportar carga de la columna descrita en el problema 14-30, se propone la aleación 6061-T6 en lugar de la 6061-T4 para aprovechar su mayor resistencia. Evalúe el efecto de este cambio propuesto de la carga permisible.
- 14-32.I Calcule la carga permisible sobre la sección de columna  $W12 \times 65$  de acero ASTM A36 y 22.5 pies de longitud mostrada en la figura 14-6(b) e instalada de tal modo que  $L_c = 0.8L$ . Use el reglamento AISC.

## TAREAS DE COMPUTACIÓN

1. Escriba un programa de cómputo para analizar los diseños de columna propuestos con el procedimiento descrito en la sección 14-7. Haga que el usuario introduzca todos los datos esenciales de diseño como son el material, la fijación de los extremos, la longitud y las propiedades de la sección transversal. Haga que el programa dé la carga crítica y la carga permisible para un factor de diseño dado.

### Adiciones a la tarea 1

- (a) Incluya una tabla de datos sobre tubo de acero cédula 40 a ser utilizados por el programa para determinar las propiedades de sección transversal de un tamaño de tubo especificado.
- (b) Diseñe el programa para manejar columnas de sección transversal circular sólida y para que calcule las propiedades de sección transversal para un diámetro dado.
- (c) Agregue una tabla de datos de tubería cuadrada de acero estructural estándar a ser utilizados por el programa para determinar las propiedades de sección transversal de un tamaño especificado.
- (d) Haga que el programa use las especificaciones del AISC como se indica en la sección 14-9 para calcular la carga permisible y el factor de seguridad para columnas de acero.

(e) Haga que el programa use las especificaciones de la Aluminum Association como se indica en la sección 14-10 para calcular la carga permisible para columnas hechas de 6061-T6.

2. Escriba un programa para diseñar una columna de sección transversal circular sólida para que soporte una carga dada con un factor de diseño dado. Observe que el programa tendrá que verificar que se está utilizando el método de análisis correcto, o la fórmula de Euler para columnas largas o la fórmula de Johnson para columnas cortas, una vez que se haga una suposición inicial.

3. Escriba un programa para diseñar una columna de sección transversal cuadrada sólida para que soporte una carga dada con un factor de diseño dado.
4. Escriba un programa para seleccionar un tubo de acero cédula 40 adecuado para que soporte una carga dada con un factor de diseño dado. Se podría diseñar el programa para que busque en una tabla de datos de secciones de tubo estándar desde la más pequeña hasta la más grande hasta que encuentre un tubo adecuado. Para cada sección de prueba, se podría calcular la carga permisible con la fórmula de Euler o la fórmula de Johnson, como se requiera, y comparar con la carga de diseño.





# 15

## Recipientes a presión

### 15-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Las formas más comunes de los recipientes a presión diseñados para contener líquidos y gases a presión interna son las esferas y los cilindros con sus extremos cerrados. La presión interna tiende a hacer estallar el recipiente debido a los esfuerzos de tensión presentes en sus paredes. El objetivo general de este capítulo es describir cómo se desarrollan estos esfuerzos y presentar fórmulas que se puedan usar para calcular su magnitud.

Después de terminar el estudio de este capítulo, el lector será capaz de:

1. Determinar si un recipiente a presión se debe clasificar como de *pared delgada* o *gruesa*.
2. Dibujar el diagrama de cuerpo libre de una parte de una esfera sometida a presión interna para identificar la fuerza que la pared de la esfera debe resistir.
3. Describir el *esfuerzo anular* tal como se aplica a esferas sometidas a presión interna.
4. Establecer la fórmula para calcular el esfuerzo anular desarrollado en la pared de una esfera de pared delgada por la presión interna.
5. Usar la fórmula del esfuerzo anular para calcular el esfuerzo máximo en la pared de una esfera de pared delgada.
6. Determinar el espesor de pared requerido de la esfera para resistir una presión interna dada.

7. Dibujar el diagrama de cuerpo libre de una parte de un cilindro sometido a presión interna para identificar la fuerza que su pared debe resistir.
8. Describir el *esfuerzo anular* tal como se aplica a cilindros sometidos a presión interna.
9. Establecer la fórmula para calcular el esfuerzo anular desarrollado en la pared de un cilindro de pared delgada producido por la presión interna.
10. Usar la fórmula del esfuerzo anular para calcular el esfuerzo máximo en la pared de un cilindro de pared delgada.
11. Determinar el espesor de pared requerido del cilindro para que resista con seguridad una presión interna dada.
12. Describir el *esfuerzo longitudinal* tal como se aplica a cilindros sometidos a presión interna.
13. Establecer la fórmula para calcular el esfuerzo longitudinal en la pared de un cilindro de pared delgada producido por una presión interna.
14. Usar la fórmula del esfuerzo longitudinal para calcular el esfuerzo en la pared de un cilindro de pared delgada que actúa en la dirección paralela al eje del cilindro.
15. Determinar el espesor de pared requerido de un cilindro de pared delgada para que resista una presión interna dada con seguridad.
16. Identificar el esfuerzo anular, el esfuerzo longitudinal y el esfuerzo radial desarrollados en la pared de una esfera o cilindro de pared gruesa producidos por presión interna.
17. Aplicar las fórmulas para calcular los valores máximos del esfuerzo anular, el esfuerzo longitudinal y el esfuerzo radial en la pared de una esfera o cilindro de pared gruesa.
18. Aplicar las fórmulas para calcular las magnitudes del esfuerzo anular, el esfuerzo longitudinal y el esfuerzo radial en cualquier radio en la pared de un cilindro o esfera de pared gruesa.

## 15-2 DISTINCIÓN ENTRE LOS RECIPIENTES A PRESIÓN DE PARED DELGADA Y PARED GRUESA

En general, la magnitud del esfuerzo en la pared de un recipiente a presión varía en función de la posición en la pared. Un análisis preciso permite calcular el esfuerzo en cualquier punto. Las fórmulas para llevar a cabo tal cálculo se demostrarán en una sección posterior.

Sin embargo, cuando el espesor de pared del recipiente a presión es pequeño, la suposición de que el esfuerzo es uniforme en toda la pared produce un error insignificante. Además, esta suposición permite desarrollar fórmulas relativamente simples para el esfuerzo. La figura 15-1 muestra la definición de diámetros, radios y espesor de pared claves para cilindros y esferas.

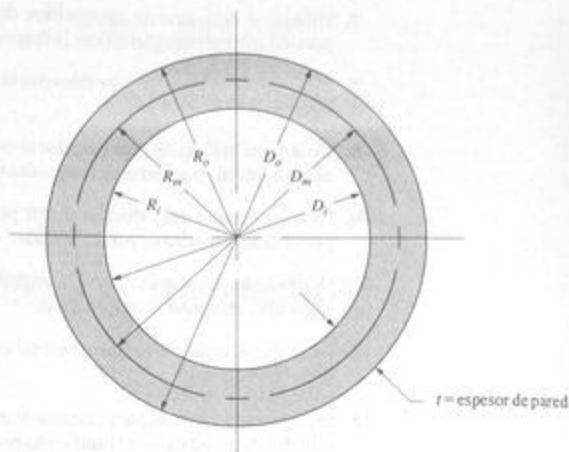


FIGURA 15-1 Definición de diámetro, radios y espesores de pared clave de cilindros y esferas.

El criterio para determinar cuándo un recipiente a presión se puede considerar como de pared delgada es el siguiente:

Si la relación del radio medio del recipiente a su espesor de pared es de 10 o mayor, el esfuerzo es casi uniforme y se puede suponer que todo el material de la pared resiste por igual las fuerzas aplicadas. Los recipientes a presión como éstos se llaman recipientes de pared delgada.

El radio medio se define como el promedio del radio externo y el radio interno. Es decir:



Radio medio

$$R_m = \frac{R_o + R_i}{2} \quad (15-1)$$

Por tanto, un recipiente a presión se considera como delgado si:

$$\frac{R_m}{t} \geq 10 \quad (15-2)$$

en donde  $t$  es el espesor de pared del recipiente. Asimismo el *diámetro medio* se define como:



Diámetro medio

$$D_m = \frac{D_o + D_i}{2} \quad (15-3)$$

Como el diámetro es dos veces el radio, el criterio para que un recipiente se considere de pared delgada es:

$$\frac{D_o}{t} \geq 20 \quad (15-4)$$

Obviamente, si el recipiente no satisface los criterios expresados en las ecuaciones (15-2) y (15-4), se considera como de pared gruesa.

Además de las ecuaciones (15-1) y (15-3) para el radio medio y el diámetro medio, las formas siguientes pueden ser útiles:

$$R_i = R_o - t$$

$$R_m = R_o - \frac{t}{2}$$

$$R_m = R_i + \frac{t}{2}$$

$$D_i = D_o - 2t$$

$$D_m = D_o - t$$

$$D_m = D_i + t$$

Las dos secciones siguientes se dedican al análisis de esferas y cilindros de *pared delgada*. Posteriormente, en la sección 15-5, se analizarán las esferas y cilindros de *pared gruesa*.

### 15-3 ESFERAS DE PARED DELGADA

En el análisis de un recipiente a presión esférico, el objetivo es determinar el esfuerzo en su pared para garantizar la seguridad. Debido a la simetría de una esfera, un cuerpo libre conveniente para usarse en el análisis es la mitad de la esfera, como se muestra en la figura 15-2. La presión interna del líquido o gas contenido en la esfera actúa perpendicular a las paredes, uniformemente sobre toda la superficie interior. Como la esfera se cortó a través de un diámetro, todas las fuerzas actúan en dirección horizontal. Por consiguiente, sólo se tiene que considerar el componente horizontal de las fuerzas creadas por la presión del fluido para determinar la magnitud de la fuerza en las paredes. Si una presión  $P$  actúa en un área  $A$ , la fuerza ejercida en el área es:

$$F = pA \quad (15-5)$$

Considerando que la fuerza actúa en toda la superficie interior de la esfera y determinando el componente horizontal, la fuerza resultante en la dirección horizontal es:

$$F_R = pA_p \quad (15-6)$$

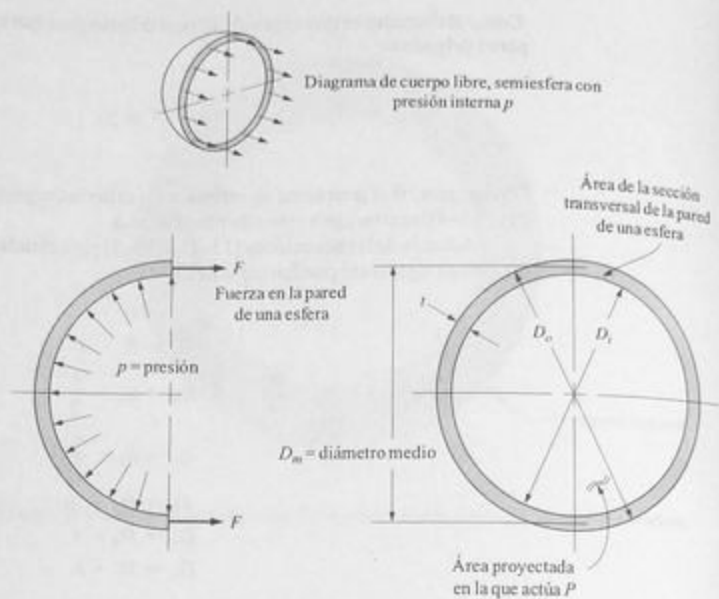


FIGURA 15-2 Diagrama de cuerpo libre de una esfera que soporta una presión interna.

en donde  $A_p$  es el área proyectada de la esfera en el plano que pasa por el diámetro. Por consiguiente:

$$A_p = \frac{\pi D_m^2}{4} \quad (15-7)$$

Por el equilibrio de las fuerzas horizontales en el cuerpo libre, las fuerzas en las paredes también deben ser iguales a  $F_R$ , calculada con la ecuación (15-6). Estas fuerzas de tensión que actúan en el área de la sección transversal de las paredes de la esfera crean esfuerzos de tensión. Es decir:

$$\sigma = \frac{F_R}{A_w} \quad (15-8)$$

en donde  $A_w$  es el área del anillo cortado para crear el cuerpo libre, mostrado en la figura 15-2. El área real es:

$$A_w = \frac{\pi}{4} (D_o^2 - D_i^2) \quad (15-9)$$

Sin embargo, en esferas de pared delgada con un espesor de pared  $t$ , menor que  $1/10$  del radio de la esfera, el área de la pared se puede aproximar como:

$$A_w = \pi D_m t \quad (15-10)$$

Ésta es el área de una tira rectangular de espesor  $t$  y longitud igual a la circunferencia media de la esfera,  $\pi D_m$ .


Las ecuaciones (15-6) y (15-8) se pueden combinar para obtener una ecuación del esfuerzo:

$$\sigma = \frac{F_R}{A_w} = \frac{pA_p}{A_w} \quad (15-11)$$

Expresando  $A_p$  y  $A_w$  en función de  $D_m$  y  $t$  de las ecuaciones (15-7) y (15-10) se obtiene:

$$\sigma = \frac{p(\pi D_m^2/4)}{\pi D_m t} = \frac{pD_m}{4t} \quad (15-12)$$

Ésta es la expresión del esfuerzo que actúa en la pared de una esfera de pared delgada sometida a presión interna. El error que resulta por usar el diámetro externo o el interno en lugar del diámetro medio es muy pequeño (menos del 5%).

 Esfuerzo en una esfera de pared delgada

**Ejemplo 15-1** Calcule el esfuerzo en la pared de una esfera de 300 mm de diámetro interno y 1.50 mm de espesor de pared cuando contiene gas nitrógeno a 3500 kPa de presión interna.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular el esfuerzo en la pared de la esfera.
	<b>Datos</b>	$P = 3500 \text{ kPa}$ ; $D_i = 300 \text{ mm}$ ; $t = 1.50 \text{ mm}$ .
	<b>Análisis</b>	En primer lugar habrá que determinar si la esfera se puede considerar de pared delgada calculando la relación del diámetro medio al espesor de pared.
		$D_m = D_i + t = 300 \text{ mm} + 1.50 \text{ mm} = 301.5 \text{ mm}$ $D_m/t = 301.5 \text{ mm}/1.50 \text{ mm} = 201$
		Como ésta es mucho mayor que el límite inferior de 20, la esfera es de pared delgada. Entonces se debe usar la ecuación (15-12) para calcular el esfuerzo.
	<b>Resultados</b>	$\sigma = \frac{pD_m}{4t} = \frac{(3500 \times 10^3 \text{ Pa})(301.5 \text{ mm})}{4(1.50 \text{ mm})}$ $\sigma = 175.9 \times 10^6 \text{ Pa} = 175.9 \text{ MPa}$

## 15-4 CILINDROS DE PARED DELGADA

Con frecuencia se usan cilindros como recipientes a presión, por ejemplo, como tanques de almacenamiento, actuadores hidráulicos y neumáticos, y tubería para conducir fluidos

a presión. Los esfuerzos en las paredes de los cilindros son similares a los que actúan en esferas, si bien el valor máximo es mayor.

Aquí se demuestran dos análisis distintos. En un caso, se determina la tendencia de la presión interna a tirar del cilindro en una dirección paralela a su eje. Ésta se llama *esfuerzo longitudinal*. A continuación, se analiza un anillo alrededor del cilindro para determinar el esfuerzo que tiende a tirar de él. Éste se llama *esfuerzo anular*, o *esfuerzo tangencial*.

**Esfuerzo longitudinal.** La figura 15-3 muestra una parte de un cilindro, la cual está sometida a una presión interna, cortado perpendicular a su eje para crear un cuerpo libre. Suponiendo que el extremo libre del cilindro está cerrado, la presión que actúa en el área circular del extremo producirá una fuerza resultante de:

$$F_R = pA = p\left(\frac{\pi D_m^2}{4}\right) \quad (15-14)$$

Esta fuerza debe ser resistida por la fuerza en las paredes del cilindro, la que, a su vez, crea un esfuerzo de tensión en la paredes. El esfuerzo es:

$$\sigma = \frac{F_R}{A_w} \quad (15-15)$$

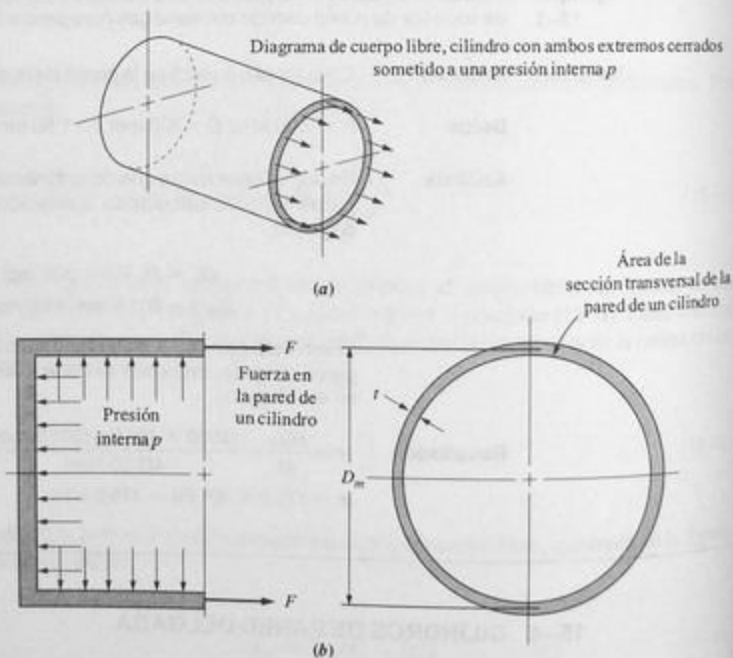


FIGURA 15-3 Diagrama de cuerpo libre de un cilindro sometido a presión interna que muestra el esfuerzo longitudinal.

Suponiendo que las paredes son delgadas, como se hizo en el caso de las esferas:

$$A_w = \pi D_m t$$

en donde  $t$  es el espesor de pared.

Ahora combinando las ecuaciones (15-14) y (15-15),

$$\sigma = \frac{F_R}{A_w} = \frac{p(\pi D_m^2/4)}{\pi D_m t} = \frac{p D_m}{4t} \quad (15-16)$$

Éste es el esfuerzo en la pared del cilindro en una dirección paralela al eje, llamado esfuerzo longitudinal. Nótese que tiene la misma magnitud que el determinado para la pared de una esfera. Pero éste no es el esfuerzo máximo, como se demostrará a continuación.

**Esfuerzo anular.** La presencia de un esfuerzo tangencial o anular se puede visualizar aislando un anillo del cilindro, como se muestra en la figura 15-4. La presión interna empuja hacia afuera alrededor del anillo. El anillo debe desarrollar un esfuerzo de tensión en una dirección tangencial a la circunferencia del anillo para resistir la tendencia de la presión a hacer estallar el anillo. La magnitud del esfuerzo se puede determinar utilizando la mitad del anillo como cuerpo libre, como se muestra en la figura 15-4(b).

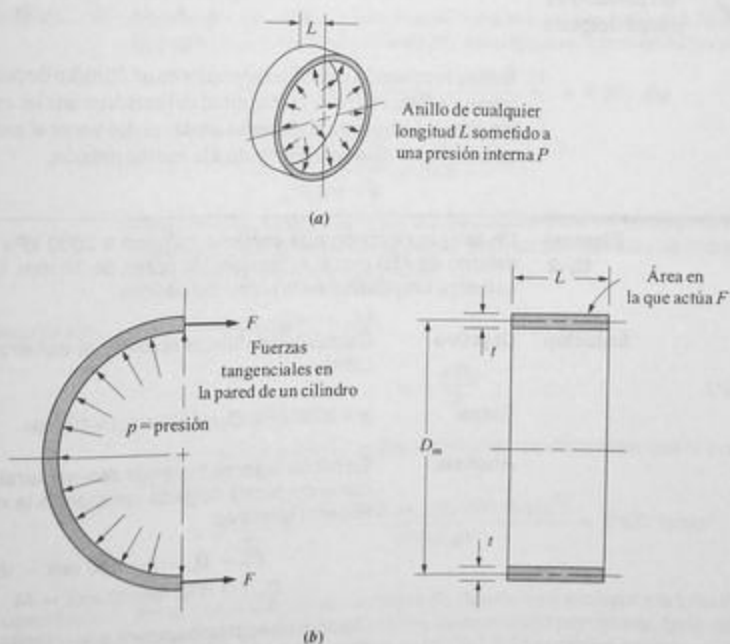


FIGURA 15-4 Diagrama de cuerpo libre de un cilindro sometido a una presión interna que muestra el esfuerzo anular.



La resultante de las fuerzas creadas por la presión interna se deben determinar en la dirección horizontal y equilibrar con las fuerzas en la paredes del anillo. Con el mismo razonamiento que se utilizó en el análisis de la esfera, se halla que la fuerza resultante es el producto de la presión y el *área proyectada* del anillo. Para un anillo de diámetro  $D$  y longitud  $L$ :

$$F_R = pA_p = p(D_w L) \quad (15-17)$$

El esfuerzo de tensión en la pared del cilindro es igual a la fuerza resultante dividida entre el área de la sección transversal de la pared. De nuevo suponiendo que la pared es delgada, el área de la pared es:

$$A_w = 2tL \quad (15-18)$$


Entonces el esfuerzo es:

$$\sigma = \frac{F_R}{A_w} = \frac{F_R}{2tL} \quad (15-19)$$

Combinando las ecuaciones (15-17) y (15-19) se obtiene:

$$\sigma = \frac{F_R}{A_w} = \frac{pD_w L}{2tL} = \frac{pD_w}{2t} \quad (15-20)$$

Ésta es la ecuación del esfuerzo anular en un cilindro de pared delgada sometido a presión interna. Obsérvese que la magnitud del esfuerzo anular es *dos veces* la del esfuerzo longitudinal. Asimismo, el esfuerzo anular es dos veces el esfuerzo en un contenedor esférico del mismo diámetro sometido a la misma presión.

 **Esfuerzo anular en un cilindro de pared delgada**

**Ejemplo 15-2**

Un tanque cilíndrico que contiene oxígeno a 2000 kPa de presión tiene un diámetro externo de 450 mm y un espesor de pared de 10 mm. Calcule el esfuerzo anular y el esfuerzo longitudinal en la pared del cilindro.

**Solución**

**Objetivo** Calcular el esfuerzo anular y el esfuerzo longitudinal en la pared del cilindro.

**Datos**  $p = 2000 \text{ kPa}$ ;  $D_o = 450 \text{ mm}$ ;  $t = 10 \text{ mm}$ .

**Análisis** En primer lugar se tiene que determinar si el cilindro se puede considerar como de pared delgada calculando la relación del diámetro medio al espesor de pared.

$$D_m = D_o - t = 450 \text{ mm} - 10 \text{ mm} = 440 \text{ mm}$$

$$D_m/t = 440 \text{ mm}/10 \text{ mm} = 44$$

Como ésta es mucho mayor que el límite inferior de 20, el cilindro es de pared delgada. Entonces se debe usar la ecuación (15-20) para calcular el esfuerzo anular y la ecuación (15-16) para calcular el esfuerzo longitudinal.

**Resultados** 
$$\sigma = \frac{pD_m}{2t} = \frac{(2000 \times 10^3 \text{ Pa})(440 \text{ mm})}{2(10 \text{ mm})} = 44.0 \text{ MPa}$$

El esfuerzo longitudinal, según la ecuación (15-12), es:

$$\sigma = \frac{pD_m}{4t} = 22.0 \text{ MPa}$$

**Ejemplo 15-3** Determine la presión requerida para que estalle un tubo de acero cédula 40 estándar de 8 plg si la resistencia última a la tensión del acero es de 40 000 lb/plg<sup>2</sup>.

**Solución** **Objetivo** Calcular la presión requerida para que estalle el tubo de acero.

**Datos** Resistencia última a la tensión del acero =  $s_u = 40\,000 \text{ lb/plg}^2$   
 El tubo es un tubo de acero cédula 40 estándar de 8 plg.  
 Las dimensiones del tubo se hallan en el apéndice A-12 como:

$$\text{diámetro externo} = 8.625 \text{ plg} = D_o$$

$$\text{diámetro interno} = 7.981 \text{ plg} = D_i$$

$$\text{espesor de pared} = 0.322 \text{ plg} = t$$

**Análisis** En primer lugar se tiene que determinar si el tubo es un cilindro de pared delgada calculando la relación del diámetro medio al espesor de pared.

$$D_m = \text{diámetro medio} = \frac{D_o + D_i}{2} = 8.303 \text{ plg}$$

$$\frac{D_m}{t} = \frac{8.303 \text{ plg}}{0.322 \text{ plg}} = 25.8$$

Como la relación es mayor que 20, se pueden usar las ecuaciones para pared delgada. El esfuerzo anular es el esfuerzo máximo y se debe usar para calcular la presión de ruptura.

**Resultados** Se usa la ecuación (15-20).

$$\sigma = \frac{pD_m}{2t} \quad (15-20)$$

Con  $\sigma = 40\,000 \text{ lb/plg}^2$  y el diámetro medio se determina que la presión de estallido es:

$$p = \frac{2t\sigma}{D_m} = \frac{(2)(0.322 \text{ plg})(40\,000 \text{ lb/plg}^2)}{8.303 \text{ plg}} = 3102 \text{ lb/plg}^2$$

**Comentario** Por lo general se aplica un factor de diseño de 6 o mayor a la presión de ruptura para obtener una presión de operación permisible. Este cilindro se limitaría a aproximadamente 500 lb/plg<sup>2</sup> de presión interna.

## 15-5 CILINDROS Y ESFERAS DE PARED GRUESA

Las fórmulas para cilindros y esferas de pared delgada en las secciones precedentes se derivaron bajo la suposición de que el esfuerzo es uniforme en toda la pared del recipiente. Tal como se planteó, si la relación del diámetro del contenedor a su espesor de pared es mayor que 20, esta suposición es razonablemente correcta. Por otra parte, si la relación es menor que 20, las paredes se consideran gruesas, y se requiere una técnica de análisis distinta.

La derivación detallada de las fórmulas para contenedores de pared gruesa no se abordará aquí debido a su complejidad. Véanse las referencias 1 y 2. Pero si se demostrará la aplicación de las fórmulas.

Para un cilindro de pared gruesa, la figura 15-5 muestra la notación a ser utilizada. La geometría se caracteriza por el radio interno  $a$ , el radio externo  $b$ , y cualquier posición radial entre  $a$  y  $b$ , llamada  $r$ . El *esfuerzo longitudinal* se llama  $\sigma_1$ ; el *esfuerzo anular* es  $\sigma_2$ . Éstos tienen el mismo significado que para recipientes de pared delgada, excepto que ahora tendrán magnitudes variables en diferentes posiciones de la pared. Además de los esfuerzos anular y longitudinal, en un recipiente de pared gruesa se crea un *esfuerzo radial*  $\sigma_3$ . Como su nombre lo indica, el esfuerzo radial actúa a lo largo de un radio del cilindro o esfera. Es un esfuerzo de compresión y varía desde una magnitud de cero en la superficie externa hasta un valor máximo en la superficie interna, donde es igual a la presión interna.

La tabla 15-1 resume las fórmulas necesarias para calcular los tres esfuerzos en las paredes de los cilindros y esferas de pared gruesa sometidos a presión interna. Los términos *esfuerzo longitudinal* y *esfuerzo anular* no se aplican a esferas. En su lugar, se hace referencia al *esfuerzo tangencial*, el cual es igual en todas las direcciones alrededor de la esfera. Por tanto:

$$\text{esfuerzo tangencial} = \sigma_1 = \sigma_2$$

## 15-6 PROCEDIMIENTO PARA ANALIZAR Y DISEÑAR RECIPIENTES A PRESIÓN ESFÉRICOS Y CILÍNDRICOS

Aquí se presenta un resumen de los principios planteados en este capítulo relacionados con el análisis del esfuerzo de esferas y cilindros de pared delgada y gruesa. El resumen se da en la forma de procedimientos generales para analizar y diseñar recipientes a presión. Por lo que se refiere a esfuerzos de diseño, se recomienda que se revise la sección 3-3. Se supondrá que la falla de un recipiente a presión sometido a

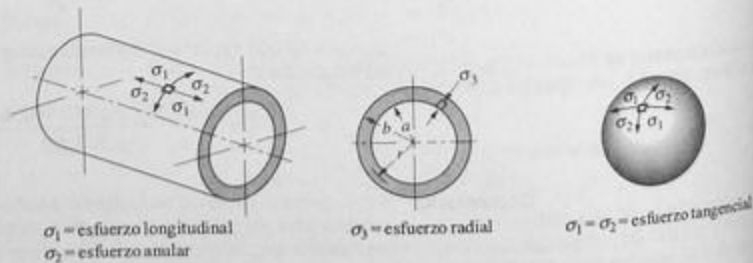


FIGURA 15-5 Notación para los esfuerzos que actúan en cilindros y esferas de pared gruesa.

TABLA 15-1 Esfuerzos en cilindros y esferas de pared gruesa\*

	Esfuerzo en la posición $r$	Esfuerzo máximo
<b>Cilindro de pared gruesa</b>		
Longitudinal	$\sigma_1 = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}$	$\sigma_1 = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}$ (uniforme en toda la pared)
Anular (tangencial)	$\sigma_2 = \frac{pa^2(b^2 + r^2)}{r^2(b^2 - a^2)}$	$\sigma_2 = \frac{p(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2}$ (en la superficie interna)
Radial	$\sigma_3 = \frac{-pa^2(b^2 - r^2)}{r^2(b^2 - a^2)}$	$\sigma_3 = -p$ (en la superficie interna)
<b>Esfera de pared gruesa</b>		
Tangencial	$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pa^3(b^3 + 2r^3)}{2r^3(b^3 - a^3)}$	$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{p(b^3 + 2a^3)}{2(b^3 - a^3)}$ (en la superficie interna)
Radial	$\sigma_3 = \frac{-pa^3(b^3 - r^3)}{r^3(b^3 - a^3)}$	$\sigma_3 = -p$ (en la superficie interna)

\* Los símbolos utilizados aquí son los siguientes:  $a$  = radio interno;  $b$  = radio externo;  $r$  = cualquier radio entre  $a$  y  $b$ ;  $p$  = presión interna, uniforme en todas las direcciones. Los esfuerzos son de tensión cuando son positivos, y de compresión cuando son negativos.

presión interna se debe a los esfuerzos de tensión que ocurren tangencialmente en las paredes del recipiente. Los esfuerzos de diseño deben tener en cuenta el material del cual está hecho el recipiente, el ambiente de operación, y si la presión es constante o variable de manera cíclica.

Véase también la sección 15-7 con respecto al análisis de otros modos de falla en recipientes que tienen penetraciones, apoyos estructurales, anillos de refuerzo y otras características que los hacen distintos de los recipientes cilíndricos y esféricos simples.

**Esfuerzos de diseño.** En el caso de *presión estable*, el esfuerzo de diseño se puede basar en la resistencia a la cedencia del material:

$$\sigma_d = s_y/N$$

La selección del factor de diseño,  $N$ , con frecuencia se hace conforme a un reglamento debido al peligro creado cuando un recipiente a presión falla. Esto es particularmente cierto en el caso de recipientes que contienen gases o vapor a presión porque las fallas producen la expulsión violenta del gas al liberarse un alto nivel de la energía almacenada. Sin un reglamento, se usará  $N = 4$  como valor mínimo y se deben usar valores mayores en aplicaciones críticas o donde exista incertidumbre con respecto a las condiciones de operación o las propiedades del material. Otra recomendación sugerida es limitar la presión en un recipiente a no más de 1/6 de la presión de ruptura pronosticada. Esto de hecho demanda un esfuerzo de diseño relacionado con la resistencia última a la tensión del material de:

$$\sigma_d = s_u/N = s_u/6$$

En el caso de *presión cíclica*, báse en el esfuerzo de diseño en la resistencia última:

$$\sigma_d = s_u/N$$

Utilícase  $N = 8$  como mínimo para producir una esfuerzo de diseño relacionado con la resistencia a la fatiga del material.

### A. Procedimiento para analizar recipientes a presión

- Datos** Presión interna en el recipiente,  $p$ .  
Material del que está hecho el recipiente. Se supone que es metal dúctil.  
Diámetro externo,  $D_o$ , diámetro interno,  $D_i$ , y espesor de pared  $t$ , para el recipiente.
- Objetivo** Determinar el esfuerzo máximo en el recipiente y verificar la seguridad de ese nivel de esfuerzo con respecto al esfuerzo de diseño en el material del que está hecho el recipiente.

1. Calcule el diámetro medio,  $D_m$  del recipiente con la ecuación (15-3):  $D_m = (D_o + D_i)/2$ .
2. Calcule la relación del diámetro medio al espesor de pared del recipiente,  $D_m/t$ .
3. Si  $D_m/t > 20$ , el recipiente se puede considerar como de pared delgada. Use la ecuación (15-12) para esferas o la ecuación (15-20) para cilindros para calcular el esfuerzo tangencial máximo en las paredes del recipiente.

$$\sigma = pD_m/4t \quad \text{para esferas} \quad (15-12)$$

$$\sigma = pD_m/2t \quad \text{para cilindros} \quad (15-20)$$

4. Si  $D_m/t < 20$ , el recipiente se debe considerar como de pared gruesa. Use las ecuaciones de la tabla 15-1 para calcular el esfuerzo tangencial o anular máximo en las paredes del recipiente.

$$\sigma = \frac{p(b^3 + 2a^3)}{2(b^3 - a^3)} \quad \text{para esferas}$$

$$\sigma = \frac{p(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} \quad \text{para cilindros}$$

5. Calcule el esfuerzo de diseño para el material del que está hecho el recipiente.
6. El esfuerzo máximo real debe ser menor que el esfuerzo de diseño por seguridad.

### B. Procedimiento para diseñar recipientes a presión de un material dado

- Datos** Presión interna en el recipiente,  $p$ .  
Material del que está hecho el recipiente. Se supone que es metal dúctil.  
Diámetro interno nominal del recipiente basado en la capacidad volumétrica deseada.
- Objetivo** Especificar el diámetro externo,  $D_o$ , el diámetro interno,  $D_i$ , y el espesor de pared,  $t$ , del recipiente con el objeto de garantizar la

seguridad del recipiente con respecto a esfuerzo de diseño en el material del que está hecho.

1. Use el diámetro dado como una estimación del diámetro medio,  $D_m$  del recipiente.
2. En principio suponga que el recipiente será de pared delgada y que el esfuerzo máximo se puede calcular con la ecuación (15-12) para una esfera o con la ecuación (15-20) para un cilindro. Esta suposición se verificará más adelante.
3. Calcule el esfuerzo de diseño del material del que está hecho el recipiente.
4. En la ecuación de esfuerzo apropiada, sustituya el esfuerzo de diseño correspondiente al esfuerzo máximo y resuélvala para el espesor de pared mínimo requerido,  $t$ .
5. Especifique valores convenientes de  $t$ ,  $D_i$  y  $D_o$  basados en los espesores del material disponibles. También se puede usar la tabla A-2 del apéndice para especificar las dimensiones básicas preferidas.
6. Calcule el diámetro medio real del recipiente utilizando las dimensiones especificadas.
7. Calcule la relación del diámetro medio al espesor de pared del recipiente,  $D_m/t$ .
8. Si  $D_m/t > 20$ , el recipiente es de pared delgada como se supuso y el diseño está terminado.
9. Si  $D_m/t < 20$ , el recipiente se debe considerar como de pared gruesa. Use las ecuaciones de la tabla 15-1 para calcular el esfuerzo tangencial o anular máximo en las paredes del recipiente y compárelo con el esfuerzo de diseño. Si el esfuerzo real es menor que el esfuerzo de diseño, el diseño es satisfactorio. Si el esfuerzo máximo real es mayor que el esfuerzo de diseño, incremente el espesor de pared y calcule de nuevo el esfuerzo resultante. Continúe este proceso hasta que se obtenga un nivel de esfuerzo satisfactorio y las dimensiones convenientes del recipiente. Este proceso se facilita con un programa de cómputo o una calculadora capaz de resolver ecuaciones.

**C. Procedimiento para especificar un metal dúctil para un recipiente a presión de un tamaño dado**

**Datos** Presión interna en el recipiente,  $p$ .  
Diámetro externo,  $D_o$ , diámetro interno,  $D_i$  y espesor de pared,  $t$ , del recipiente.

**Objetivo** Especificar un metal dúctil adecuado con el cual se va a fabricar el recipiente.

1. Calcule el diámetro medio,  $D_m$  del recipiente con la ecuación (15-3):  $D_m = (D_o + D_i)/2$ .
2. Calcule la relación del diámetro medio al espesor de pared del recipiente,  $D_m/t$ .
3. Si  $D_m/t > 20$ , el recipiente se puede considerar como de pared delgada. Use la ecuación (15-12) para esferas o la ecuación (15-20) para cilindros para calcular el esfuerzo máximo tangencial en las paredes del recipiente.

$$\sigma = pD_m/4t \quad \text{para esferas} \quad (15-12)$$

$$\sigma = pD_m/2t \quad \text{para cilindros} \quad (15-20)$$

4. Si  $D_m/t < 20$ , el recipiente se debe considerar como de pared gruesa. Use ecuaciones de la tabla 15-1 para calcular el esfuerzo tangencial o anular máximo en las paredes del recipiente.

$$\sigma = \frac{p(b^2 + 2a^2)}{2(b^2 - a^2)} \quad \text{para esferas}$$

$$\sigma = \frac{p(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} \quad \text{para cilindros}$$

5. Especifique una ecuación adecuada para el esfuerzo de diseño con base en el planteamiento al principio de esta sección.
6. Igual, el esfuerzo de diseño al esfuerzo máximo calculado en el paso 3 o 4. En seguida calcule la resistencia del material apropiada, ya sea  $s_y$  o  $s_w$  con la ecuación del esfuerzo de diseño.
7. Especifique un material adecuado cuya resistencia sea mayor que el valor mínimo requerido.

**Ejemplo 15-4**

Calcule la magnitud de los esfuerzos longitudinal, anular y radial máximos en un cilindro que contiene helio a una presión constante de 10 000 lb/plg<sup>2</sup>. El diámetro externo es de 8.00 plg y el interno de 6.40 plg. Especifique un material adecuado para el cilindro.

**Solución**

**Objetivo** Calcular los esfuerzos máximos y especificar un material.

**Datos** Presión =  $p = 10\,000$  lb/plg<sup>2</sup>,  $D_o = 8.00$  plg,  $D_i = 6.40$  plg

**Análisis** Se usa el procedimiento C de esta sección.

**Resultados** **Paso 1.**  $D_m = (D_o + D_i)/2 = (8.00 + 6.40)/2 = 7.20$  plg

**Paso 2.**  $r = (D_o - D_i)/2 = (8.00 - 6.40)/2 = 0.80$  plg  
 $D_m/t = 7.20/0.80 = 9.00$

**Paso 3.** Este paso no se aplica. El cilindro es grueso.

**Paso 4.** Uso ecuaciones de la tabla 15-1.

$$a = D_i/2 = 6.40/2 = 3.20 \text{ plg}$$

$$b = D_o/2 = 8.00/2 = 4.00 \text{ plg}$$

$$\sigma_l = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} = \frac{(10\,000 \text{ lb/plg}^2)(3.20 \text{ plg})^2}{(4.00^2 - 3.20^2) \text{ plg}^2}$$

$$= 17\,780 \text{ lb/plg}^2 \text{ longitudinales}$$

$$\sigma_2 = \frac{p(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} = \frac{(10\,000 \text{ lb/plg}^2)(4.00^2 + 3.20^2) \text{ plg}^2}{(4.00^2 - 3.20^2) \text{ plg}^2} = 45\,560 \text{ lb/plg}^2 \text{ anular}$$

$$\sigma_3 = -p = -10\,000 \text{ lb/plg}^2 \text{ radial}$$

Los tres esfuerzos alcanzan su valor máximo en la superficie interna del cilindro.

**Paso 5.** Sea el esfuerzo de diseño =  $\sigma_d = s_y/4$ .

**Paso 6.** El esfuerzo máximo es el esfuerzo anular,  $\sigma_2 = 45\,560 \text{ lb/plg}^2$ . Por tanto, la resistencia a la cedencia requerida del material es:

$$s_y = N(\sigma_2) = 4(45\,560 \text{ lb/plg}^2) = 182\,200 \text{ lb/plg}^2 = 182 \text{ ksi}$$

**Paso 7.** Del apéndice A-13, se puede especificar el acero AISI 4140 OQT 700 que tiene una resistencia a la cedencia de 212 ksi.

**Ejemplo 15-5** Calcule la magnitud de los máximos tangencial y radial en una esfera que contiene helio a una presión constante de  $10\,000 \text{ lb/plg}^2$ . El diámetro externo es de  $8.00 \text{ plg}$  y el diámetro interno es de  $6.40 \text{ plg}$ . Especifique el material conveniente para el cilindro.

**Solución** **Objetivo** Calcular los esfuerzos máximos y especificar un material.

**Datos** Presión =  $p = 10\,000 \text{ lb/plg}^2$ .  $D_o = 8.00 \text{ plg}$ .  $D_i = 6.40 \text{ plg}$

**Análisis** Úsese el procedimiento C de esta sección. Estos datos son los mismos que los que se aplican en el ejemplo 15-4. Algunos valores se transferirán hacia adelante.

**Resultados** **Pasos 1, 2, 3.** La esfera es de pared delgada.

**Paso 4.** Use las ecuaciones de la tabla 15-1.  $a = 3.20 \text{ plg}$ .  $b = 4.00 \text{ plg}$ .

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{p(b^3 + 2a^3)}{2(b^3 - a^3)} = \frac{(10\,000 \text{ lb/plg}^2)[4.00^3 + 2(3.20^3)] \text{ plg}^3}{2(4.00^3 - 3.20^3) \text{ plg}^3}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 20\,740 \text{ lb/plg}^2 \text{ tangencial}$$

$$\sigma_3 = -p = -10\,000 \text{ lb/plg}^2 \text{ radial}$$

Cada uno de estos esfuerzos alcanzan su valor máximo en la superficie interna.

**Pasos 5, 6.** Para un esfuerzo máximo de  $20\,740 \text{ lb/plg}^2$ , la resistencia a la cedencia que se requiere para el material es:

$$s_y = N(\sigma_2) = 4(20\,740 \text{ lb/plg}^2) = 82\,960 \text{ lb/plg}^2 = 83 \text{ ksi}$$

**Paso 7.** Del apéndice A-13, se puede especificar el acero AISI 4140 OQT 1300 que tiene una resistencia a la cedencia de 101 ksi. Se podrían usar otros aceros.

**Comentario** El esfuerzo máximo en la esfera es menor a la mitad que el del cilindro del mismo tamaño, y permite el uso de un material con una resistencia mucho menor. Por otra parte, se podría diseñar la esfera con el mismo material pero con un espesor de pared menor.



**Ejemplo 15-6** Un recipiente cilíndrico tiene un diámetro externo de 400 mm y un diámetro interno de 300 mm. Para una presión interna de 20.1 MPa, calcule el esfuerzo anular,  $\sigma_2$  en las superficies interna y externa y en puntos de la pared a intervalos de 10 mm. Trace una gráfica de  $\sigma_2$  con la posición radial en la pared.

**Solución** **Objetivo** Calcular el esfuerzo radial en posiciones específicas en la pared del cilindro.

**Datos** Presión =  $p = 20.1$  MPa.  $D_o = 400$  mm,  $D_i = 300$  mm.  
Se usan incrementos de 10 mm para el radio desde la superficie externa hasta la superficie interna.

**Análisis** Se usan los pasos 1-4 del procedimiento A de esta sección.

**Resultados** **Paso 1.**  $D_m = (D_o + D_i)/2 = (400 + 300)/2 = 350$  mm

**Paso 2.**  $t = (D_o - D_i)/2 = (400 - 300)/2 = 50$  mm  
 $D_m/t = 350/50 = 7.00 < 20$ ; el cilindro es de pared gruesa

**Paso 3.** Este paso no se aplica.

**Paso 4.** Use la ecuación del esfuerzo tangencial de la tabla 15-1.

$$\sigma_2 = \frac{pa^2(b^2 + r^2)}{r^2(b^2 - a^2)}$$

$$a = D_i/2 = 300/2 = 150 \text{ mm}$$

$$b = D_o/2 = 400/2 = 200 \text{ mm}$$

Los resultados se muestran en la tabla siguiente.

$r$ (mm)	$\sigma_2$ (MPa)	
200	51.7	(Mínimo en la superficie externa)
190	54.5	
180	57.7	
170	61.6	
160	66.2	
150	71.8	(Máximo en la superficie interna)

**Comentario** La figura 15-6 muestra la gráfica del esfuerzo tangencial contra la posición en la pared. La gráfica ilustra con toda claridad que la suposición de esfuerzo uniforme en la pared de un cilindro de pared gruesa *no* sería válida.

**Ejemplo 15-7** Diseñe un cilindro que tiene que ser de titanio envejecido Ti-6Al-4V para almacenar gas natural comprimido a 7500 lb/plg<sup>2</sup>. El diámetro interno debe ser de 24.00 plg para proporcionar el volumen necesario. El esfuerzo de diseño debe ser 1/6 de la resistencia última del titanio.

**Solución** **Objetivo** Diseñar el cilindro.

**Datos** Presión =  $p = 7500$  lb/plg<sup>2</sup>.  $D_i = 24.0$  plg.  
Titanio Ti-6Al-4V;  $s_u = 170$  ksi (Apéndice A-14)

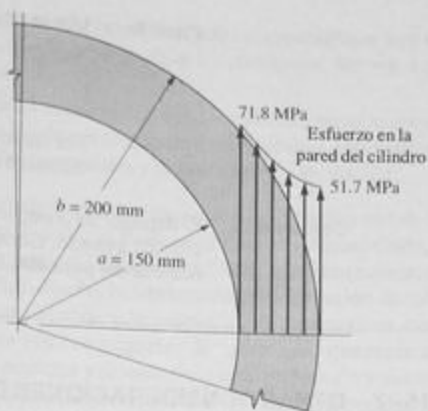


FIGURA 15-6 Variación del esfuerzo tangencial en la pared del cilindro de pared gruesa del ejemplo 15-6.

**Análisis** Se usa el procedimiento B de esta sección.

**Resultados** **Paso 1.** Sea  $D_m = 24.00$  plg.

**Paso 2.** Suponga que el cilindro es de pared delgada.

**Paso 3.** Esfuerzo de diseño:

$$\sigma_d = s_u/6 = (170\,000 \text{ lb/plg}^2)/6 = 28\,333 \text{ lb/plg}^2$$

**Paso 4.** Use la ecuación (15-20) para calcular el valor nominal de  $t$ .

$$t = \frac{pD_m}{2\sigma_d} = \frac{(7500 \text{ lb/plg}^2)(24.0 \text{ plg})}{2(28\,333 \text{ lb/plg}^2)} = 3.18 \text{ plg}$$

**Paso 5.** Prueba #1:  $D_i = 24.00$ ;  $t = 3.50$  plg;  $D_o = D_i + 2t = 31.00$  plg.

**Paso 6.**  $D_m = D_i + t = 24.00 + 3.50 = 27.50$  plg.

**Paso 7.**  $D_m/t = 27.50/3.50 = 7.86 < 20$ ; el cilindro es de pared gruesa.

**Paso 8.** Este paso no se aplica.

**Paso 9.** Use la ecuación de  $\sigma_2$  de la tabla 15-1.

$$a = D_i/2 = 24.00/2 = 12.00 \text{ plg}$$

$$b = D_o/2 = 31.00/2 = 15.50 \text{ plg}$$

$$\sigma_2 = \frac{p(b^2 + a^2)}{(b^2 - a^2)} = \frac{(7500 \text{ lb/plg}^2)(15.50^2 + 12.00^2)}{(15.50^2 - 12.00^2)}$$

$$\sigma_2 = 29\,940 \text{ lb/plg}^2 \text{ ligeramente elevado. Repita los pasos 5 y 9.}$$

**Paso 5.** Incremente  $t = 3.75$  plg;  $D_o = D_i + 2t = 31.50$  plg; el cilindro es de pared gruesa.

**Paso 9.** Use la ecuación de  $\sigma_2$  de la tabla 15-1.

$$a = D_i/2 = 24.00/2 = 12.00 \text{ plg}$$

$$b = D_o/2 = 31.50/2 = 15.75 \text{ plg}$$

Por tanto  $\sigma_2 = 28\,250 \text{ lb/plg}^2$ . Este valor es menor que el esfuerzo de diseño. OK

**Comentario** El espesor de pared es demasiado grueso, lo que daría por resultado un cilindro pesado. Considere utilizar una esfera y un material de mayor resistencia para el recipiente.

## 15-7 OTRAS CONSIDERACIONES DE DISEÑO PARA RECIPIENTES A PRESIÓN

Las técnicas de diseño y análisis presentadas hasta ahora tuvieron que ver sólo con el análisis del esfuerzo básico de cilindros y esferas ideales sin considerar penetraciones y otros cambios de geometría. Desde luego, los recipientes a presión más prácticos incorporan varias características que hacen que el recipiente se aparte de la forma ideal. Además, con frecuencia se aplican cargas externas que crean esfuerzos que se combinan con el esfuerzo producido por la presión interna. Por ejemplo:

- Un recipiente a presión esférico o cilíndrico por lo general tiene una o más lumbreras para llenarlo o vaciarlo. Las lumbreras a menudo se sueldan en el recipiente con lo que se provoca una discontinuidad en la geometría así como también una modificación de las propiedades del material cerca de la soldadura.
- Algunos recipientes a presión utilizados para reacciones químicas u otras aplicaciones de procesamiento de materiales contienen mirillas para observar el proceso. Las mirillas pueden contener bridas para sujetar la ventana transparente.
- Los recipientes cilíndricos con frecuencia se fabrican con sus extremos abovedados o hemisféricos para crear un diseño óptimo resistente a la presión interna. Pero, debido a que el esfuerzo tangencial en el extremo esférico es menor que el que actúa en el cilindro, se debe prestar una especial atención al diseño en la intersección de los extremos con la porción cilíndrica recta.
- Los cilindros grandes pueden contar con bandas o nervaduras aplicadas al interior o exterior para reforzarlos estructuralmente.
- Los cilindros y las esferas grandes pueden experimentar esfuerzos elevados a causa de su peso y contenido que se combinan con los esfuerzos producidos por la presión interna. Por ejemplo: un tanque cilíndrico relativamente largo en posición horizontal y apoyado cerca de sus extremos se ve sometido a esfuerzos flexionantes; un tanque cilíndrico es colocado con su eje en posición vertical se ve sometido a un esfuerzo de compresión axial.
- Los cilindros y las esferas grandes deben estar equipados con apoyos que transmitan el peso del recipiente y su contenido a un piso o la tierra. Cerca de tales apoyos existen condiciones de esfuerzo especiales.
- Los recipientes a presión utilizados en equipo de transporte terrestre a menudo experimentan cargas dinámicas provocadas por paro, arranque, movimiento del producto dentro del recipiente y vibración provocada por caminos accidentados.

- Los recipientes a presión en aviones y naves espaciales se ven sometidos a fuerzas de aceleración elevadas durante los aterrizajes, despegues, lanzamientos y maniobras rápidas.
- Las juntas entre las secciones de los recipientes a presión compuestos de dos o más piezas a menudo contienen discontinuidades geométricas que requieren técnicas de análisis especiales y una cuidadosa fabricación.

Las técnicas de análisis en esas condiciones no se abordan en este libro. Algunas se plantean en el referencias 2, 3 y 4. El *Boiler and Pressure Vessel Code*, publicado por la American Society of Mechanical Engineers (ASME), contiene numerosas normas y técnicas de análisis que rigen el diseño, la fabricación y la inspección de calderas y recipientes a presión para proteger la vida y la propiedad de una manera razonable. Muchos proveedores comerciales ofrecen paquetes de "software" que realizan los complejos cálculos requeridos para analizar y diseñar recipientes a presión y sus accesorios.

Las aplicaciones y ejemplos presentados en este capítulo recalcan el uso de metales para las paredes estructurales de los recipientes a presión. Otros materiales, en particular los materiales compuestos y los plásticos reforzados, a menudo también se usan. Se deben entender las características especiales de estos materiales cuando se usen en los recipientes a presión.

**Recipientes a presión compuestos.** Los materiales compuestos de alta resistencia son adecuados para la fabricación de recipientes a presión. El hecho de que los esfuerzos principales sean tangenciales (anulares) o longitudinales obligan al diseñador de recipientes compuestos a alinear las fibras compuestas en la dirección de los esfuerzos máximos. La envoltura circunferencial de cinta preimpregnada alrededor de cascos de metal o plástico ofrece ahorros significativos de peso en comparación con un diseño únicamente de metal o plástico. Para resistir los esfuerzos longitudinales causados por la presión interna junto con otras fuerzas externas, algunos tanques se envuelven helicoidalmente además de circunferencialmente. El espesor y la dirección de las capas se pueden adaptar a las cargas específicas esperadas en una aplicación particular.

Los materiales seleccionados para recipientes a presión compuestos incluyen fibra de vidrio E/resina epóxica, fibra de vidrio estructural/resina epóxica y carbono/resina epóxica. El costo es una factor de importancia en la especificación del material.

Los usos principales de los recipientes a presión compuestos incluyen aquellos en los que el peso ligero es un objetivo de diseño importante. El tanque de suministro de aire para los aparatos de respiración autónoma (SCBA) utilizados por los bomberos es un buen ejemplo porque los tanques ligeros permiten una mayor movilidad y menos fatiga. El peso reducido en aviones y naves espaciales permite mayores cargas útiles o un mejor desempeño de los vehículos aeroespaciales. El desarrollo de vehículos terrestres de gas natural comprimido (CNG) requiere la producción de cilindros ligeros para almacenar el combustible CNG. Se están llevando a cabo demostraciones en autobuses, flotillas de vehículos comerciales y en algunos vehículos de pasajeros. En la referencia 1 se reportan ejemplos de ahorros prácticos de peso. Un depósito de aire comprimido compuesto para vehículos de transporte que pesa 27 libras reemplazó a uno de acero y se ahorraron casi 100 libras. Un tanque SCBA de fibra de vidrio estructural/resina epóxica pesa 18 libras comparado con uno de aluminio que pesa 36 libras.

Se debe tener cuidado para garantizar que el material compuesto se adhiera bien y se adapte a la geometría de cualquier recipiente. Se requiere una atención particular en los extremos abovedados de los cilindros de presión y en la localización de las lumbreras. Éstas por lo general se colocan arriba o abajo en los polos de los extremos abovedados de tal modo que las fibras compuestas queden continuas. La colocación de las lumbreras en los costados de un tanque interrumpiría la integridad del devanado de los filamentos.

Además, la geometría del tanque con frecuencia se adapta para producir esfuerzos gradualmente variables en las juntas entre las lumbreras cilíndricas y los extremos abovedados. El espesor de las capas compuestas también se modifica según los esfuerzos esperados.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Advanstar Communications, Inc., *Design Guide for Advanced Composites Applications*, Duluth, MN, 1993.
2. American Society of Mechanical Engineers, *ASME Boiler & Pressure Vessel Code*, Fairfield, NJ, 1992.
3. Muvdi, B. B., and J.W. McNabb, *Engineering Mechanics of Materials*, 3rd ed., Springer-Verlag, New York, 1990.
4. Young, Warren C., *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1989.

## PROBLEMAS

- 15-1.M Calcule el esfuerzo en una esfera de 200 mm de diámetro externo y 184 mm de diámetro interno cuando se aplica una presión de 19.2 MPa.
- 15-2.M Un gran tanque esférico de almacenamiento de aire comprimido en una planta química es de 10.5 m de diámetro y está hecho de placa de acero AISI 1040 laminada en caliente, de 12 mm de espesor. ¿Qué presión interna podría soportar el tanque si se desea un factor de diseño de 4.0 basado en la resistencia a la cedencia?
- 15-3.M Se tiene que usar titanio 6Al-4V para fabricar un tanque esférico de 1200 mm de diámetro externo. La presión de trabajo en el tanque tiene que ser de 4.20 MPa. Determine el espesor requerido de la pared del tanque si se desea un factor de diseño de 4.0 basado en la resistencia a la cedencia.
- 15-4.M Si el tanque del problema 15-3 fuera de lámina de aluminio 2014-T6 en lugar de titanio, calcule el espesor de pared requerido. ¿Cuál diseño pesaría menos?
- 15-5.I Calcule el esfuerzo anular en las paredes de un tubo de acero cédula 40 de 10 plg si transporta agua a 150 lb/plg<sup>2</sup>.
- 15-6.M Un cilindro neumático tiene un diámetro interior de 80 mm y un espesor de pared de 3.5 mm. Calcule el esfuerzo anular en la pared del cilindro si se aplica una presión interna de 2.85 MPa.
- 15-7.M Un cilindro de acetileno tiene un diámetro de 300 mm y lo mantiene a 1.7 MPa. Si se desea un factor de diseño de 4.0 basado en la resistencia, calcule el espesor de pared requerido para el tanque. Use acero AISI 1040 estirado en frío.
- 15-8.M El cilindro de oxígeno compañero del de acetileno del problema 15-7 contiene oxígeno a 15.2 MPa. Su diámetro es de 250 mm. Calcule el espesor de pared requerido utilizando el mismo criterio.
- 15-9.M Un tanque de propano de un vehículo recreativo es de acero AISI 1040 laminado en caliente, de 2.20 mm de espesor. El diámetro del tanque es de 450 mm. Determine qué factor de diseño resultaría basado en la resistencia a la cedencia si el tanque se llena de propano a 750 kPa.
- 15-10.M El tanque de suministro de propano en las instalaciones del proveedor es un cilindro de 1800 mm de diámetro. Si se desea obtener un factor de diseño de 4 basado en la resistencia a la cedencia del acero AISI 1040 laminado en caliente, calcule el espesor requerido de las paredes del tanque cuando la presión interna es de 750 kPa.
- 15-11.M El oxígeno en una nave espacial se transporta a una presión de 70.0 MPa para reducir al mínimo el volumen requerido. El recipiente esférico tiene un diámetro externo de 250 mm y un espesor de pared de 18 mm. Calcule los esfuerzos tangencial y radial máximos en la esfera.
- 15-12.M Calcule los esfuerzos longitudinal, anular y radial máximos en la pared de un tubo de acero cédula 40 estándar de 1/2 plg cuando se somete a una presión interna de 1.72 MPa (250 lb/plg<sup>2</sup>).
- 15-13.M El cañón de una gran pieza de artillería de campo tiene un diámetro interno de 220 mm y un diámetro externo de 300 mm. Calcule la magnitud del esfuerzo anular en el cañón en puntos a 10 mm

uno de otro desde la superficie interna hasta la superficie externa. La presión interna es de 50 MPa.

- 15-14.M Un tubo de acero cédula 40 de 1 1/2 plg de diámetro tiene un radio medio de menos de 10 veces el espesor de pared y por tanto se debe clasificar como un cilindro de pared gruesa. Calcule los esfuerzos máximos que resultarían con las fórmulas tanto para pared delgada como pared gruesa producidos por una presión interna de 10.0 MPa.
- 15-15.M Un cilindro tiene 50 mm de diámetro externo y 30 mm de diámetro interno. Calcule el esfuerzo tangencial máximo en la pared del cilindro producido por una presión interna de 7.0 MPa.
- 15-16.M Para el cilindro del problema 15-15, calcule el esfuerzo tangencial en la pared a incrementos de 2.0 mm de adentro hacia afuera. Luego grafique los resultados del esfuerzo contra el radio.
- 15-17.M Para el cilindro del problema 15-15, calcule el esfuerzo radial en la pared a incrementos de 2.0 mm de adentro hacia afuera. Luego grafique los resultados del esfuerzo contra el radio.
- 15-18.M Para el cilindro del problema 15-15, calcule el esfuerzo tangencial pronosticado con la teoría de la pared delgada en vez de con la teoría de la pared gruesa. Compare el resultado con el esfuerzo calculado en el problema 15-15.
- 15-19.M Una esfera de acero inoxidable AISI 501 OQT 1000 tiene un diámetro externo de 500 mm y un espesor de pared de 40 mm. Calcule la presión máxima que se podría aplicar en la esfera suponiendo que el esfuerzo máximo tiene que ser un cuarto de la resistencia a la cedencia del acero.
- 15-20.M Para una esfera de 500 mm de diámetro externo y 420 mm de diámetro interno, calcule el esfuerzo tangencial en su pared a incrementos de 5.0 mm de adentro hacia afuera. En seguida grafique los resultados. Use una presión de 100 MPa.
- 15-21.M Para una esfera de 500 mm de diámetro externo y 420 mm de diámetro interno, calcule el esfuerzo radial en su pared a incrementos de 5.0 mm de adentro hacia afuera. Por último grafique los resultados. Use una presión de 100 MPa.
- 15-22.M Para visualizar la importancia de usar las fórmulas de pared gruesa para calcular esfuerzos en las paredes de un cilindro, calcule el esfuerzo tangencial máximo pronosticado en la pared de un cilindro con las fórmulas tanto para pared delgada como para pared gruesa en las siguientes condiciones. El diámetro externo de todos los diseños tiene que ser de 400 mm. El espesor de pared debe variar desde 5.0 mm hasta 85.0 mm en incrementos de 10.0 mm. Use una presión de 10.0 MPa. En seguida calcule la relación  $D_m/t$  y grafique la diferencia en porcentaje entre el esfuerzo calculado con la teoría de la pared gruesa y la teoría de la pared delgada contra dicha relación. Observe el incremento de la diferencia en porcentaje conforme el valor de  $D_m/t$  disminuye, es decir, conforme  $t$  se incrementa.
- 15-23.M El diámetro externo de una esfera es de 400 mm y el interno de 325 mm. Calcule la variación del esfuerzo tangencial de adentro hacia afuera en incrementos de 7.5 mm. Use una presión de 10.0 MPa.
- 15-24.M Una esfera tiene un diámetro externo de 400 mm y un diámetro interno de 325 mm. Calcule la variación del esfuerzo radial de adentro hacia afuera en incrementos de 7.5 mm. Use una presión de 10.0 MPa.
- 15-25.I El apéndice A-12 da las dimensiones del tubo de acero cédula 40 American National Standard. ¿Cuáles de estos tamaños se deben clasificar como de pared gruesa y cuáles se pueden considerar como de pared delgada?
- 15-26.I Diseñe un recipiente a presión cilíndrico que contendrá aire comprimido para una aparato de respiración autónoma utilizado por bomberos cuando trabajan en edificios invadidos de humo. El diámetro interno mínimo tiene que ser de 6.00 plg y la longitud de la porción cilíndrica del tanque de 15.0 plg. Debe soportar una presión de servicio de 4500 lb/plg<sup>2</sup>. Use un esfuerzo de diseño de  $s_d/8$  para tener en cuenta un gran número de ciclos de presurización. Además, verifique el diseño final con respecto a su capacidad de soportar una presión máxima de 13 500 lb/plg<sup>2</sup> calculando el factor de diseño basado en la resistencia a la cedencia. El tanque tiene que ser de aleación de aluminio 6061-T6. Calcule el peso de sólo la porción cilíndrica.
- 15-27.I Repita el problema 15-26, pero use titanio Ti-6Al-4V.
- 15-28.I Repita el problema 15-26 pero use acero inoxidable 17-4PH H900.
- 15-29.I Para cualquiera de los diseños del cilindro de aire SCBA de los problemas 15-26, 15-27 o 15-28, dibuje el tanque completo con cabezas hemisféricas en cada extremo. Muestre una lumbrera en un extremo para montar el mecanismo de descarga y el regulador de presión. Suponiendo que el espesor de pared de las cabezas es el mismo que el espesor de pared de la porción cilíndrica, calcule el peso aproximado del tanque completo.

- 15-30.1 Repita el problema 15-26 pero ahora use el material compuesto de grafito y resina epóxica incluido en la tabla 2-6 del capítulo 2 cuya resistencia a la tensión es de 278 ksi. Verifique el diseño final calculando el factor de diseño con respecto a resistencia a la tensión con la presión máxima de 13 500 lb/plg<sup>2</sup>. El tanque se cubrirá con una película polimérica delgada y se envolverá por completo con el compuesto unidireccional en un patrón circunferencial con el objeto de resistir el esfuerzo anular en el cilindro. Ignore la contribución del recubrimiento en el análisis y en el cálculo del peso. (Observe que el cilindro tal vez también requiera que se apliquen algunas capas en un patrón helicoidal para resistir el esfuerzo longitudinal y para permitir la formación de los extremos abovedados. Por consiguiente, el peso final será algo más elevado que el calculado para la parte circunferencialmente envuelta.)
- 15-31.1 Diseñe un tanque esférico para contener oxígeno a una presión de 3000 lb/plg<sup>2</sup> con un diámetro interno de 18.0 plg. Use acero inoxidable AISI 501 OQT 1000 y un factor de diseño de 6 basado en la resistencia última. Calcule el peso del tanque.
- 15-32.1 Repita el problema 15-31 pero ahora con aleación de aluminio 7075-T6.
- 15-33.1 Repita el problema 15-31 pero ahora con aleación de titanio Ti-6Al-4V.
- 15-34.M Diseñe un tanque cilíndrico para gas natural comprimido a 4.20 MPa. El diámetro mínimo interno tiene que ser de 450 mm. Use aleación de aluminio 6061-T6 y un factor de diseño de 8 basado en la resistencia última.
- 15-35.1 Diseñe un tanque cilíndrico para aire comprimido que se usará para proporcionar servicio remoto para la reparación de llantas de camión. La presión del aire será de 300 lb/plg<sup>2</sup>. El diámetro interno mínimo del tanque tiene que ser de 24 plg. Use acero AISI 1040 estirado en frío y un factor de diseño de 8 basado en la resistencia última. Verifique el diseño final con respecto a una presión máxima de 900 lb/plg<sup>2</sup> calculando el factor de diseño basado en la resistencia a la cedencia.

## TAREAS DE COMPUTACIÓN

- Escriba un programa para calcular el esfuerzo tangencial en la pared de una esfera de pared delgada. Incluya el cálculo del diámetro medio y la relación del diámetro medio al espesor para verificar que sea de pared delgada.
- Escriba un programa para calcular el esfuerzo tangencial en la pared de un cilindro de pared delgada. Incluya el cálculo del diámetro medio y la relación de éste al espesor para verificar que sea de pared delgada.
- Escriba un programa para calcular el esfuerzo longitudinal en la pared de un cilindro de pared delgada. Incluya el cálculo del diámetro medio y la relación de éste al espesor para verificar que sea de pared delgada.
- Combine los programas de las tareas 2 y 3.
- Combine los programas de las tareas 1, 2 y 3 y deje que el usuario especifique si el recipiente es un cilindro o una esfera.
- Reescriba los programas de las tareas 1, 2 y 5 de modo que el objetivo sea calcular el espesor de pared requerido del recipiente a presión para producir un esfuerzo máximo a una presión interna dada.
- Escriba un programa para calcular los esfuerzos longitudinal, anular y radial máximos en la pared de un cilindro de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 15-1.
- Escriba un programa para calcular el esfuerzo tangencial en cualquier radio dentro de la pared de un cilindro de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 15-1.
- Escriba un programa para calcular el esfuerzo radial en cualquier radio dentro de la pared de un cilindro de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 15-1.
- Escriba un programa para calcular el esfuerzo tangencial en cualquier radio dentro de la pared de una esfera de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 15-1.
- Escriba un programa para calcular el esfuerzo radial en cualquier radio dentro de la pared de una esfera de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 15-1.
- Combine los programas de las tareas 8 a 11.
- Escriba un programa para calcular la distribución del esfuerzo tangencial dentro de la pared de un cilindro de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 15-1. Comience en el radio interior y especifique un número de incrementos de adentro hacia afuera.
- Escriba un programa para calcular la distribución del esfuerzo radial dentro de la pared de un cilindro de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 15-1. Comience en el radio interior y especifique un número de incrementos de adentro hacia afuera.

15. Escriba un programa para calcular la distribución del esfuerzo tangencial dentro de la pared de una esfera de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 15-1. Comience en el radio interior y especifique un número de incrementos de adentro hacia afuera.

16. Escriba un programa para calcular la distribución del esfuerzo radial dentro de la pared de una esfera de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 15-1. Comience en el radio interior y especifique un número de incrementos de adentro hacia afuera.

17. Escriba un programa para realizar cálculos como los del problema 15-22.

18. Escriba un programa para realizar cálculos como los del problema 15-22, excepto que en este caso son para una esfera.

19. Escriba un programa para calcular el esfuerzo tangencial máximo en cualquier tubo cédula 40 estándar para una presión interna dada. Incluya una tabla de datos para las dimensiones de los tubos enumerados en el apéndice A-12. Incluya un procedimiento de verificación para ver si el tubo es de pared gruesa o delgada.





# 16

## Conexiones

### 16-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Los miembros de carga que forman parte de estructuras y máquinas deben actuar *juntos* para realizar sus funciones deseadas. Después de completar el diseño o el análisis de los miembros principales, se requiere especificar las conexiones adecuadas entre ellos. Como su nombre lo indica, las conexiones enlazan los miembros.

El objetivo primordial de este capítulo es proporcionar datos y métodos de análisis para el diseño seguro de juntas remachadas, juntas atornilladas y juntas soldadas. Después de terminar el estudio de este capítulo, el lector será capaz de:

1. Describir la geometría típica de las juntas remachadas y atornilladas.
2. Identificar los modos probables de falla de una junta.
3. Reconocer los estilos típicos de remaches.
4. Identificar cuándo un sujetador está a cortante simple o a cortante doble.
5. Analizar una junta remachada o atornillada con respecto a su capacidad de resistir fuerza cortante.
6. Analizar una junta remachada o atornillada con respecto a su capacidad de resistir fuerza de tensión.
7. Analizar una junta remachada o atornillada con respecto a su capacidad de resistir esfuerzo de apoyo.
8. Usar los esfuerzos permisibles para conexiones de acero estructural publicadas por el American Institute of Steel Construction (AISC).
9. Describir la diferencia entre una conexión tipo fricción y una conexión tipo apoyo y completar el análisis apropiado.

10. Usar los esfuerzos permisibles para conexiones estructurales de aluminio publicadas por la Aluminum Association.
11. Analizar las juntas cargadas tanto simétrica como excéntricamente.
12. Analizar las juntas soldadas con cargas concéntricas.

## 16-2 TIPOS DE CONEXIONES

Las estructuras y los dispositivos mecánicos dependen de las conexiones entre los elementos de carga para mantener su integridad. Las conexiones constituyen la ruta por la que las cargas se transfieren de un elemento a otro.

Los tres tipos comunes de conexiones son las remachadas, las soldadas y las atornilladas. La figura 16-1 muestra una tolva para almacenar material a granel suspendida por soleras rectangulares de una viga en T. Durante la fabricación de la tolva, se soldaron orejetas de apoyo en el exterior de las paredes laterales. Las orejetas contienen un arreglo de agujeros, que permiten que las soleras se atornillen en el sitio de ensamble. Antes de la instalación de la viga en T, las soleras se remacharon en su alma.

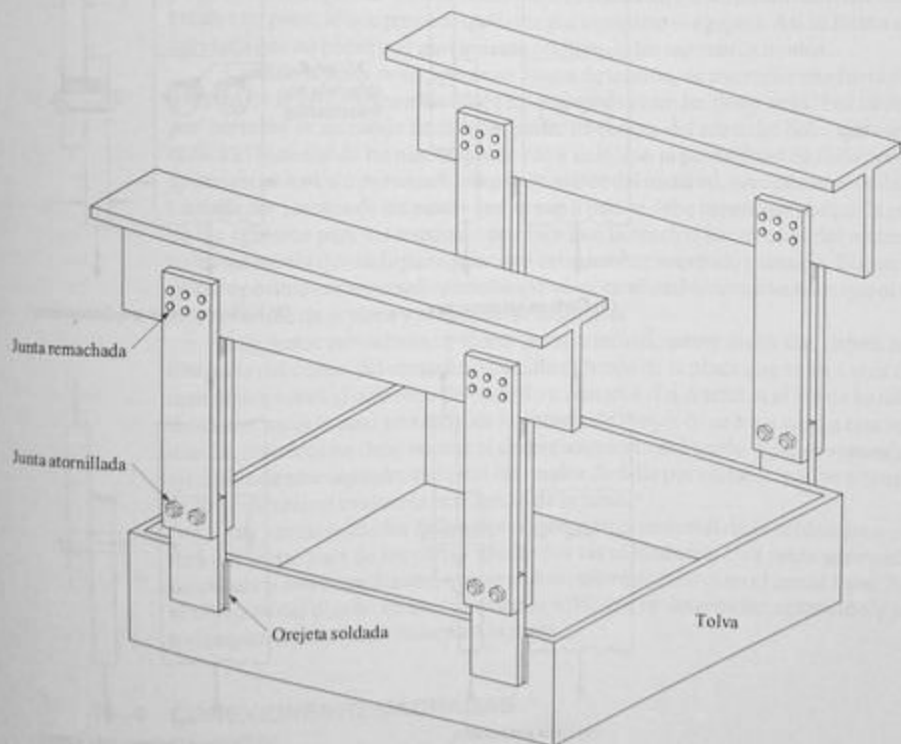


FIGURA 16-1 Ilustración de tres tipos de juntas: remachada, atornillada y soldada.

La carga originada por el peso de la tolva y los materiales se transfiere de las paredes de la tolva a las orejetas a través de las soldaduras. En seguida los cuatro tornillos transfieren la carga a las soleras, las cuales actúan como miembros sujetos a tensión. Por último, los seis remaches transfieren la carga a la T.

### 16-3 MODOS DE FALLA

En el caso de conexiones remachadas y atornilladas, existen cuatro posibles modos de falla que tienen que ver con cuatro tipos diferentes de esfuerzos presentes cerca de la junta. La figura 16-2 ilustra estas clases de esfuerzos en una junta traslapada simple donde dos placas planas están unidas con dos remaches. La junta se prepara perforando o punzonando agujeros en cada placa. En seguida los remaches, cuya forma original es una de las mostradas en la figura 16-3, se insertan en los agujeros, y las cabezas se recalcan.

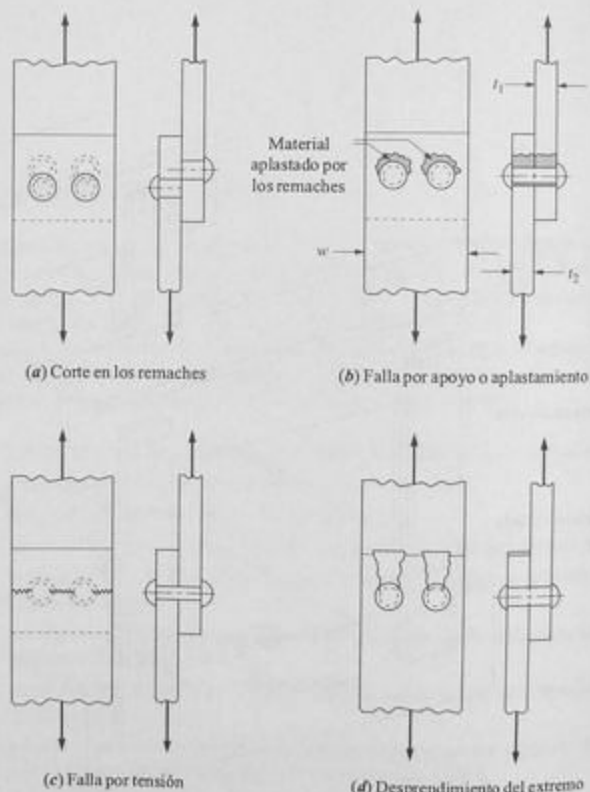


FIGURA 16-2 Tipos de falla de conexiones remachadas.

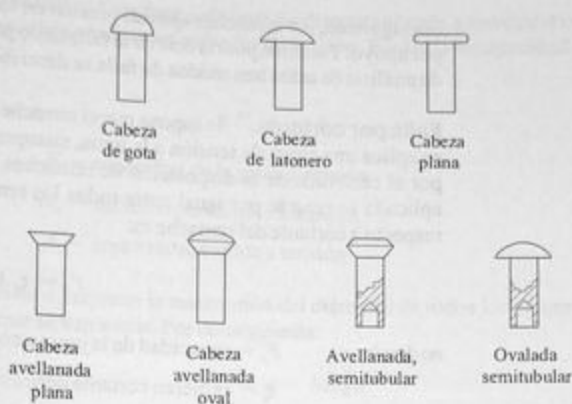


FIGURA 16-3 Ejemplos de estilos de remaches.

y sujetan las dos placas. En una buena junta remachada, el cuerpo del remache también se recalca un poco, lo que provoca que llene por completo el agujero. Así se forma una junta apretada que no permite el movimiento relativo de los miembros unidos.

Cuando la junta se somete a una fuerza de tensión, se transmite una fuerza cortante a través de la sección transversal de los remaches entre las dos placas. Por tanto la *falla por cortante* es un modo de falla de junta. El cuerpo del remache debe ejercer presión contra el material de las placas que se van a unir, con la posibilidad de *falla por apoyo o aplastamiento*. Esto provocaría el aplastamiento del material, normalmente en las placas. La *falla por tensión* de las placas que se van a unir se debe investigar porque la presencia de los agujeros para los remaches provoca que la sección transversal del material en la junta sea menor que en la parte principal del miembro sometido a tensión. El cuarto modo de falla posible es *desprendimiento de extremo*, en el cual el remache hace que el material entre el borde de la placa y el agujero se desprenda.

Las juntas remachadas y atornilladas adecuadamente diseñadas deben tener una distancia del centro del remache o tornillo al borde de la placa que se va a unir de por lo menos dos veces el diámetro del tornillo o remache. La distancia al borde se mide en la dirección hacia la cual está dirigida la presión de apoyo. Si se hace caso a esta recomendación, entonces no debe ocurrir el desprendimiento del borde. Esto se supondrá en los ejemplos de este capítulo. Así pues los modos de falla por cortante, apoyo y tensión sólo se considerarán al evaluar la resistencia de la junta.

Las juntas soldadas fallan por cortante en el material de la soldadura o por fractura del metal base de las partes unidas por las soldaduras. Una junta adecuadamente fabricada y con buen diseño, que se suelda, siempre fallará en el metal base. Por tanto el objetivo del diseño de las conexiones soldadas es determinar el tamaño y la longitud requeridos de la soldadura en la junta.

#### 16-4 CONEXIONES REMACHADAS

En las conexiones remachadas, se supone que las placas unidas *no* están fuertemente sujetas entre sí como para provocar fuerzas de fricción entre ellas y transmitir cargas. Por

consiguiente, los remaches ejercen presión en los agujeros, y se debe investigar la falla por apoyo. También podría ocurrir la falla tanto por cortante como por tensión. El método de análisis de estos tres modos de falla se describe a continuación.

**Falla por cortante.** Se supone que el remache se ve sometido a cortante directo cuando se aplica una carga de tensión a la junta, siempre que la línea de acción de la carga pase por el centroide de la disposición de remaches. También se supone que la carga total aplicada se reparte por igual entre todos los remaches. La capacidad de una junta con respecto a cortante del remache es:

$$F_s = \tau_a A_s \quad (16-1)$$

en donde  $F_s$  = capacidad de la junta a cortante  
 $\tau_a$  = esfuerzo cortante permisible en los remaches  
 $A_s$  = área sometida a cortante

El área sometida a cortante depende del número de secciones transversales de remaches disponibles para resistir el cortante. Si este número se designa  $N_s$ :

$$A_s = \frac{N_s \pi D^2}{4} \quad (16-2)$$

en donde  $D$  es el diámetro del remache. En algunos casos, sobre todo en el caso de remaches hincados calientes, el cuerpo se dilata para llenar el agujero, y por tanto se dispone de un área mayor para resistir el cortante. Sin embargo, el incremento es pequeño, y en este caso se usará sólo el diámetro nominal.

Para determinar  $N_s$ , se debe observar si existe *cortante simple* o *cortante doble* en la junta. La figura 16-2 muestra un ejemplo de cortante simple. Sólo una sección transversal de cada remache resiste la carga aplicada. Luego  $N_s$  es igual al número de remaches en la junta. Las soleras utilizadas para soportar la tolva mostrada en la figura 16-1 pone a los remaches y tornillos a cortante doble. Dos secciones transversales de cada remache resisten la carga aplicada. Por tanto  $N_s$  es dos veces el número de remaches en la junta.

**Falla por apoyo.** Cuando un remache cilíndrico ejerce presión contra la pared de un agujero en la placa, existe una presión no uniforme entre ellas. Como una simplificación de la distribución del esfuerzo real, se supone que el área sometida a apoyo,  $A_b$ , es el área rectangular calculada multiplicando el espesor de la placa  $t$  por el diámetro del remache  $D$ . Esta área se puede considerar como el *área proyectada* del agujero del remache. Por tanto la capacidad de resistir apoyo o aplastamiento de una junta es:

$$F_b = \sigma_{bo} A_b \quad (16-3)$$

en donde  $F_b$  = capacidad de la junta de resistir al apoyo o aplastamiento

$\sigma_{bo}$  = esfuerzo de apoyo permisible

$A_b$  = área sometida a apoyo =  $N_b D t$

$N_b$  = número de superficies sometidas a apoyo

$t$  = espesor de las placas

(16-4)

**Falla por tensión.** Una fuerza de tensión directa aplicada a través del centroide del arreglo de remaches produce un esfuerzo de tensión. Por tanto la capacidad de la junta a tensión sería:

$$F_t = \sigma_w A_t \quad (16-5)$$

en donde  $F_t$  = capacidad de la junta a tensión  
 $\sigma_w$  = esfuerzo permisible a tensión  
 $A_t$  = área neta sometida a tensión

La evaluación de  $A_t$  requiere la sustracción del diámetro de todos los agujeros del ancho de las placas que se van a unir. Por consiguiente:

$$A_t = (w - ND_H)t \quad (16-6)$$

en donde  $w$  = ancho de la placa  
 $D_H$  = diámetro del agujero (en estructuras se usa  $D_H = D + 1/16$  plg o  $D = 2$  mm)  
 $N$  = número de agujeros en la sección de interés  
 $t$  = espesor de las placas

## 16-5 ESFUERZOS PERMISIBLES

En el caso de miembros no cubiertos por reglamentos y especificaciones, los esfuerzos permisibles se pueden determinar con los factores de diseño presentados en el apéndice A-20. Para el diseño de estructuras de acero para edificios, por lo general se usan las especificaciones del American Institute of Steel Construction (AISC) (1).

**TABLA 16-1** Esfuerzos permisibles para conexiones de acero estructural\*

Remaches	Esfuerzo cortante permisible		Esfuerzo de tensión permisible	
	ksi	MPa	ksi	MPa
ASTM A502				
Grado 1	17.5	121	23	159
Grado 2	22	152	29	200
Tornillos	Esfuerzo cortante permisible <sup>†</sup>		Esfuerzo de tensión permisible	
	ksi	MPa	ksi	MPa
ASTM A325	17.5	121	44	303
ASTM A490	22	152	54	372
Miembros conectados	Esfuerzo cortante permisible <sup>‡§</sup>		Esfuerzo de tensión permisible <sup>‡</sup>	
Todas las aleaciones	1.20 $s_u$		0.6 $s_u$	

\*Especificaciones AISC.

<sup>†</sup>Para conexión de fricción. Para conexión de apoyo sin roscas en la plano de cortante, use 30 ksi (207 MPa) para A325 y 40 ksi (276 MPa) para A490.

<sup>‡</sup>Véase el apéndice A-15 con respecto a aceros estructurales.

<sup>§</sup>El esfuerzo de apoyo no se considera en las juntas atornilladas de fricción.

**TABLA 16-2** Esfuerzos permisibles para conexiones estructurales de aluminio.

Remaches				
Aleación y temple		Esfuerzo cortante permisible		
Antes de hincarlos	Después de hincarlos*	ksi	MPa	
1100-H14	1100-F	4	27	
2017-T4	2017-T3	14.5	100	
6053-T61	6053-T61	8.5	58	
6061-T6	6061-T6	11	76	

Tornillos				
Aleación y temple	Esfuerzo cortante permisible <sup>†</sup>		Esfuerzo de tensión permisible <sup>†</sup>	
	ksi	MPa	ksi	MPa
2024-T4	16	110	26	179
6061-T6	12	83	18	124
7075-T73	17	117	28	193

Miembros conectados		
Aleación y temple	Esfuerzo de apoyo permisible	
	ksi	MPa
1100-H14	12.5	86
2014-T6	49	338
3003-H14	15	103
6061-T6	34	234
6063-T6	24	165

Fuente: Aluminum Association, *Specifications for Aluminum Structures*, 5a. ed., Washington, DC, 1986.

\* Todos los hincados en frío.

<sup>†</sup> Los esfuerzos están basados en el área correspondiente al diámetro nominal del tornillo a menos que las roscas queden en el plano de cortante. Por tanto, el área cortante se basa en el diámetro de raíz.

Para estructuras de aluminio, la Aluminum Association publicó sus *Specifications for Aluminum Structures* (2). La tabla 16-1 da esfuerzos permisibles para estructuras de acero. La tabla 16-2 resume algunos esfuerzos permisibles para aluminio.

## 16-6 CONEXIONES ATORNILLADAS

El análisis de conexiones atornilladas es igual al de conexiones remachadas si se permite que el tornillo ejerza apoyo en el agujero, como en una conexión sometida a apoyo. Esto ocurriría en las juntas donde la fuerza de sujeción provista por los tornillos es pequeña. Sin embargo, la mayoría de las conexiones atornilladas se hacen con tornillos de alta resistencia, como los A325 y A490, apretados a un elevado nivel de tensión. Las grandes fuerzas de sujeción resultantes forman una junta de fricción donde las fuerzas de fricción entre las dos superficies acopladas transmiten la mayor parte de la carga soportada por la junta. Los tornillos también se diseñan para cortante, con las resistencias enumeradas en la tabla 16-1. Pero el esfuerzo de apoyo no se considera en una junta de fricción.

## 16-7 EJEMPLOS—JUNTAS REMACHADAS Y ATORNILLADAS

**Ejemplo 16-1** Para la junta traslapada simple mostrada en la figura 16-2, determine la carga permisible en ella si las dos placas son de 1/4 plg de espesor por 2 plg de ancho y están unidas por dos remaches de acero ASTM A502, grado 1, de 1/4 plg de diámetro. Las placas son de acero estructural ASTM A36.

<b>Solución</b>	<b>Objetivo</b>	Calcular la carga permisible en la junta.
	<b>Datos</b>	Espesor de las placas = $t = 0.25$ plg; ancho de las placas = $w = 2.00$ plg Las placas son de acero estructural ASTM A36. Remaches: Diámetro = $D = 0.25$ plg; ASTM A502, grado 1.
	<b>Análisis</b>	Se investigarán las fallas por cortante, apoyo y tensión para determinar la capacidad de la junta con respecto a los tres modos. El menor de los tres valores es entonces la carga limitante en la junta.
	<b>Resultados</b>	<b>Falla por cortante</b>

$$F_s = \tau_s A_s \quad (16-1)$$

Según la tabla 16-1,  $\tau_s = 17.5$  ksi. En los dos remaches sometidos a cortante simple, hay dos planos de cortante. Por tanto:

$$A_s = \frac{N_s \pi D^2}{4} = \frac{2\pi(0.25 \text{ plg})^2}{4} = 0.098 \text{ plg}^2 \quad (16-2)$$

La capacidad de la junta a cortante es:

$$F_s = (17\,500 \text{ lb/plg}^2)(0.098 \text{ plg}^2) = 1715 \text{ lb}$$

**Falla por apoyo o aplastamiento**

$$F_b = \sigma_{ba} A_b \quad (16-3)$$

Para apoyo,  $s_{ba} = 1.20 s_u$ . Para acero ASTM A36,  $s_u = 58$  ksi. Entonces:

$$\sigma_{ba} = 1.20(58\,000 \text{ lb/plg}^2) = 69\,600 \text{ lb/plg}^2$$

El área sometida a aplastamiento es:

$$A_b = N_b D t \quad (16-4)$$

La fuerza en una u otra placa es resistida por dos superficies. Por consiguiente:

$$A_b = 2(0.25 \text{ plg})(0.25 \text{ plg}) = 0.125 \text{ plg}^2$$

La capacidad de la junta sometida a aplastamiento es:

$$F_b = (69\,600 \text{ lb/plg}^2)(0.125 \text{ plg}^2) = 8700 \text{ lb}$$



**Falla por tensión.** Las placas fallarían a tensión a través de una sección que pasa por los agujeros de los remaches, como se indica en la figura 16-2(c).

$$F_t = \sigma_u A_t$$

Según la tabla 16-1:

$$\sigma_u = 0.6s_y = 0.6(36\,000 \text{ lb/plg}^2) = 21\,600 \text{ lb/plg}^2$$

El área neta sometida a tensión, suponiendo que  $D_H = D + 1/16 \text{ plg}$ , es:

$$\begin{aligned} A_t &= (w - ND_H)t = [2.0 \text{ plg} - 2(0.25 + 0.063) \text{ plg}](0.25 \text{ plg}) \\ &= 0.344 \text{ plg}^2 \end{aligned}$$

La capacidad de la junta a tensión es:

$$F_t = (21\,600 \text{ lb/plg}^2)(0.344 \text{ plg}^2) = 7425 \text{ lb}$$

**Comentario** Como la falla por cortante ocurriría con una carga de 1715 lb, ésta es la capacidad de la junta.

**Ejemplo 16-2** Determine la carga permisible para una junta de las mismas dimensiones que la junta del ejemplo 16-1, pero ahora use dos tornillos ASTM A490 de 3/8 plg de diámetro en una conexión de apoyo sin roscas en el plano de cortante.

**Solución** **Objetivo** Calcular la carga permisible en la junta.

**Datos** Espesor de las placas =  $t = 0.25 \text{ plg}$ ; ancho de las placas =  $w = 2.00 \text{ plg}$   
 Las placas son de acero estructural ASTM A36.  
 Tornillos: Diámetro =  $D = 0.375 \text{ plg}$ ; ASTM A490  
 Conexión tipo apoyo; sin roscas en el plano de cortante.

**Análisis** Al igual que en el ejemplo 16-1, se investigarán la falla posible a cortante, apoyo y tensión. El menor de los tres valores es la carga límite en la junta.

**Resultados** **Falla por cortante**

$$F_s = \tau_u A_s$$

$$\tau_u = 40\,000 \text{ lb/plg}^2 \quad (\text{Nota al pie de la tabla 16-1})$$

$$A_s = \frac{2\pi(0.375 \text{ plg})^2}{4} = 0.221 \text{ plg}^2$$

Por lo tanto:

$$F_s = (40\,000 \text{ lb/plg}^2)(0.221 \text{ plg}^2) = 8840 \text{ lb}$$

### Falla por apoyo

$$F_b = \sigma_{ba} A_b$$

$$\sigma_{ba} = 1.20(58\,000 \text{ lb/plg}^2) = 69\,600 \text{ psi}$$

$$A_b = N_b D t = (2)(0.375 \text{ plg})(0.25 \text{ plg}) = 0.188 \text{ plg}^2$$

Por consiguiente:

$$F_b = (69\,600 \text{ lb/plg}^2)(0.188 \text{ lb/plg}^2) = 13\,050 \text{ lb}$$

### Falla por tensión

$$F_t = \sigma_{ta} A_t$$

$$\sigma_{ta} = 0.6(36\,000 \text{ lb/plg}^2) = 21\,600 \text{ lb/plg}^2$$

$$A_t = [2.0 \text{ plg} - 2(0.375 + 0.063) \text{ plg}](0.25 \text{ plg}) = 0.281 \text{ plg}^2$$

Por consiguiente:

$$F_t = (21\,600 \text{ lb/plg}^2)(0.281 \text{ plg}^2) = 6070 \text{ lb}$$

**Comentario** En este caso la capacidad a tensión es la menor, así que la capacidad de la junta es de 6070 lb.

## 16-8 JUNTAS REMACHADAS Y ATORNILLADAS EXCÉNTRICAMENTE CARGADAS

Las juntas previamente consideradas se limitaron a casos en los que la línea de acción de la carga en la junta pasaba por el centroide del arreglo de remaches o tornillos. En esos casos, la carga aplicada se reparte por igual entre todos los sujetadores. Cuando la carga no pasa por el centroide del arreglo de sujetadores, se llama *junta cargada excéntricamente*, y en los sujetadores ocurre una distribución no uniforme de fuerzas.

En juntas excéntricamente cargadas, se debe considerar el efecto del momento o par en el sujetador. La figura 16-4 muestra una ménsula afianzada unida a la cara de una columna y utilizada para soportar un motor eléctrico. La fuerza neta dirigida hacia abajo por el peso del motor y la tensión de la banda actúa a una distancia  $a$  del centro del patín de la columna. Por tanto el sistema de fuerzas total que actúa en los tornillos de la ménsula se compone de la fuerza cortante directa  $P$  más el momento  $P \times a$ . Cada una de estas componentes se puede considerar por separado y luego sumadas utilizando el principio de superposición.

La figura 16-5(a) muestra que por lo que se refiere a la fuerza cortante  $P$ , se supone que cada tornillo soporta una parte igual de la carga, como en las juntas concéntricamente cargadas. Pero en la parte (b) de la figura, debido al momento, cada tornillo se ve sometido a una fuerza que actúa perpendicular a una línea radial que parte del centroide del

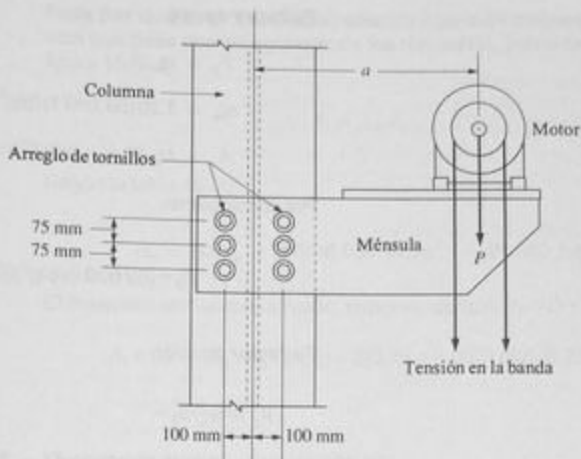


FIGURA 16-4 Carga excéntrica en una junta atornillada.

arreglo de tornillos. Se supone que la magnitud de la fuerza en un tornillo producida por el momento es proporcional a su distancia  $r$  del centroide. Esta magnitud es:

$$R_i = \frac{Mr_i}{\sum r^2} \quad (16-7)$$

en donde

$R_i$  = fuerza cortante en el tornillo  $i$  debido al momento  $M$

$r_i$  = distancia radial al tornillo  $i$  a partir del centroide del arreglo de tornillos

$\sum r^2$  = suma de las distancias radiales a *todos* los tornillos del arreglo elevadas al cuadrado

Si es más conveniente trabajar con componentes horizontales y verticales, se pueden determinar como sigue:

$$R_{ix} = \frac{My_i}{\sum r^2} = \frac{My_i}{\sum (x^2 + y^2)} \quad (16-8)$$

$$R_{iy} = \frac{Mx_i}{\sum r^2} = \frac{Mx_i}{\sum (x^2 + y^2)} \quad (16-9)$$

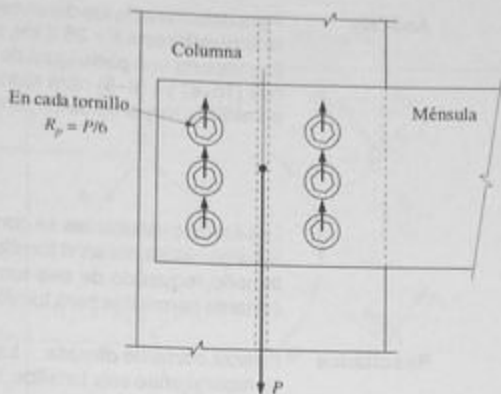
en donde

$y_i$  = distancia vertical al tornillo  $i$  a partir del centroide

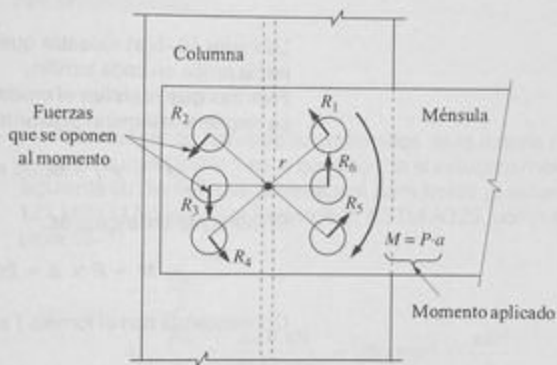
$x_i$  = distancia horizontal al tornillo  $i$  a partir del centroide

$\sum (x^2 + y^2)$  = suma de las distancias horizontales y verticales elevadas al cuadrado de todos los tornillos que integran el arreglo

Por último, todas las fuerzas horizontales y todas las fuerzas verticales se suman para cualquier tornillo particular. En seguida se determina la resultante de las fuerzas horizontales y verticales.



(a) Fuerzas que se oponen a  $P$ , la fuerza cortante



(b) Fuerzas que se oponen al momento

FIGURA 16-5 Cargas en tornillos excéntricamente cargados.

**Ejemplo 16-3** En la figura 16-4 la fuerza neta dirigida hacia abajo  $P$  es de 26.4 kN en cada una de las placas de la ménsula. La distancia  $a$  es de 0.75 m. Determine el tamaño requerido de los tornillos ASTM A325 para fijar la ménsula. Considere que la conexión es de fricción.

**Solución** **Objetivo** Especificar el tamaño de los tornillos en la junta.

**Datos** Carga  $= P = 26.4$  kN dirigida hacia abajo. Brazo de momento  $= a = 0.75$  m. Arreglo de los tornillos mostrado en la figura 16-5. Tornillos: ASTM A325  
Conexión de fricción.

### Análisis

Para determinar la fuerza en cada tornillo producida por la fuerza cortante vertical directa  $P = 26.4$  kN, se supone que cada uno de los seis tornillos soporta una parte igual de la carga. Por tanto se usarán las ecuaciones (16-8) y (16-9) para calcular las fuerzas que actúan en el tornillo sometido a mayor esfuerzo para resistir la carga del momento, en donde:

$$M = P \times a$$

Las fuerzas resultantes se combinarán vectorialmente para determinar la carga resultante en el tornillo sometido a mayor esfuerzo. Por tanto el tamaño requerido de ese tornillo se calculará basado en el esfuerzo cortante permisible para tornillos ASTM A325.

### Resultados

**Fuerza cortante directa.** La fuerza cortante total dirigida hacia abajo se reparte entre seis tornillos. Por consiguiente la carga en cada tornillo, llamada  $R_p$ , es:

$$R_p = \frac{P}{6} = \frac{26.4 \text{ kN}}{6} = 4.4 \text{ kN}$$

La figura 16-5(a) muestra que ésta es una fuerza de reacción dirigida hacia arriba en cada tornillo.

**Fuerzas que resisten el momento.** En las ecuaciones (16-8) y (16-9), se requiere el término siguiente:

$$\sum (x^2 + y^2) = 6(100 \text{ mm})^2 + 4(75 \text{ mm})^2 = 82\,500 \text{ mm}^2$$

El momento en la junta es:

$$M = P \times a = 26.4 \text{ kN} (0.75 \text{ m}) = 19.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Comenzando con el tornillo 1 arriba a la derecha (véase la figura 16-6):

$$R_{1x} = \frac{My_1}{\sum (x^2 + y^2)} = \frac{19.8 \text{ kN}\cdot\text{m}(75 \text{ mm})}{82\,500 \text{ mm}^2} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}}$$

$$R_{1x} = 18.0 \text{ kN} \quad \leftarrow \quad (\text{actúa hacia la izquierda})$$

$$R_{1y} = \frac{Mx_1}{\sum (x^2 + y^2)} = \frac{(19.8 \text{ kN}\cdot\text{m})(100 \text{ mm})}{82\,500 \text{ mm}^2} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}}$$

$$R_{1y} = 24.0 \text{ kN} \quad \uparrow \quad (\text{actúa hacia arriba})$$

Ahora ya se puede determinar la resultante de estas fuerzas. En la dirección vertical,  $R_p$  y  $R_{1y}$  actúan hacia arriba.

$$R_p + R_{1y} = 4.4 \text{ kN} + 24.0 \text{ kN} = 28.4 \text{ kN}$$

Sólo  $R_{1x}$  actúa en la dirección horizontal. Si la fuerza resultante en el tornillo 1, se denomina  $R_{11}$ :

$$R_{11} = \sqrt{28.4^2 + 18.0^2} = 33.6 \text{ kN}$$

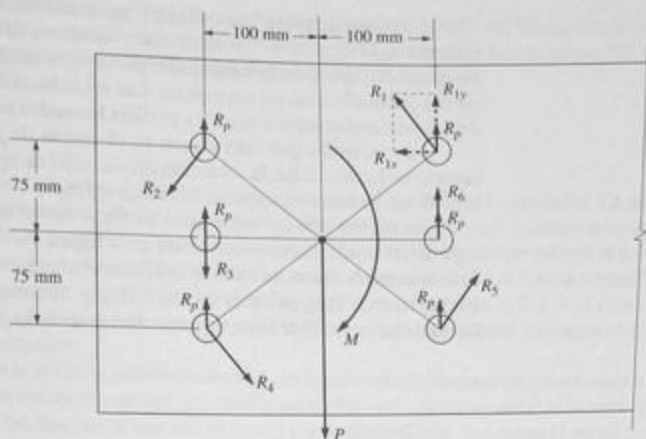


FIGURA 16-6 Fuerzas en cada tornillo.

Investigando los otros cinco tornillos de la misma manera se demuestra que el tornillo 1 es el que soporta el esfuerzo máximo. Por consiguiente su diámetro se determinará para limitar el esfuerzo cortante a 121 MPa (17.5 ksi) para los tornillos ASTM A325, como se indica en la tabla 16-1.

$$\tau = \frac{R_n}{A}$$

$$A = \frac{R_n}{\tau_a} = \frac{33.6 \text{ kN}}{121 \text{ N/mm}^2} = 280 \text{ mm}^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(280) \text{ mm}^2}{\pi}} = 18.9 \text{ mm}$$

El tamaño métrico más aproximado es el de 20 mm. Si se tienen que especificar unidades en pulgadas:

$$D = 18.9 \text{ mm} \times \frac{1 \text{ plg}}{25.4 \text{ mm}} = 0.74 \text{ plg}$$

El tamaño estándar más aproximado es de 3/4 plg (0.750 plg).

**Comentario** Especifique tornillos de  $D = 20 \text{ mm}$  o  $D = 3/4 \text{ plg}$ .

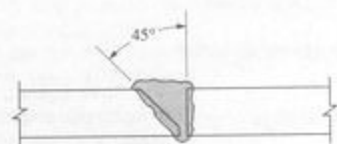
## 16-9 JUNTAS SOLDADAS CON CARGAS CONCÉNTRICAS

La soldadura es un proceso de unir en el que se aplica calor para hacer que dos piezas de metal se unan metalúrgicamente. El calor se puede aplicar con una llama de gas, un arco eléctrico, o con una combinación de calentamiento por resistencia eléctrica y presión.

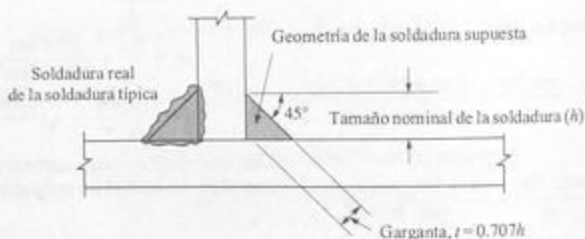
Los tipos de soldadura incluyen las soldaduras de ranura, filete, puntos (como se muestra en la figura 16-7) y otros. Las soldaduras de ranura y filete son las de uso más frecuente en conexiones estructurales puesto que se adaptan con facilidad a los perfiles y placas que conforman las estructuras. Las soldaduras de puntos se usan para unir láminas de acero relativamente delgadas y perfiles formados en frío.

Las variables que intervienen en el diseño de juntas soldadas son la forma y el tamaño de la soldadura, la selección del material de aporte, la longitud de la soldadura y la posición de ésta con respecto a la carga aplicada.

Se supone que las soldaduras de filete tienen una pendiente de  $45^\circ$  entre las dos superficies unidas, como se muestra en la figura 16-7(b). El tamaño de la soldadura se denota como la altura de un lado del filete triangular. Los tamaños típicos varían desde  $1/8$  plg hasta  $1/2$  plg en intervalos de  $1/16$  plg. Se supone que el esfuerzo desarrollado en las soldaduras de filete es un *esfuerzo cortante* sin importar la dirección de aplicación de



(a) Soldadura a tope con ranura achaflanada sencilla



(b) Soldadura de filete



(c) Soldadura por puntos

FIGURA 16-7 Tipos de soldaduras.

la carga. El esfuerzo cortante máximo ocurre en la garganta del filete (véase la figura 16-7), donde el espesor es 0.707 veces el tamaño nominal de la soldadura. Por tanto el esfuerzo cortante en la soldadura producido por la carga  $P$  es:

$$\tau = \frac{P}{Lt} \quad (16-10)$$

en donde  $L$  es la longitud de la soldadura y  $t$  es el espesor de la garganta. La ecuación (16-10) se usa *sólo* para miembros concéntricamente cargados. Esto requiere que la línea de acción de la fuerza en las soldaduras pase por el centroide del arreglo de la soldadura. La excentricidad de la carga produce un momento, además de la fuerza cortante directa, el cual debe ser resistido por la soldadura. Las referencias 1, 3 y 4 al final de este capítulo contienen información pertinente con respecto a junta soldadas excéntricamente cargadas.

En la soldadura de arco eléctrico, utilizada principalmente en conexiones estructurales, normalmente se usa una varilla de aporte para agregar metal a la zona soldada. Cuando las dos partes que se van a unir se calientan al rojo, se agrega el metal de aporte, el cual se combina con el metal base. Al enfriarse, el metal de soldadura resultante normalmente es más fuerte que el metal base original. Por consiguiente, una junta soldada diseñada y hecha de manera adecuada debe fallar en el metal base y no en la soldadura. En la soldadura estructural, a los electrodos se les asigna un código que comienza con una E seguida de dos o tres dígitos, es decir E60, E80 o E100. El número denota la resistencia última a la tensión en ksi del metal de soldar contenido en la varilla. Así pues, una varilla E80 tendría una resistencia a la tensión de 80 000 lb/plg<sup>2</sup>. Se pueden agregar otros dígitos al número de código para denotar propiedades especiales. Las normas ASTM A233 y A316 contienen especificaciones completas. El esfuerzo cortante permisible para soldaduras de filete utilizando electrodos es 0.3 veces la resistencia a la tensión del electrodo según el AISC. La tabla 16-3 enumera algunos electrodos comunes y sus esfuerzos permisibles.

Los productos de aluminio se sueldan con un proceso de arco protegido y gas inerte o un proceso de soldadura por resistencia. Para el proceso de arco protegido y gas inerte, la Aluminum Association especifica aleaciones de aporte para unir aleaciones de metal base particulares, como se indica en la tabla 16-4. Se dan los esfuerzos cortantes permisibles para tales soldaduras. Es de hacerse notar que el calor de la soldadura reduce las propiedades de la mayoría de las aleaciones de aluminio a 1.0 plg de la soldadura, por lo que esto se debe tener en cuenta en el diseño de ensambles soldados.

TABLA 16-3 Propiedades de electrodos de soldar para acero.

Tipo de electrodo	Resistencia a la tensión mínima		Esfuerzo cortante permisible		Metales típicos unidos
	ksi	MPa	ksi	MPa	
E60	60	414	18	124	A36, A500
E70	70	483	21	145	A242, A441
E80	80	552	24	165	A572, Grado 65
E90	90	621	27	186	—
E100	100	690	30	207	—
E110	110	758	33	228	A514



TABLA 16-4 Esfuerzos cortantes permisibles para soldaduras de filete en estructuras de aluminio de edificios.

Metal base	Aleación de aporte							
	1100		4043		5356		5556	
	ksi	MPa	ksi	MPa	ksi	MPa	ksi	MPa
1100	3.2	22	4.8	33	—	—	—	—
3003	3.2	22	5.0	34	—	—	—	—
6061	—	—	5.0	34	7.0	48	8.5	59
6063	—	—	5.0	34	6.5	45	6.5	45

**Ejemplo 16-4**

Se forma una junta traslapada colocando dos soldaduras de filete de 3/8 plg a todo lo ancho de dos placas de acero ASTM A36, como se muestra en la figura 16-8. Se usa el método de arco de metal protegido, utilizando un electrodo E60. Calcule la carga permisible  $P$  que se puede aplicar a la junta.

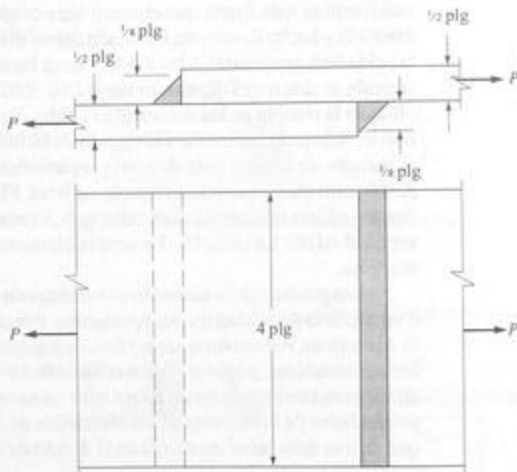


FIGURA 16-8 Junta traslapada soldada.

**Solución**

**Objetivo**

Calcular la carga permisible,  $P$ , en la junta.

**Datos**

Diseño de la junta mostrada en la figura 16-8. Las placas son de acero ASTM A36. En el método de arco de metal protegido se usa el electrodo E60.

**Análisis**

Se supone que la carga se distribuye por igual en todas las partes de la soldadura, de modo que se puede usar la ecuación (16-10) con  $L = 8.0$  plg.

$$\tau = \frac{P}{Lt}$$

Sea  $\tau$  igual al esfuerzo permisible de 18 ksi, dado en la tabla 16-3. El espesor  $t$  es:

$$t = 0.707 \left(\frac{3}{4} plg\right) = 0.265 plg$$

Ahora se puede resolver para  $P$ .

$$P = \tau_0 Lt = (18\,000 \text{ lb/plg}^2)(8.0 \text{ plg})(0.265 \text{ plg}) = 38\,200 \text{ lb}$$

## BIBLIOGRAFÍA

1. American Institute of Steel Construction, *Manual of Steel Construction*, 9th ed., Chicago, IL, 1989.
2. Aluminum Association, *Specifications for Aluminum Structures*, 5th ed., Washington, DC, 1986.
3. Blodgett, O. W., *Design of Weldments*, James F. Lincoln Arc Welding Foundation, Cleveland, OH, 1963.
4. Mott, R. L., *Machine Elements in Mechanical Design*, 2nd ed., Merrill, an imprint of Macmillan Publishing Co., New York, 1992.

## PROBLEMAS

- 16-1.I Determine las cargas permisibles en las juntas mostradas en la figura 16-9. Los sujetadores son remaches de acero ASTM A502, grado 1. Las placas son de acero ASTM A36.
- 16-2.I Determine las cargas permisibles en las juntas mostradas en la figura 16-10. Los sujetadores son remaches de acero ASTM A502, grado 2. Las placas son de acero ASTM A242.
- 16-3.I Determine las cargas permisibles en las juntas mostradas en la figura 16-9. Los sujetadores son tornillos de acero ASTM A325 que forman una junta de fricción. Las placas son de acero ASTM A242.
- 16-4.I Determine las cargas permisibles en las juntas mostradas en la figura 16-10. Los sujetadores son tornillos de acero ASTM A490 que forman una junta de fricción. Las placas son de acero ASTM A514.
- 16-5.I Determine el diámetro requerido de los tornillos utilizados para fijar la viga en voladizo en la columna, como se muestra en la figura 16-11. Use tornillos de acero ASTM A325.
- 16-6.M Diseñe la conexión del canal con la columna para el soporte colgante mostrado en la figura 16-12. Ambos miembros son de acero ASTM A36. Especifique el tipo de sujetador (remache, tornillo), y el arreglo y separación, el número de sujetadores y el material para los sujetadores. Use especificaciones del AISC.
- 16-7.I Para la conexión mostrada en la figura 16-9(a), suponga que, en lugar de los dos remaches, las dos placas se soldaron de un extremo a otro de las placas de 3 plg de ancho con soldaduras de 5/16 plg. Las placas son de acero ASTM A36 y se usa la técnica de soldadura de arco eléctrico con electrodos E60. Determine la carga permisible en la conexión.
- 16-8.I Determine la carga permisible en la junta mostrada en la figura 16-10(c) si se aplicaron soldaduras de 1/4 plg utilizando electrodos E70 a lo largo de los dos extremos de las cubreplacas de acero ASTM A242.
- 16-9.M Diseñe la junta en el extremo superior de las soleras mostradas en la figura 16-1. Si la carga total en la tolva es de 54.4 megagramos (Mg). La viga es un perfil WT12  $\times$  34 de acero ASTM A36 con alma de 10.6 mm de espesor. La altura vertical libre del alma es aproximadamente de 250 mm. Use remaches de acero y especifique el arreglo, el número de remaches, el diámetro de los remaches, el material de los remaches, el material y las dimensiones de las soleras. Especifique las dimensiones, utilizando los tamaños métricos mostrados en el apéndice A-2.
- 16-10.M Diseñe la junta en el extremo inferior de las soleras mostradas en la figura 16-1 si la carga total en la tolva es de 54.4 Mg. Use tornillos de acero y una conexión de apoyo. Especifique el arreglo, el

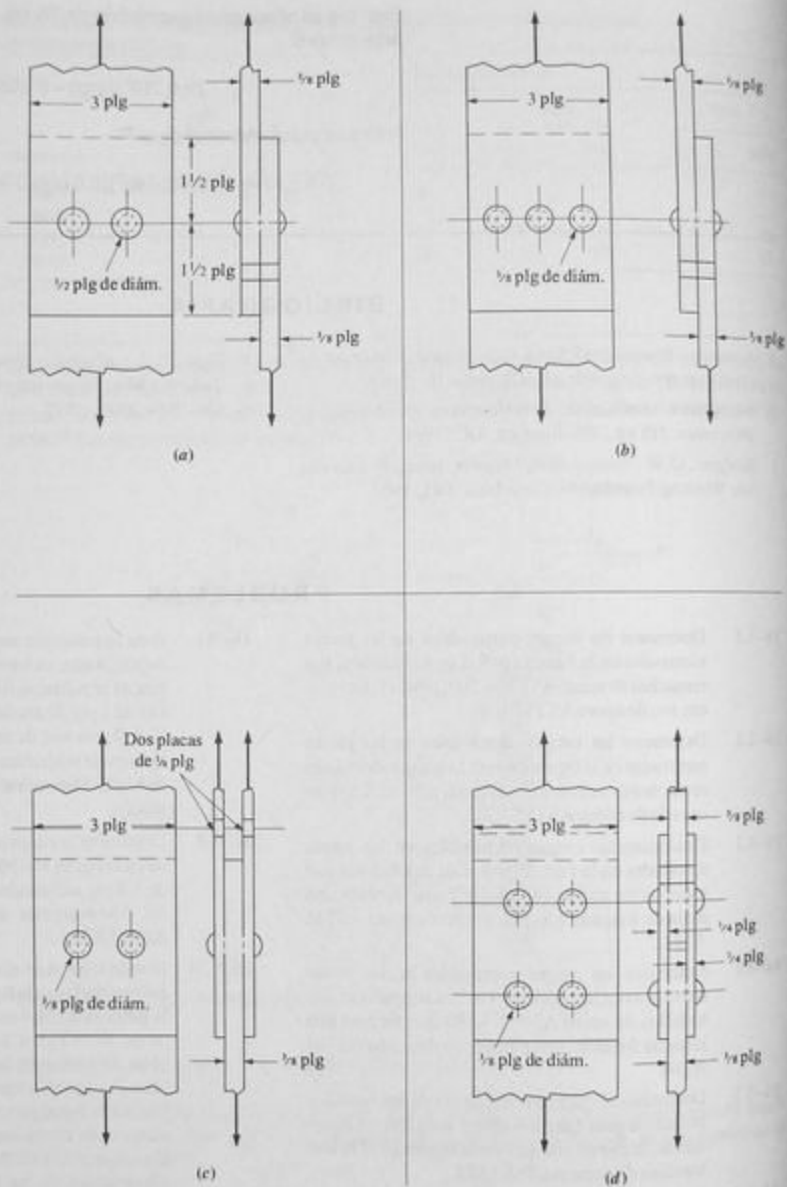


FIGURA 16-9 Juntas de los problemas 16-1 y 16-3.

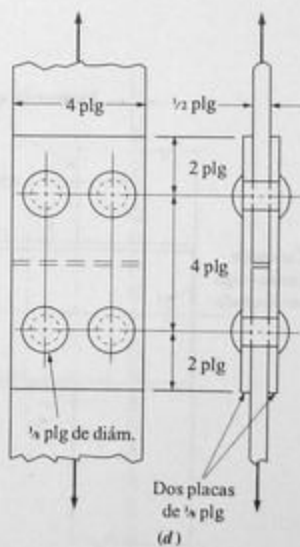
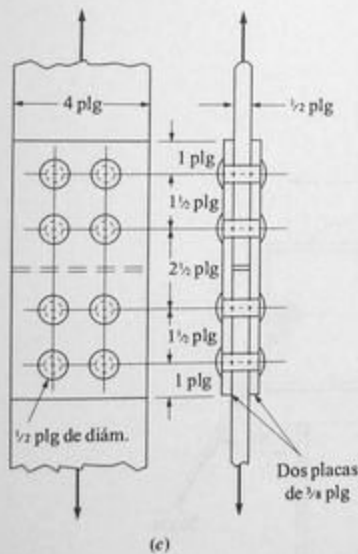
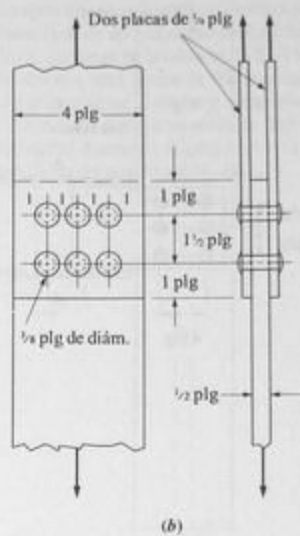
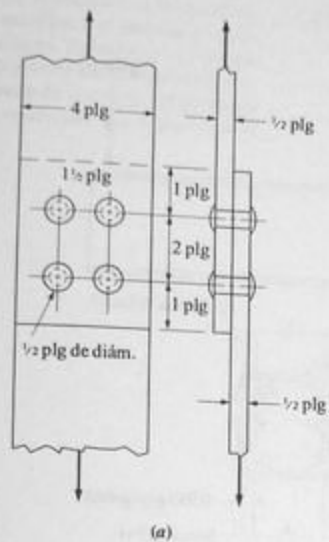


FIGURA 16-10 Juntas de los problemas 16-2 y 16-4.

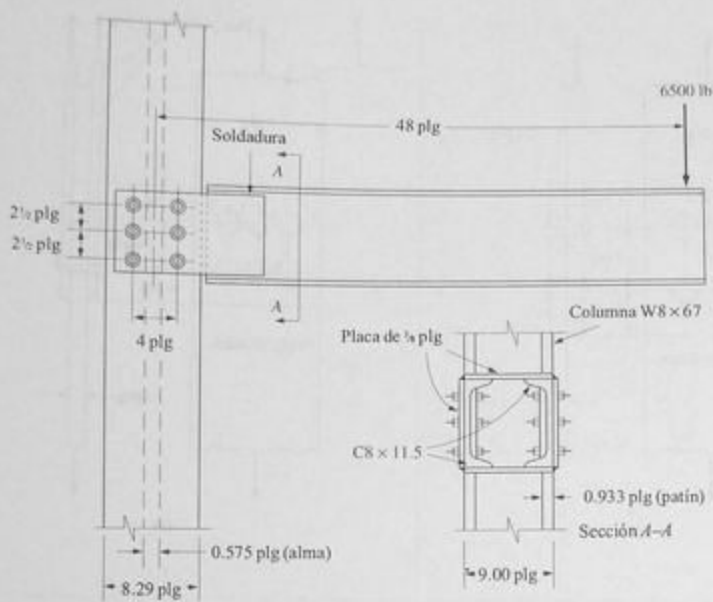


FIGURA 16-11 Conexión del problema 16-5.

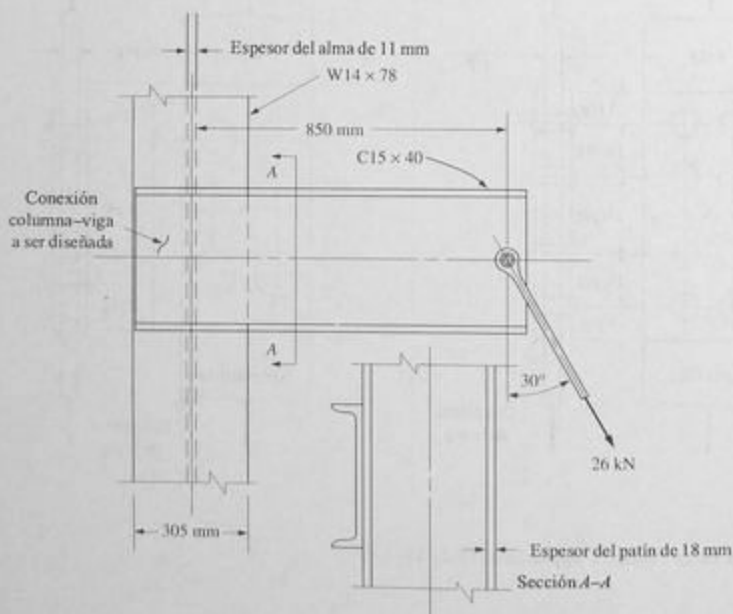


FIGURA 16-12 Conexión del problema 16-6.

masa de las celdas, el diámetro de las celdas, el material de las celdas, y el material y las dimensiones de las aristas. Tal vez desee considerar el diseño de las aristas con los resultados del problema 14-11. El diseño de la arista del problema 14-11 también se ve afectado por el diseño de la parte principal.

14-21.M Diseñe la arista que se ve a continuación en la vista superior como las aristas de apoyo, como se muestra en la figura 14-1. La carga de la esfera es de 14.4 N. El material del que está hecha la esfera es acero A137M A26. Especificque el material y el espesor de la arista y el diseño de la parte principal. Tal vez desee considerar el diseño de la arista con la respuesta desarrollada del problema 14-11.

esbnoqA

número de tornillos, el diámetro de los tornillos, el material de los tornillos, y el material y las dimensiones de las soleras. Tal vez desee coordinar el diseño de las soleras con los resultados del problema 16-9. El diseño de la orejeta del problema 16-11 también se ve afectado por el diseño de la junta atornillada.

os,  
di-  
nar  
o-  
na  
la

**16-11.M** Diseñe la orejeta que se va a soldar en la tolva para conectar las soleras de apoyo, como se muestra en la figura 16-1. La carga en la tolva es de 54.4 Mg. El material del que está hecho la tolva es acero ASTM A36. Especifique el ancho y el espesor de la orejeta y el diseño de la junta soldada. Tal vez desee coordinar el diseño de la orejeta con la conexión atornillada del problema 16-10.

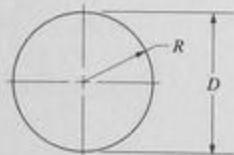
Apéndice



# Apéndice

## A-1 Propiedades de áreas\*

### Círculo



$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \pi R^2 \quad r = \frac{D}{4} = \frac{R}{2}$$

$$I = \frac{\pi D^4}{64} \quad J = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$S = \frac{\pi D^3}{32} \quad Z_p = \frac{\pi D^3}{16}$$

$$\text{Circunferencia} = \pi D = 2\pi R$$

### Círculo hueco (tubo)



$$A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \quad r = \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4}$$

$$I = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \quad J = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

$$S = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \quad Z_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$$

\*Símbolos que aquí se utilizan:

$A$  = área

$I$  = momento de inercia

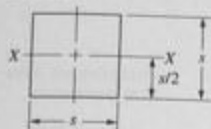
$S$  = módulo de sección

$r$  = radio de giro =  $\sqrt{I/A}$

$J$  = momento polar de inercia

$Z_p$  = módulo de sección polar

Cuadrado



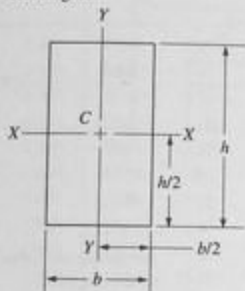
$$A = s^2$$

$$I_x = \frac{s^4}{12}$$

$$S_x = \frac{s^3}{6}$$

$$r_x = \frac{s}{\sqrt{12}}$$

Rectángulo



$$A = bh$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

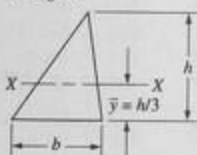
$$S_x = \frac{bh^2}{6}$$

$$S_y = \frac{hb^2}{6}$$

$$r_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

$$r_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

Triángulo



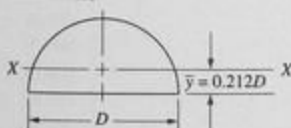
$$A = \frac{bh}{2}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$S_x = \frac{bh^2}{24}$$

$$r_x = \frac{h}{\sqrt{18}}$$

Semicírculo



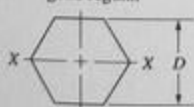
$$A = \frac{\pi D^2}{8}$$

$$I_x = 0.007D^4$$

$$S_x = 0.024D^3$$

$$r_x = 0.132D$$

Hexágono regular



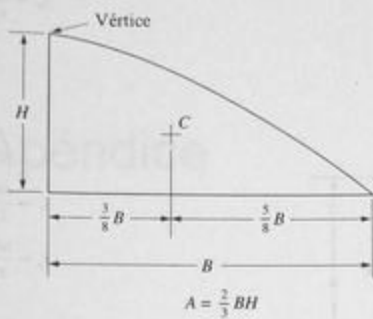
$$A = 0.866D^2$$

$$I_x = 0.06D^4$$

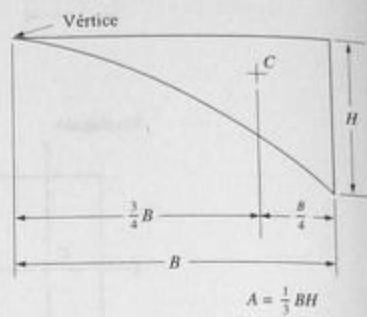
$$S_x = 0.12D^3$$

$$r_x = 0.264D$$

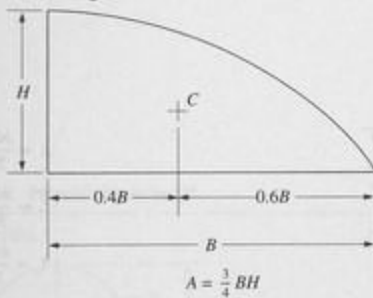
Área bajo una curva de segundo grado



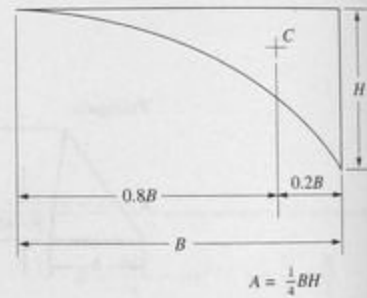
Área sobre una curva de segundo grado



Área bajo una curva de tercer grado



Área sobre una curva de tercer grado



4-2 Tamaños básicos preferidos

Fracciones (plg)			Decimales (plg)			Métricos (mm)					
						Primero		Segundo		Primero	
0.015 625	5	5.000	0.010	2.00	8.50	1		10		100	
0.031 25	5 $\frac{1}{2}$	5.250	0.012	2.20	9.00		1.1		11		110
0.062 5	5 $\frac{1}{4}$	5.500	0.016	2.40	9.50	1.2		12		120	
0.093 75	5 $\frac{3}{8}$	5.750	0.020	2.60	10.00		1.4		14		140
0.125 0	6	6.000	0.025	2.80	10.50	1.6		16		160	
0.156 25	6 $\frac{1}{4}$	6.500	0.032	3.00	11.00		1.8		18		180
0.187 5	7	7.000	0.040	3.20	11.50	2		20		200	
0.250 0	7 $\frac{1}{2}$	7.500	0.05	3.40	12.00		2.2		22		220
0.312 5	8	8.000	0.06	3.60	12.50	2.5		25		250	
0.375 0	8 $\frac{1}{2}$	8.500	0.08	3.80	13.00		2.8		28		280
0.437 5	9	9.000	0.10	4.00	13.50	3		30		300	
0.500 0	9 $\frac{1}{2}$	9.500	0.12	4.20	14.00		3.5		35		350
0.562 5	10	10.000	0.16	4.40	14.50	4		40		400	
0.625 0	10 $\frac{1}{2}$	10.500	0.20	4.60	15.00		4.5		45		450
0.687 5	11	11.000	0.24	4.80	15.50	5		50		500	
0.750 0	11 $\frac{1}{2}$	11.500	0.30	5.00	16.00		5.5		55		550
0.875 0	12	12.000	0.40	5.20	16.50	6		60		600	
1.000	12 $\frac{1}{2}$	12.500	0.50	5.40	17.00		7		70		700
1.250	13	13.000	0.60	5.60	17.50	8		80		800	
1.500	13 $\frac{1}{2}$	13.500	0.80	5.80	18.00		9		90		900
1.750	14	14.000	1.00	6.00	18.50					1000	
2.000	14 $\frac{1}{2}$	14.500	1.20	6.50	19.00						
2.250	15	15.000	1.40	7.00	19.50						
2.500	15 $\frac{1}{2}$	15.500	1.60	7.50	20.00						
2.750	16	16.000	1.80	8.00							
3.000	16 $\frac{1}{2}$	16.500									
3.250	17	17.000									
3.500	17 $\frac{1}{2}$	17.500									
3.750	18	18.000									
4.000	18 $\frac{1}{2}$	18.500									
4.250	19	19.000									
4.500	19 $\frac{1}{2}$	19.500									
4.750	20	20.000									

A-3 Roscas de tornillos

(a) Dimensiones de roscas American Standard, tamaños numerados

Tamaño	Diámetro mayor básico, $D$ (plg)	Roscas gruesas: UNC		Roscas finas: UNF	
		Hilos por pulgada, $n$	Área a esfuerzo de tensión (plg <sup>2</sup> )	Hilos por pulgada, $n$	Área a esfuerzo de tensión (plg <sup>2</sup> )
0	0.0600	—	—	80	0.00180
1	0.0730	64	0.00263	72	0.00278
2	0.0860	56	0.00370	64	0.00394
3	0.0990	48	0.00487	56	0.00523
4	0.1120	40	0.00604	48	0.00661
5	0.1250	40	0.00796	44	0.00830
6	0.1380	32	0.00909	40	0.01015
8	0.1640	32	0.0140	36	0.01474
10	0.1900	24	0.0175	32	0.0200
12	0.2160	24	0.0242	28	0.0258

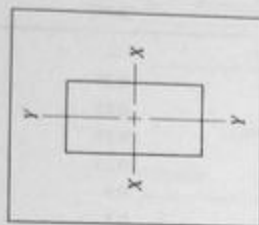
(b) Dimensiones de roscas American Standard, tamaños en fracciones

Tamaño	Diámetro mayor básico, $D$ (plg)	Roscas gruesas: UNC		Roscas finas: UNF	
		Hilos por pulgada, $n$	Área a esfuerzo de tensión (plg <sup>2</sup> )	Hilos por pulgada, $n$	Área a esfuerzo de tensión (plg <sup>2</sup> )
1/16	0.2500	20	0.0318	28	0.0364
	0.3125	18	0.0524	24	0.0580
	0.3750	16	0.0775	24	0.0878
	0.4375	14	0.1063	20	0.1187
	0.5000	13	0.1419	20	0.1599
	0.5625	12	0.182	18	0.203
	0.6250	11	0.226	18	0.256
	0.7500	10	0.334	16	0.373
	0.8750	9	0.462	14	0.509
	1.000	8	0.606	12	0.663
1/8	1.125	7	0.763	12	0.856
	1.250	7	0.969	12	1.073
1/4	1.375	6	1.155	12	1.315
	1.500	6	1.405	12	1.581
3/8	1.750	5	1.90	—	—
	2.000	4½	2.50	—	—

## (c) Dimensiones de roscas métricas

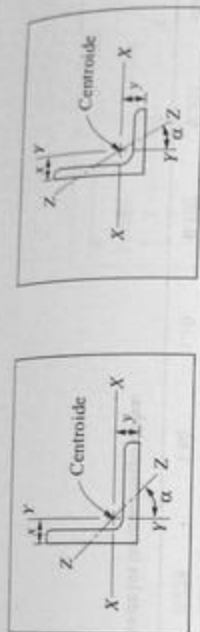
Diámetro mayor básico, $D$ (mm)	Roscas gruesas		Roscas finas	
	Paso (mm)	Área a esfuerzo de tensión (mm <sup>2</sup> )	Paso (mm)	Área a esfuerzo de tensión (mm <sup>2</sup> )
1	0.25	0.460	—	—
1.6	0.35	1.27	0.20	1.57
2	0.4	2.07	0.25	2.45
2.5	0.45	3.39	0.35	3.70
3	0.5	5.03	0.35	5.61
4	0.7	8.78	0.5	9.79
5	0.8	14.2	0.5	16.1
6	1	20.1	0.75	22.0
8	1.25	36.6	1	39.2
10	1.5	58.0	1.25	61.2
12	1.75	84.3	1.25	92.1
16	2	157	1.5	167
20	2.5	245	1.5	272
24	3	353	2	384
30	3.5	561	2	621
36	4	817	3	865
42	4.5	1121	—	—
48	5	1473	—	—

A-4 Propiedades de vigas de madera estándar



Tamaño nominal	Tamaño real		Área de sección		Momento de inercia, $I_x$		Módulo de sección, $S_x$	
	plg	mm	plg <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup> × 10 <sup>-3</sup>	plg <sup>4</sup>	mm <sup>4</sup> × 10 <sup>-6</sup>	plg <sup>3</sup>	mm <sup>3</sup> × 10 <sup>-3</sup>
2 × 4	1.5 × 3.5	38 × 89	5.25	3.39	5.36	2.23	3.06	50.1
2 × 6	1.5 × 5.5	38 × 140	8.25	5.32	20.8	8.66	7.56	124
2 × 8	1.5 × 7.25	38 × 184	10.87	7.01	47.6	19.8	13.14	215
2 × 10	1.5 × 9.25	38 × 235	13.87	8.95	98.9	41.2	21.4	351
2 × 12	1.5 × 11.25	38 × 286	16.87	10.88	178	74.1	31.6	518
4 × 4	3.5 × 3.5	89 × 89	12.25	7.90	12.51	5.21	7.15	117
4 × 6	3.5 × 5.5	89 × 140	19.25	12.42	48.5	20.2	17.65	289
4 × 8	3.5 × 7.25	89 × 184	25.4	16.39	111.1	46.2	30.7	503
4 × 10	3.5 × 9.25	89 × 235	32.4	20.90	231	96.1	49.9	818
4 × 12	3.5 × 11.25	89 × 286	39.4	25.42	415	172	73.9	1211
6 × 6	5.5 × 5.5	140 × 140	30.3	19.55	76.3	31.8	27.7	454
6 × 8	5.5 × 7.5	140 × 191	41.3	26.65	193	80.3	51.6	846
6 × 10	5.5 × 9.5	140 × 241	52.3	33.74	393	164	82.7	1355
6 × 12	5.5 × 11.5	140 × 292	63.3	40.84	697	290	121	1983
8 × 8	7.5 × 7.5	191 × 191	56.3	36.32	264	110	70.3	1152
8 × 10	7.5 × 9.5	191 × 241	71.3	46.00	536	223	113	1852
8 × 12	7.5 × 11.5	191 × 292	86.3	55.68	951	396	165	2704
10 × 10	9.5 × 9.5	241 × 241	90.3	58.26	679	283	143	2343
10 × 12	9.5 × 11.5	241 × 292	109.3	70.52	1204	501	209	3425
12 × 12	11.5 × 11.5	292 × 292	132.3	85.35	1458	607	253	4146

A-5 Propiedades de ángulos de acero  
Patas iguales y patas desiguales  
Perfiles L\*



Designación	Área ( $\text{plg}^2$ )	Peso por pie (lb)	Eje X-X		Eje Y-Y		Eje Z-Z			
			$I$ ( $\text{plg}^4$ )	$S$ ( $\text{plg}^3$ )	$y$ (plg)	$I$ ( $\text{plg}^4$ )	$S$ ( $\text{plg}^3$ )	$x$ (plg)	$r$ (plg)	$\alpha$ (grados)
L8 x 8 x 1	15.0	51.0	89.0	15.8	2.37	89.0	15.8	2.37	1.56	45.0
L8 x 8 x 1/2	7.75	26.4	48.6	8.36	2.19	48.6	8.36	2.19	1.59	45.0
L8 x 4 x 1	11.0	37.4	69.6	14.1	3.05	11.6	3.94	1.05	0.846	13.9
L8 x 4 x 1/2	5.75	19.6	38.5	7.49	2.86	6.74	2.15	0.859	0.865	14.9
L6 x 6 x 1/2	8.44	28.7	28.2	6.66	1.78	28.2	6.66	1.78	1.17	45.0
L6 x 6 x 1	4.36	14.9	15.4	3.53	1.64	15.4	3.53	1.64	1.19	45.0
L6 x 4 x 1	6.94	23.6	24.5	6.25	2.08	8.68	2.97	1.08	0.860	23.2
L6 x 4 x 1/2	3.61	12.3	13.5	3.32	1.94	4.90	1.60	0.941	0.877	24.0
L4 x 4 x 1	3.75	12.8	5.56	1.97	1.18	5.56	1.97	1.18	0.782	45.0
L4 x 4 x 1/2	1.94	6.6	3.04	1.05	1.09	3.04	1.05	1.09	0.795	45.0
L4 x 3 x 1	3.25	11.1	5.05	1.89	1.33	2.42	1.12	0.827	0.639	28.5
L4 x 3 x 1/2	1.69	5.8	2.77	1.00	1.24	1.36	0.599	0.896	0.651	29.2
L3 x 3 x 1	2.75	9.4	2.22	1.07	0.932	2.22	1.07	0.932	0.584	45.0
L3 x 3 x 1/2	1.44	4.9	1.24	0.577	0.842	1.24	0.577	0.842	0.592	45.0
L2 x 2 x 1	1.36	4.7	0.479	0.351	0.636	0.479	0.351	0.636	0.389	45.0
L2 x 2 x 1/2	0.938	3.19	0.348	0.247	0.592	0.348	0.247	0.592	0.391	45.0
L2 x 2 x 1/4	0.484	1.65	0.190	0.131	0.546	0.190	0.131	0.546	0.398	45.0

\*Datos tomados de varias fuentes. Los tamaños relacionados son una pequeña muestra de los tamaños disponibles.

Ejemplo de designación: L4 x 3 x 1/2

4 = longitud de la pata más larga (plg), 3 = longitud de la pata más corta (plg), 1/2 = espesor de las patas (plg)

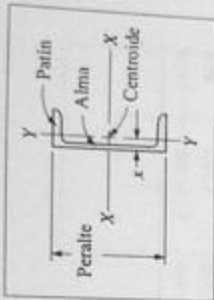
Z-Z es el eje del momento de inercia mínimo ( $I$ ) y el radio de giro ( $r$ )

$I$  = momento de inercia,  $S$  = módulo de sección,  $r$  = radio de giro



A-6 Propiedades de canales de acero American Standard  
Perfiles C\*

Designación	Patin				Eje X-X			Eje Y-Y		
	Área ( $\text{plg}^2$ )	Peralte (plg)	Espesor del alma (plg)	Ancho (plg)	Espesor promedio (plg)	$I$ ( $\text{plg}^4$ )	$S$ ( $\text{plg}^3$ )	$I$ ( $\text{plg}^4$ )	$S$ ( $\text{plg}^3$ )	$x$ (plg)
C15 x 50	14.7	15.00	0.716	3.716	0.650	404	53.8	11.0	3.78	0.798
C15 x 40	11.8	15.00	0.520	3.520	0.650	349	46.5	9.23	3.37	0.777
C12 x 30	8.82	12.00	0.510	3.170	0.501	162	27.0	5.14	2.06	0.674
C12 x 25	7.35	12.00	0.387	3.047	0.501	144	24.1	4.47	1.88	0.674
C10 x 30	8.82	10.00	0.673	3.033	0.436	103	20.7	3.94	1.65	0.649
C10 x 20	5.88	10.00	0.379	2.739	0.436	78.9	15.8	2.81	1.32	0.606
C9 x 20	5.88	9.00	0.448	2.648	0.413	60.9	13.5	2.42	1.17	0.583
C9 x 15	4.41	9.00	0.285	2.485	0.413	51.0	11.3	1.93	1.01	0.586
C8 x 18.75	5.51	8.00	0.487	2.527	0.390	44.0	11.0	1.98	1.01	0.565
C8 x 11.5	3.38	8.00	0.220	2.260	0.390	32.6	8.14	1.32	0.781	0.571
C6 x 13	3.83	6.00	0.437	2.157	0.343	17.4	5.80	1.05	0.642	0.514
C6 x 8.2	2.40	6.00	0.200	1.920	0.343	13.1	4.38	0.693	0.492	0.511
C5 x 9	2.64	5.00	0.325	1.885	0.320	8.90	3.56	0.632	0.450	0.478
C5 x 6.7	1.97	5.00	0.190	1.750	0.320	7.49	3.00	0.479	0.378	0.484
C4 x 7.25	2.13	4.00	0.321	1.721	0.296	4.59	2.29	0.433	0.343	0.459
C4 x 5.4	1.59	4.00	0.184	1.584	0.296	3.85	1.93	0.319	0.283	0.457
C3 x 6	1.76	3.00	0.356	1.596	0.273	2.07	1.38	0.305	0.268	0.455
C3 x 4.1	1.21	3.00	0.170	1.410	0.273	1.66	1.10	0.197	0.202	0.436



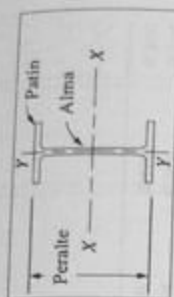
\*Datos tomados de varias fuentes. Los tamaños relacionados son una pequeña muestra de los tamaños disponibles.

Ejemplo de designación: C15 x 50

S = peralte (plg), 50 = peso por unidad de longitud (lb/plc)

I = momento de inercia, S = módulo de sección

A-7 Propiedades de perfiles de patin ancho  
Perfiles W\*



Designación	Área (plg <sup>2</sup> )	Peralte (plg)	Espesor del alma (plg)	Patin		Eje X-X'		Eje Y-Y'	
				Ancho (plg)	Espesor (plg)	$I$ (plg <sup>4</sup> )	$S$ (plg <sup>3</sup> )	$I$ (plg <sup>4</sup> )	$S$ (plg <sup>3</sup> )
W24 x 76	22.4	23.92	0.440	8.990	0.680	2100	176	82.5	18.4
W24 x 68	20.1	23.73	0.415	8.965	0.585	1830	154	70.4	15.7
W21 x 73	21.5	21.24	0.455	8.295	0.740	1600	151	70.6	17.0
W21 x 57	16.7	21.06	0.405	6.555	0.650	1170	111	30.6	9.35
W18 x 55	16.2	18.11	0.390	7.530	0.630	890	98.3	44.9	11.9
W18 x 40	11.8	17.90	0.315	6.015	0.525	612	68.4	19.1	6.35
W14 x 43	12.6	13.66	0.305	7.995	0.530	428	62.7	45.2	11.3
W14 x 26	7.69	13.91	0.255	5.025	0.420	245	35.3	8.91	3.54
W12 x 30	8.79	12.34	0.260	6.520	0.440	238	38.6	20.3	6.24
W12 x 16	4.71	11.99	0.220	3.990	0.265	103	17.1	2.82	1.41
W10 x 15	4.41	9.99	0.230	4.000	0.270	69.8	13.8	2.89	1.45
W10 x 12	3.54	9.87	0.190	3.960	0.210	53.8	10.9	2.18	1.10
W8 x 15	4.44	8.11	0.245	4.015	0.315	48.0	11.8	3.41	1.70
W8 x 10	2.96	7.89	0.170	3.940	0.205	30.8	7.81	2.09	1.06
W6 x 15	4.43	5.99	0.230	5.990	0.260	29.1	9.72	9.32	3.11
W6 x 12	3.55	6.03	0.230	4.000	0.280	22.1	7.31	2.99	1.50
W5 x 19	5.54	5.15	0.270	5.030	0.430	26.2	10.2	9.13	3.63
W5 x 16	4.68	5.01	0.240	5.000	0.360	21.3	8.51	7.51	3.00
W4 x 13	3.83	4.16	0.280	4.060	0.345	11.3	5.46	3.86	1.90

\*Datos tomados de varias fuentes. Los tamaños relacionados son una pequeña muestra de los tamaños disponibles.

Ejemplo de designación: W14 x 43

14 = peralte nominal (plg), 43 = peso por unidad de longitud (lb/ pie)

$I$  = momento de inercia,  $S$  = módulo de sección

A-8 Propiedades de vigas de acero American Standard  
Perfiles S\*

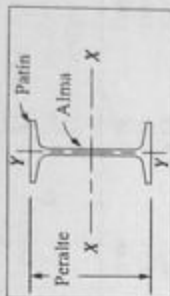
Designación	Peralte			Patin		Eje X-X			Eje Y-Y		
	Área ( $\text{plg}^2$ )	Peralte ( $\text{plg}$ )	Espesor del alma ( $\text{plg}$ )	Ancho ( $\text{plg}$ )	Espesor promedio ( $\text{plg}$ )	$I$ ( $\text{plg}^4$ )	$S$ ( $\text{plg}^3$ )	$r$ ( $\text{plg}$ )	$I$ ( $\text{plg}^4$ )	$S$ ( $\text{plg}^3$ )	$r$ ( $\text{plg}$ )
S24 x 90	26.5	24.00	0.625	7.125	0.870	2250	187	44.9	2250	187	44.9
S20 x 96	28.2	20.30	0.800	7.200	0.920	1670	165	50.2	1670	165	50.2
S20 x 75	22.0	20.00	0.635	6.385	0.795	1280	128	29.8	1280	128	29.8
S20 x 66	19.4	20.00	0.505	6.255	0.795	1190	119	27.7	1190	119	27.7
S18 x 70	20.6	18.00	0.711	6.251	0.691	926	103	24.1	926	103	24.1
S15 x 50	14.7	15.00	0.550	5.640	0.622	486	64.8	15.7	486	64.8	15.7
S12 x 50	14.7	12.00	0.687	5.477	0.659	305	50.8	15.7	305	50.8	15.7
S12 x 35	10.3	12.00	0.428	5.078	0.544	229	38.2	9.87	229	38.2	9.87
S10 x 35	10.3	10.00	0.594	4.944	0.491	147	29.4	8.36	147	29.4	8.36
S10 x 25.4	7.46	10.00	0.311	4.661	0.491	124	24.7	6.79	124	24.7	6.79
S8 x 23	6.77	8.00	0.441	4.171	0.426	64.9	16.2	4.31	64.9	16.2	4.31
S8 x 18.4	5.41	8.00	0.271	4.001	0.426	57.6	14.4	3.73	57.6	14.4	3.73
S7 x 20	5.88	7.00	0.450	3.860	0.392	42.4	12.1	3.17	42.4	12.1	3.17
S6 x 12.5	3.67	6.00	0.232	3.332	0.359	22.1	7.37	1.82	22.1	7.37	1.82
S5 x 10	2.94	5.00	0.214	3.004	0.326	12.3	4.92	1.22	12.3	4.92	1.22
S4 x 7.7	2.26	4.00	0.193	2.663	0.293	6.08	3.04	0.764	6.08	3.04	0.764
S3 x 5.7	1.67	3.00	0.170	2.330	0.260	2.52	1.68	0.455	2.52	1.68	0.455

\*Datos tomados de varias fuentes. Los tamaños relacionados son una pequeña muestra de los tamaños disponibles.

Ejemplo de designación: S10 x 35

10 = peralte nominal (plg), 35 = peso por unidad de longitud (lb/pie)

$I$  = momento de inercia,  $S$  = módulo de sección



**A-9** Propiedades de tubería estructural de acero Cuadrada y rectangular\*

Tamaño	Área ( $\text{plg}^2$ )	Peso por pie (lb)	Eje X-X			Eje Y-Y		
			$I$ ( $\text{plg}^4$ )	$S$ ( $\text{plg}^3$ )	$r$ ( $\text{plg}$ )	$I$ ( $\text{plg}^4$ )	$S$ ( $\text{plg}^3$ )	$r$ ( $\text{plg}$ )
$8 \times 8 \times \frac{1}{2}$	14.4	48.9	131	32.9	3.03	131	32.9	3.03
$8 \times 8 \times \frac{3}{4}$	7.59	25.8	75.1	18.8	3.15	75.1	18.8	3.15
$8 \times 4 \times \frac{1}{2}$	10.4	35.2	75.1	18.8	2.69	24.6	12.3	1.54
$8 \times 4 \times \frac{3}{4}$	5.59	19.0	45.1	11.3	2.84	15.3	7.63	1.65
$8 \times 2 \times \frac{1}{2}$	4.59	15.6	30.1	7.52	2.56	3.08	3.08	0.819
$6 \times 6 \times \frac{1}{2}$	10.4	35.2	50.5	16.8	2.21	50.5	16.8	2.21
$6 \times 6 \times \frac{3}{4}$	5.59	19.0	30.3	10.1	2.33	30.3	10.1	2.33
$6 \times 4 \times \frac{1}{2}$	4.59	15.6	22.1	7.36	2.19	11.7	5.87	1.60
$6 \times 2 \times \frac{1}{2}$	3.59	12.2	13.8	4.60	1.96	2.31	2.31	0.802
$4 \times 4 \times \frac{1}{2}$	6.36	21.6	12.3	6.13	1.39	12.3	6.13	1.39
$4 \times 4 \times \frac{3}{4}$	3.59	12.2	8.22	4.11	1.51	8.22	4.11	1.51
$4 \times 2 \times \frac{1}{2}$	2.59	8.81	4.69	2.35	1.35	1.54	1.54	0.770
$3 \times 3 \times \frac{1}{2}$	2.59	8.81	3.16	2.10	1.10	3.16	2.10	1.10
$3 \times 2 \times \frac{1}{2}$	2.09	7.11	2.21	1.47	1.03	1.15	1.15	0.742
$2 \times 2 \times \frac{1}{2}$	1.59	5.41	0.766	0.766	0.694	0.766	0.766	0.694

\*Datos tomados de varias fuentes. Los tamaños relacionados son una pequeña muestra de los tamaños disponibles.

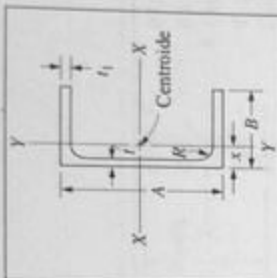
Ejemplo de tamaño:  $6 \times 4 \times \frac{1}{2}$

6 = peralte vertical (plg), 4 = ancho (plg),  $\frac{1}{2}$  = espesor de pared (plg)

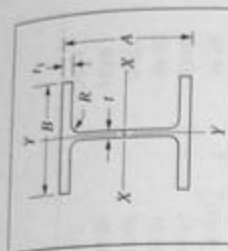
$I$  = momento de inercia,  $S$  = módulo de sección,  $r$  = radio de giro

A-10 Canales estándar de la Aluminum Association: dimensiones, áreas, pesos y propiedades de sección

Peralte, A (plg)	Ancho, B (plg)	Área (plg <sup>2</sup> )	Peso (lb/ptc)	Espesor de patín, t <sub>1</sub> (plg)	Espesor del alma, t (plg)	Radio de redondeo, R (plg)	Propiedades de sección						
							Eje X-X			Eje Y-Y			
Tamaño							I (plg <sup>4</sup> )	S (plg <sup>3</sup> )	r (plg)	I (plg <sup>4</sup> )	S (plg <sup>3</sup> )	r (plg)	x (plg)
2.00	1.00	0.491	0.577	0.13	0.13	0.10	0.288	0.288	0.766	0.045	0.064	0.303	0.298
2.00	1.25	0.911	1.071	0.26	0.17	0.15	0.546	0.546	0.774	0.139	0.178	0.391	0.471
3.00	1.50	0.965	1.135	0.20	0.13	0.25	1.41	0.94	1.21	0.22	0.22	0.47	0.49
3.00	1.75	1.358	1.597	0.26	0.17	0.25	1.97	1.31	1.20	0.42	0.37	0.55	0.62
4.00	2.00	1.478	1.738	0.23	0.15	0.25	3.91	1.95	1.63	0.60	0.45	0.64	0.65
4.00	2.25	1.982	2.331	0.29	0.19	0.25	5.21	2.60	1.62	1.02	0.69	0.72	0.78
5.00	2.25	1.881	2.212	0.26	0.15	0.30	7.88	3.15	2.05	0.98	0.64	0.72	0.73
5.00	2.75	2.627	3.089	0.32	0.19	0.30	11.14	4.45	2.06	2.05	1.14	0.88	0.95
6.00	2.50	2.410	2.834	0.29	0.17	0.30	14.35	4.78	2.44	1.53	0.90	0.80	0.79
6.00	3.25	3.427	4.030	0.35	0.21	0.30	21.04	7.01	2.48	3.76	1.76	1.05	1.12
7.00	2.75	2.725	3.205	0.29	0.17	0.30	22.09	6.31	2.85	2.10	1.10	0.88	0.84
7.00	3.50	4.009	4.715	0.38	0.21	0.30	33.79	9.65	2.90	5.13	2.23	1.13	1.20
8.00	3.00	3.526	4.147	0.35	0.19	0.30	37.40	9.35	3.26	3.25	1.57	0.96	0.93
8.00	3.75	4.923	5.789	0.41	0.25	0.35	52.69	13.17	3.27	7.13	2.82	1.20	1.22
9.00	3.25	4.237	4.983	0.35	0.23	0.35	54.41	12.09	3.58	4.40	1.89	1.02	0.93
9.00	4.00	5.927	6.970	0.44	0.29	0.35	78.31	17.40	3.63	9.61	3.49	1.27	1.25
10.00	3.50	5.218	6.136	0.41	0.25	0.35	83.22	16.64	3.99	6.33	2.56	1.10	1.02
10.00	4.25	7.109	8.360	0.50	0.31	0.40	116.15	23.23	4.04	13.02	4.47	1.35	1.34
12.00	4.00	7.036	8.274	0.47	0.29	0.40	159.76	26.63	4.77	11.03	3.86	1.25	1.14
12.00	5.00	10.053	11.822	0.62	0.35	0.45	239.69	39.95	4.88	25.74	7.60	1.60	1.61



Fuente: Aluminum Association, *Aluminum Standards and Data*, 11a. ed., Washington, DC, © 1993, pág. 187.  
Véanse las notas al pie de la tabla A-11.



A-11 Vigas I estándar de la Aluminum Association: dimensiones, áreas, pesos y propiedades de sección

Peralte, A (pulg)	Tamaño Ancho, B (pulg)	Área* (pulg <sup>2</sup> )	Peso † (lb/pie)	Espesor de patin, t <sub>1</sub> (pulg)	Espesor del alma, t <sub>2</sub> (pulg)	Radio de redondeo, R (pulg)	Propiedades de sección ‡					
							Eje X-X			Eje Y-Y		
							I (pulg <sup>4</sup> )	S (pulg <sup>3</sup> )	r (pulg)	I (pulg <sup>4</sup> )	S (pulg <sup>3</sup> )	r (pulg)
3.00	2.50	1.392	1.637	0.20	0.13	0.25	2.24	1.49	1.27	0.52	0.42	0.61
3.00	2.50	1.726	2.030	0.26	0.15	0.25	2.71	1.81	1.25	0.68	0.54	0.63
4.00	3.00	1.965	2.311	0.23	0.15	0.25	5.62	2.81	1.69	1.04	0.69	0.73
4.00	3.00	2.375	2.793	0.29	0.17	0.25	6.71	3.36	1.68	1.31	0.87	0.74
5.00	3.50	3.146	3.700	0.32	0.19	0.30	13.94	5.58	2.11	2.29	1.31	0.85
6.00	4.00	3.427	4.030	0.29	0.19	0.30	21.99	7.33	2.53	3.10	1.55	0.95
6.00	4.00	3.990	4.692	0.35	0.21	0.30	25.50	8.50	2.53	3.74	1.87	0.97
7.00	4.50	4.932	5.800	0.38	0.23	0.30	42.89	12.25	2.95	5.78	2.57	1.08
8.00	5.00	5.256	6.181	0.35	0.23	0.30	59.69	14.92	3.37	7.30	2.92	1.18
8.00	5.00	5.972	7.023	0.41	0.25	0.30	67.78	16.94	3.37	8.55	3.42	1.20
9.00	5.50	7.110	8.361	0.44	0.27	0.30	102.02	22.67	3.79	12.22	4.44	1.31
10.00	6.00	7.352	8.646	0.41	0.25	0.40	132.09	26.42	4.24	14.78	4.93	1.42
10.00	6.00	8.747	10.286	0.50	0.29	0.40	155.79	31.16	4.22	18.03	6.01	1.44
12.00	7.00	9.925	11.672	0.47	0.29	0.40	255.57	42.60	5.07	26.90	7.69	1.65
12.00	7.00	12.153	14.292	0.62	0.31	0.40	317.33	52.89	5.11	35.48	10.14	1.71

Fuente: Aluminum Association, *Aluminum Standards and Data*, 11a. ed., Washington, DC, © 1993, pág. 187.

\*Las áreas relacionadas están basadas en dimensiones nominales.

† Los pesos por pie están basados en dimensiones nominales y en una densidad de 0.098 libras por pulgada cúbica, la cual es la densidad de la aleación 6061.

‡ I = momento de inercia, S = módulo de sección, r = radio de giro.

A-12 Propiedades de tubo de acero forjado sin costura y soldado cédula 40 estándar nacional americano

Nominal	Diámetro (plg)		Espesor de pared (plg)	Área de sección transversal del metal (plg <sup>2</sup> )	Momento de inercia, $I$ (plg <sup>4</sup> )	Radio de giro de giro (plg)	Propiedades de secciones		
	Interno real	Externo real					Módulo de sección, $S$ (plg <sup>3</sup> )	Módulo de sección polar, $Z_p$ (plg <sup>3</sup> )	
1	0.269	0.405	0.068	0.072	0.00106	0.122	0.00525	0.01050	
1 1/8	0.364	0.540	0.088	0.125	0.00331	0.163	0.01227	0.02454	
1 1/4	0.493	0.675	0.091	0.167	0.00729	0.209	0.02160	0.04320	
1 1/2	0.622	0.840	0.109	0.250	0.01709	0.261	0.04070	0.08140	
2	0.824	1.050	0.113	0.333	0.03704	0.334	0.07055	0.1411	
2 1/2	1.049	1.315	0.133	0.494	0.08734	0.421	0.1328	0.2656	
3	1.380	1.660	0.140	0.669	0.1947	0.539	0.2346	0.4692	
3 1/2	1.610	1.900	0.145	0.799	0.3099	0.623	0.3262	0.6524	
4	2.067	2.375	0.154	1.075	0.6658	0.787	0.5607	1.121	
4 1/2	2.469	2.875	0.203	1.704	1.530	0.947	1.064	2.128	
5	3.068	3.500	0.216	2.228	3.017	1.163	1.724	3.448	
5 1/2	3.548	4.000	0.226	2.680	4.788	1.337	2.394	4.788	
6	4.026	4.500	0.237	3.174	7.233	1.510	3.215	6.430	
6 1/2	5.047	5.563	0.258	4.300	15.16	1.878	5.451	10.90	
7	6.065	6.625	0.280	5.581	28.14	2.245	8.496	16.99	
8	7.981	8.625	0.322	8.399	72.49	2.938	16.81	33.62	
10	10.020	10.750	0.365	11.91	160.7	3.674	29.91	59.82	
12	11.938	12.750	0.406	15.74	300.2	4.364	47.09	94.18	
16	15.000	16.000	0.500	24.35	732.0	5.484	91.50	183.0	
18	16.876	18.000	0.562	30.79	1172	6.168	130.2	260.4	

A-13 Propiedades representativas de aceros aleados y al carbón\*

Material AISI núm.	Condición†	Resistencia última, $s_u$		Resistencia a la cedencia, $s_y$		Porcentaje de alargamiento
		ksi	MPa	ksi	MPa	
1020	Recocido	57	393	43	296	36
1020	Laminado en caliente	65	448	48	331	36
1020	Estirado en frío	75	517	64	441	20
1040	Recocido	75	517	51	352	30
1040	Laminado en caliente	90	621	60	414	25
1040	Estirado en frío	97	669	82	565	16
1040	WQT 700	127	876	93	641	19
1040	WQT 900	118	814	90	621	22
1040	WQT 1100	107	738	80	552	24
1040	WQT 1300	87	600	63	434	32
1080	Recocido	89	614	54	372	25
1080	OQT 700	189	1303	141	972	12
1080	OQT 900	179	1234	129	889	13
1080	OQT 1100	145	1000	103	710	17
1080	OQT 1300	117	807	70	483	23
1141	Recocido	87	600	51	352	26
1141	Estirado en frío	112	772	95	655	14
1141	OQT 700	193	1331	172	1186	9
1141	OQT 900	146	1007	129	889	15
1141	OQT 1100	116	800	97	669	20
1141	OQT 1300	94	648	68	469	28
4140	Recocido	95	655	60	414	26
4140	OQT 700	231	1593	212	1462	12
4140	OQT 900	187	1289	173	1193	15
4140	OQT 1100	147	1014	131	903	18
4140	OQT 1300	118	814	101	696	23
5160	Recocido	105	724	40	276	17
5160	OQT 700	263	1813	238	1641	9
5160	OQT 900	196	1351	179	1234	12
5160	OQT 1100	149	1027	132	910	17
5160	OQT 1300	115	793	103	710	23

\*Otras propiedades aproximadamente iguales para todos los aceros aleados y al carbón:

Módulo de elasticidad a tensión = 30 000 000 lb/plg<sup>2</sup> (207 GPa)

Módulo de elasticidad a cortante = 11 500 000 lb/plg<sup>2</sup> (80 GPa)

Densidad = 0.283 lb<sub>m</sub>/plg<sup>3</sup> (7680 kg/m<sup>3</sup>)

†OQT significa templado y enfriado en aceite (oil-quenched and tempered). WQT significa templado y enfriado en agua (water-quenched and tempered.)



A-14 Propiedades representativas de aceros inoxidables y metales no ferrosos

Material y condición	Resistencia última, $s_u$		Resistencia a la cedencia, $s_y$		Porcentaje de alargamiento	Densidad		Módulo de elasticidad, $E$		
	ksi	MPa	ksi	MPa		lb/plg <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>	lb/plg <sup>2</sup> × 10 <sup>-6</sup>	GPa	
<b>Aceros inoxidables</b>										
AISI 301 recocido	110	758	40	276	60	0.290	8030	28	193	
AISI 301 duro	185	1280	140	965	8	0.290	8030	28	193	
AISI 430 recocido	75	517	40	276	30	0.280	7750	29	200	
AISI 430 duro	90	621	80	552	15	0.280	7750	29	200	
AISI 501 recocido	70	483	30	207	28	0.280	7750	29	200	
AISI 501 OQT 1000	175	1210	135	931	15	0.280	7750	29	200	
17-4PH H900	210	1450	185	1280	14	0.281	7780	28.5	197	
PH 13-8 Mo H1000	215	1480	205	1410	13	0.279	7720	29.4	203	
<b>Cobre y sus aleaciones</b>										
Cobre C14500	suave	32	221	10	69	50	0.323	8940	17	117
	duro	48	331	44	303	20				
Cobre C17000	suave	175	1210	150	1030	5	0.298	8250	19	131
	duro	215	1482	200	1379	2				
Bronce C54400	suave	68	469	57	393	20	0.318	8800	17	117
	duro	75	517	63	434	15				
Latón C36000	suave	40	338	18	124	53	0.308	8530	16	110
	duro	68	469	45	310	18				
<b>Magnesio-fundido</b>										
ASTM AZ 63A-T6		40	276	19	131	5	0.066	1830	6.5	45
<b>Zinc-fundido ZA 12</b>										
		58	400	47	324	5	0.218	6030	12	83
<b>Aleación de titanio</b>										
Ti-6Al-4V envejecido		170	1170	155	1070	8	0.160	4430	16.5	114

\*Ésta se puede usar como peso específico o como densidad de masa en lb<sub>m</sub>/plg<sup>3</sup>.

**A-15 Propiedades de aceros estructurales**

Material ASTM núm. y productos	Resistencia última, $s_u$ *		Resistencia a la cedencia, $s_y$ *		Porcentaje de alargamiento en 2 plg
	ksi	MPa	ksi	MPa	
A36—Perfiles, placas y barras de acero al carbón	58	400	36	248	21
A242—Perfiles, placas y barras de baja aleación y alta resistencia					
≤ 3/4 plg de espesor	70	483	50	345	21
3/4 a 1 1/2 plg de espesor	67	462	46	317	21
1 1/2 a 4 plg de espesor	63	434	42	290	21
A500—Tubería estructural formada en frío					
Redonda, grado A	45	310	33	228	25
Redonda, grado B	58	400	42	290	23
Redonda, grado C	62	427	46	317	21
Perfilada, grado A	45	310	39	269	25
Perfilada, grado B	58	400	46	317	23
Perfilada, grado C	62	427	50	345	21
A501—Tubería estructural formada en caliente, redonda o perfilada	58	400	36	248	23
A514—Placa de acero aleado templado y enfriado de alta resistencia a la cedencia					
≤ 2 1/2 plg de espesor	110	758	100	690	18
2 1/2 a 6 plg de espesor	100	690	90	620	16
A572—Perfiles, placas y barras de acero de baja aleación de columbio–vanadio de alta resistencia					
Grado 42	60	414	42	290	24
Grado 50	65	448	50	345	21
Grado 60	75	517	60	414	18
Grado 65	80	552	65	448	17

\*Valores mínimos; pueden ser más elevados.

El American Institute of Steel Construction especifica  $E = 29 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$  (200 GPa) para acero estructural.

A-16 Propiedades representativas del hierro colado\*

Tipo de material y grado	Resistencia última						Resistencia a la cedencia		Módulo de elasticidad, $E^{\ddagger}$		Porcentaje de alargamiento
	$s_u^{\dagger}$		$s_{uv}^{\dagger}$		$s_{ut}$		$s_y^{\dagger}$		$\text{lb/plg}^2 \times 10^{-6}$	GPa	
	ksi	MPa	ksi	MPa	ksi	MPa	ksi	MPa			
<b>Hierro gris ASTM A48</b>											
Grado 20	20	138	80	552	32	221	—	—	12.2	84	<1
Grado 40	40	276	140	965	57	393	—	—	19.4	134	<0.8
Grado 60	55	379	170	1170	72	496	—	—	21.5	148	<0.5
<b>Hierro dúctil ASTM A536</b>											
60-40-18	60	414	—	—	57	393	40	276	24	165	18
80-55-6	80	552	—	—	73	503	55	379	24	165	6
100-70-3	100	690	—	—	—	—	70	483	24	165	3
120-90-2	120	827	180	1240	—	—	90	621	23	159	2
<b>Hierro dúctil austempleado (ADI)</b>											
Grado 1	125	862	—	—	—	—	85	586	24	165	10
Grado 2	150	1034	—	—	—	—	100	690	24	165	7
Grado 3	175	1207	—	—	—	—	120	827	24	165	4
Grado 4	200	1379	—	—	—	—	140	965	24	165	2
<b>Hierro maleable ASTM A220</b>											
45008	65	448	240	1650	49	338	45	310	26	170	8
60004	80	552	240	1650	65	448	60	414	27	186	4
80002	95	655	240	1650	75	517	80	552	27	186	2

\*La densidad del hierro colado varía de 0.25 a 0.27  $\text{lb}_m/\text{plg}^3$  (6920 a 7480  $\text{kg}/\text{m}^3$ ).

<sup>†</sup>Valores mínimos; pueden ser mayores.

<sup>‡</sup>Valores aproximados; pueden ser mayores o menores en aproximadamente 15%.

A-17 Propiedades representativas de aleaciones de aluminio\*

Aleación y temple	Resistencia última, $s_u$		Resistencia a la cedencia		Porcentaje de alargamiento	Resistencia a cortante, $s_{ur}$	
	ksi	MPa	ksi	MPa		ksi	MPa
1100-H12	16	110	15	103	25	10	69
1100-H18	24	165	22	152	15	13	90
2014-0	27	186	14	97	18	18	124
2014-T4	62	427	42	290	20	38	262
2014-T6	70	483	60	414	13	42	290
3003-0	16	110	6	41	40	11	76
3003-H12	19	131	18	124	20	12	83
3003-H18	29	200	27	186	10	16	110
5154-0	35	241	17	117	27	22	152
5154-H32	39	269	30	207	15	22	152
5154-H38	48	331	39	269	10	28	193
6061-0	18	124	8	55	30	12	83
6061-T4	35	241	21	145	25	24	165
6061-T6	45	310	40	276	17	30	207
7075-0	33	228	15	103	16	22	152
7075-T6	83	572	73	503	11	48	331
Aleaciones fundidas							
(moldeo de fundición permanente)							
204.0-T4	48	331	29	200	8	—	—
356.0-T6	33	228	22	152	3	—	—

\*Módulo de elasticidad  $E$  para la mayoría de aleaciones de aluminio, entre las que se incluye 1100, 3003, 6061 y 6063, es  $10 \times 10^6$  lb/plg<sup>2</sup> (69 GPa). Para 2014,  $E = 10.6 \times 10^6$  lb/plg<sup>2</sup> (73 GPa). Para 5154,  $E = 10.2 \times 10^6$  lb/plg<sup>2</sup> (70 GPa). Para 7075,  $E = 10.4 \times 10^6$  lb/plg<sup>2</sup> (72 GPa). La densidad en la mayoría de las aleaciones de aluminio es de casi  $0.10$  lb<sub>m</sub>/plg<sup>3</sup> ( $2770$  kg/m<sup>3</sup>).

A-18 Propiedades representativas de la madera

Tipo y grado	Esfuerzo permisible											
	Flexión		Tensión paralela a la veta		Cortante horizontal		Compresión			Módulo de elasticidad		
	lb/plg <sup>2</sup>	MPa	lb/plg <sup>2</sup>	MPa	lb/plg <sup>2</sup>	MPa	lb/plg <sup>2</sup>	MPa	lb/plg <sup>2</sup>	MPa	ksi	GPa
Pino Douglas-2 a 4 plg de espesor, 6 plg y más ancho												
Núm. 1	1750	12.1	1050	7.2	95	0.66	385	2.65	1250	8.62	1800	12.4
Núm. 2	1450	10.0	850	5.9	95	0.66	385	2.65	1000	6.90	1700	11.7
Núm. 3	800	5.5	475	3.3	95	0.66	385	2.65	600	4.14	1500	10.3
Abeto- 2 a 4 plg de espesor, 6 plg y más ancho												
Núm. 1	1400	9.6	825	5.7	75	0.52	245	1.69	1000	6.90	1500	10.3
Núm. 2	1150	7.9	675	4.7	75	0.52	245	1.69	800	5.52	1400	9.7
Núm. 3	625	4.3	375	2.6	75	0.52	245	1.69	500	3.45	1200	8.3
Pino del sur- 1/2 a 4 plg de espesor, 6 plg y más ancho												
Núm. 1	1400	9.6	825	5.7	80	0.55	270	1.86	850	5.86	1600	11.0
Núm. 2	1000	6.9	575	4.0	70	0.48	230	1.59	550	3.79	1300	9.0
Núm. 3	650	4.5	375	2.6	70	0.48	230	1.59	400	2.76	1300	9.0

A-19 Propiedades representativas de plásticos seleccionados

Tipo*	Resistencia a la tensión		Resistencia flexional		Módulo de tensión		Densidad	
	ksi	MPa	ksi	MPa	ksi	GPa	lb <sub>m</sub> /plg <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>
ABS	7	48	11	76	360	2.5	0.036	995
Acetal copolímero	9	62	13	90	400	2.8	0.051	1410
Resina epóxica, moldeada	15	103	30	207	3000	20.7	0.069	1910
Nylon 6/6	26	179	35	241	1300	9.0	0.041	1135
Fenólico	9	62	18	124	2500	17.2	0.066	1825
Policarbonato	16	110	19	131	860	5.9	0.049	1355
Poliéster PET	22	152	31	214	1700	11.7	0.059	1630
Polimida	27	186	50	345	3200	22.1	0.069	1910
Polipropileno	10	69	14	97	800	5.5	0.041	1135
Poliestireno	12	83	17	117	800	5.5	0.042	1165

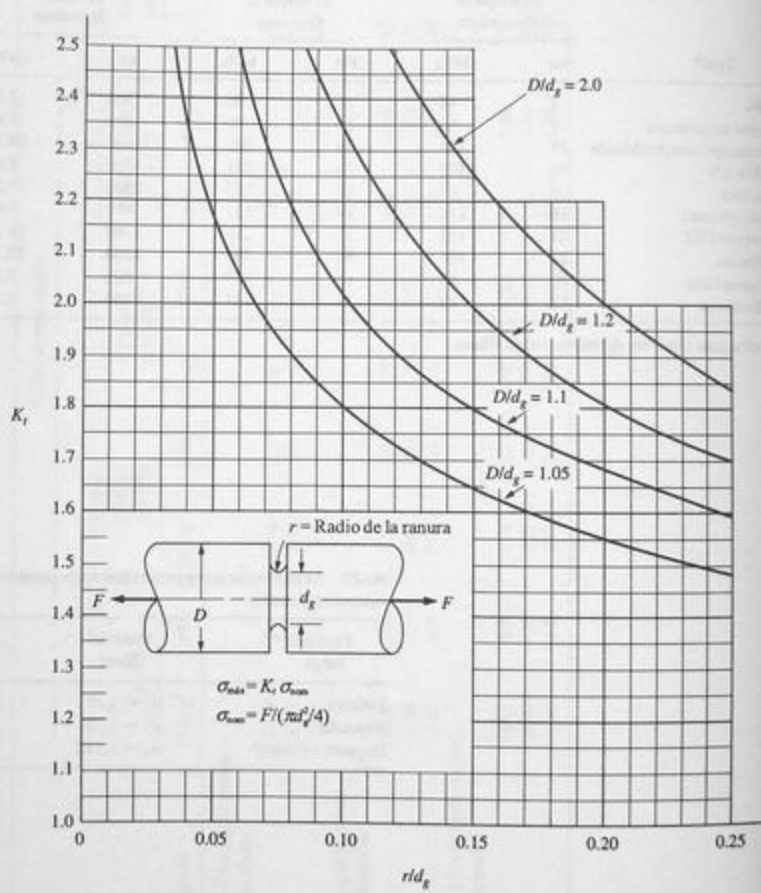
\*Reforzado con fibra de vidrio y otras fibras.

A-20 Recomendaciones para esfuerzo de diseño—esfuerzos normales directos

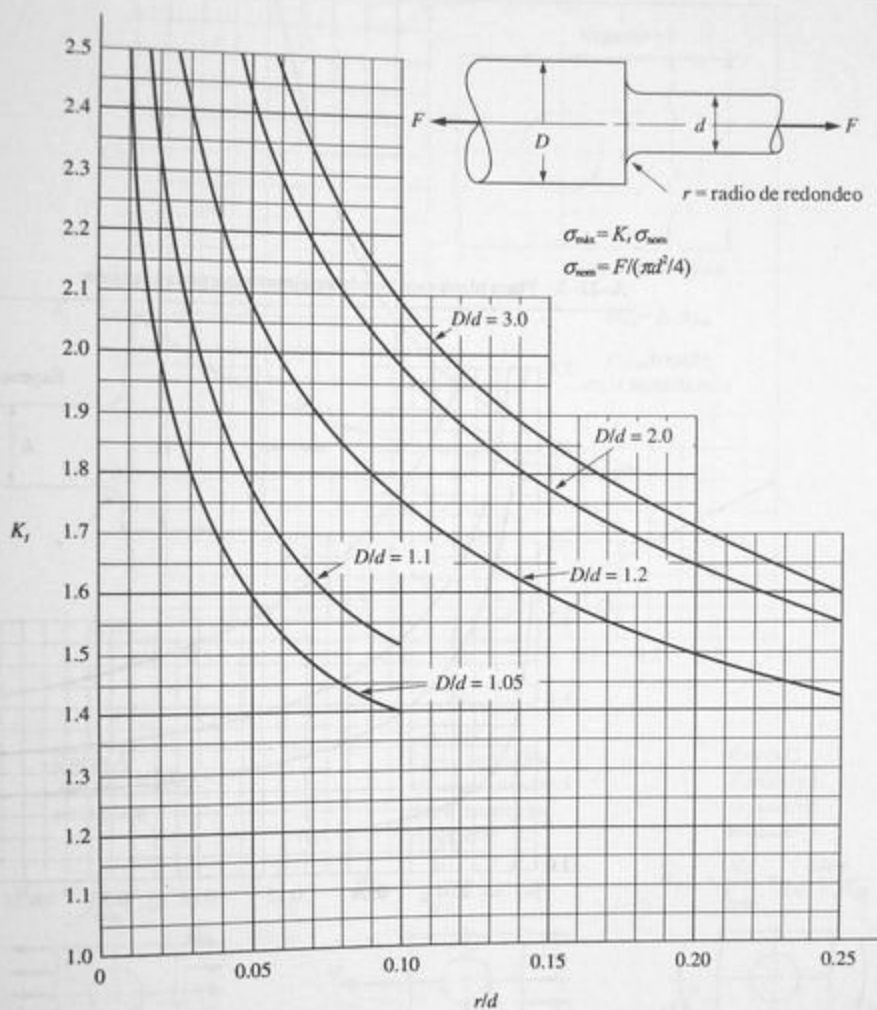
Tipo de carga	Material dúctil	Material frágil
Estática	$\sigma_d = s_u/2$	$\sigma_d = s_u/6$
Repetida	$\sigma_d = s_u/8$	$\sigma_d = s_u/10$
Impacto o choque	$\sigma_d = s_u/12$	$\sigma_d = s_u/15$

A-21 Factores de concentración de esfuerzo

A-21-1 Barra circular ranurada axialmente cargada a tensión

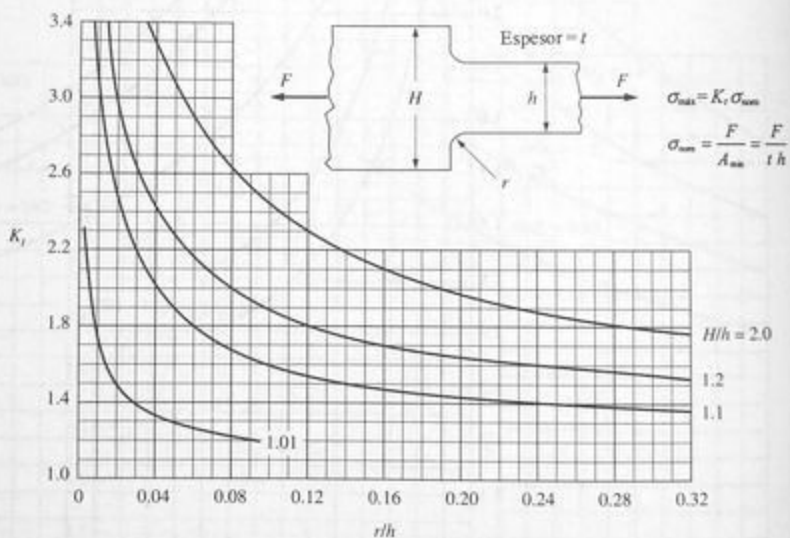


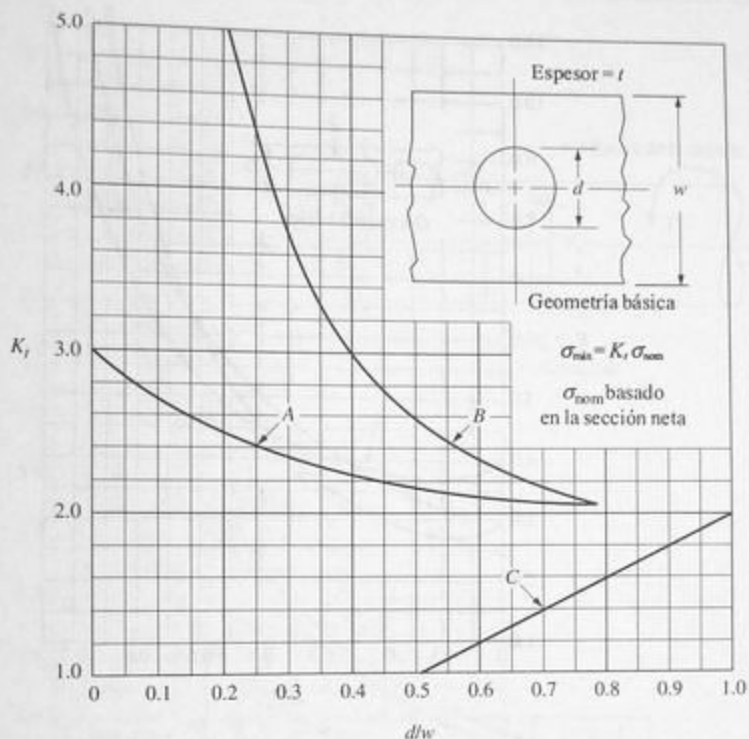
A-21-2 Barra circular escalonada axialmente cargada a tensión





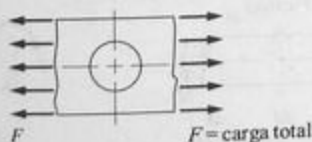
A-21-3 Placa plana escalonada axialmente cargada a tensión





Curva A  
Tensión directa  
en la placa

$$\sigma_{nom} = \frac{F}{A_{neta}} = \frac{F}{(w-d)t}$$



Curva B  
Carga de tensión  
aplicada a través  
de un pasador en  
el agujero

$$\sigma_{nom} = \frac{F}{A_{neta}} = \frac{F}{(w-d)t}$$

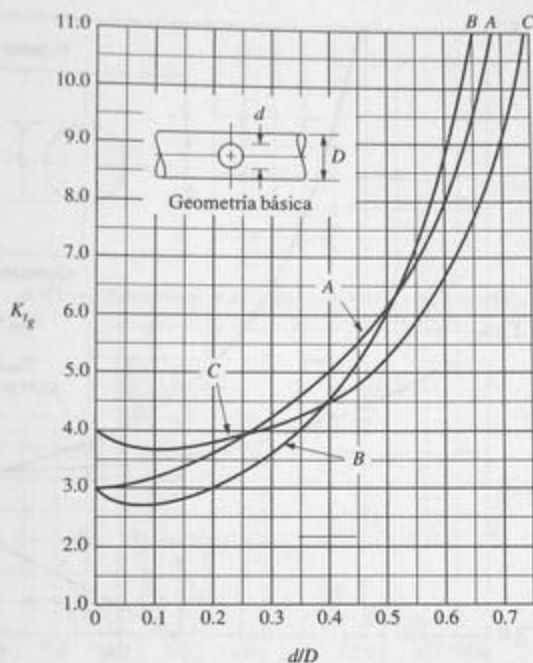


Curva C  
Flexión en  
el plano de  
la placa

$$\sigma_{nom} = \frac{Mc}{I_{neta}} = \frac{6Mw}{(w^3 - d^3)t}$$



Nota:  $K_t = 1.0$  cuando  $d/w < 0.5$



Nota:  $K_t$  se basa en el esfuerzo nominal en una barra circular sin agujero (sección bruta)

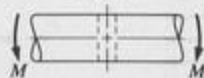
$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}}$$

Curva A  
Tensión



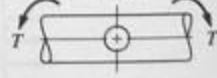
$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi D^2/4}$$

Curva B  
Flexión



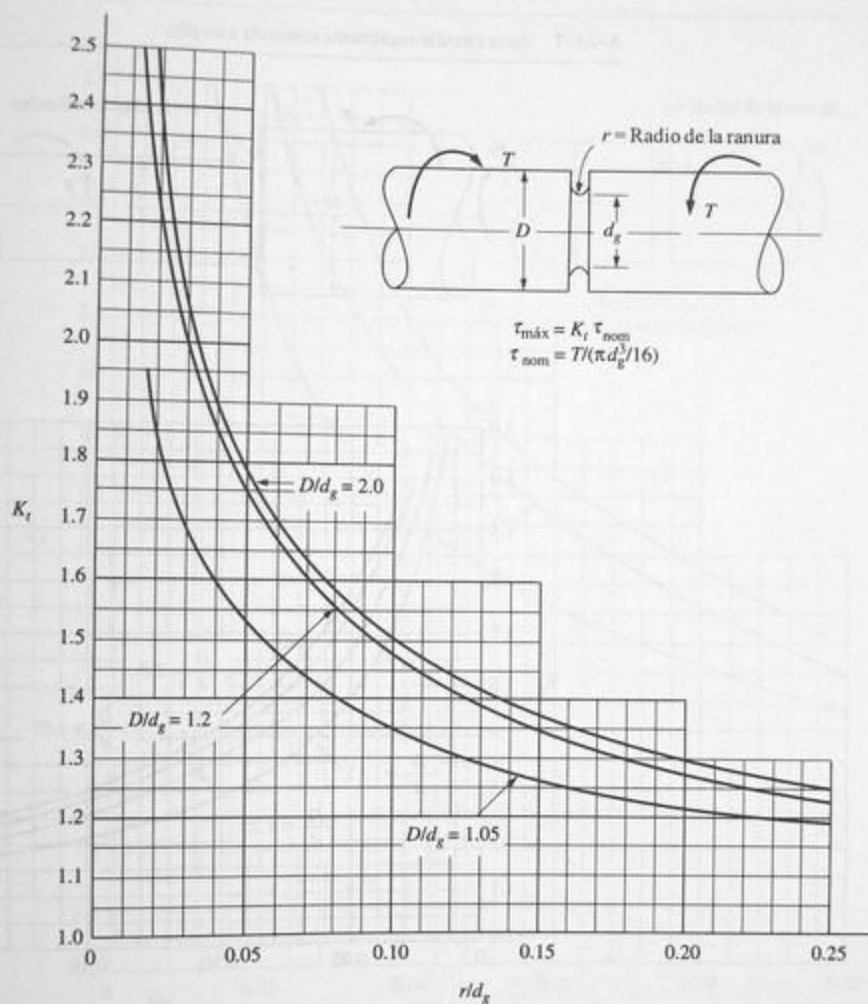
$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi D^3/32}$$

Curva C  
Torsión

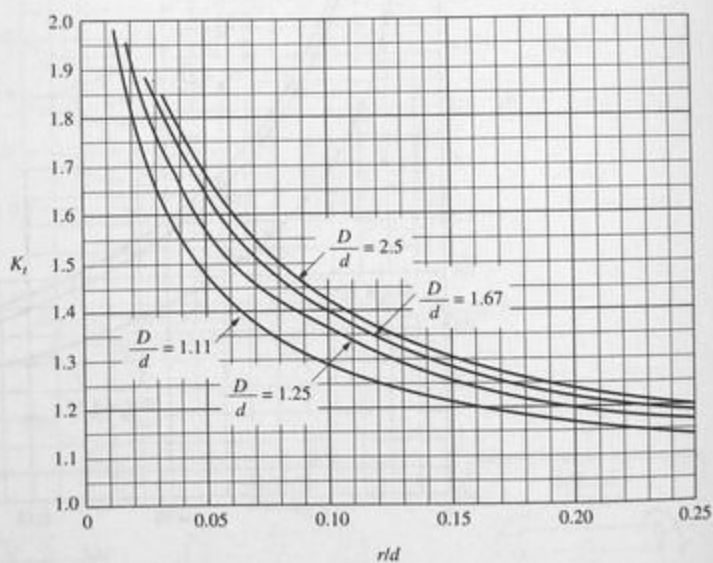
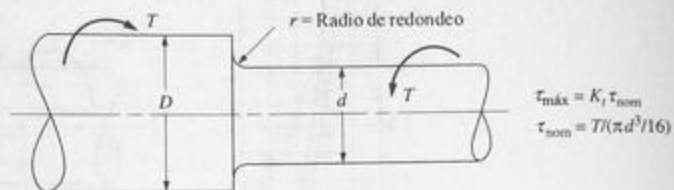


$$\tau_{\text{nom}} = \frac{T}{Z_p} = \frac{T}{\pi D^3/16}$$

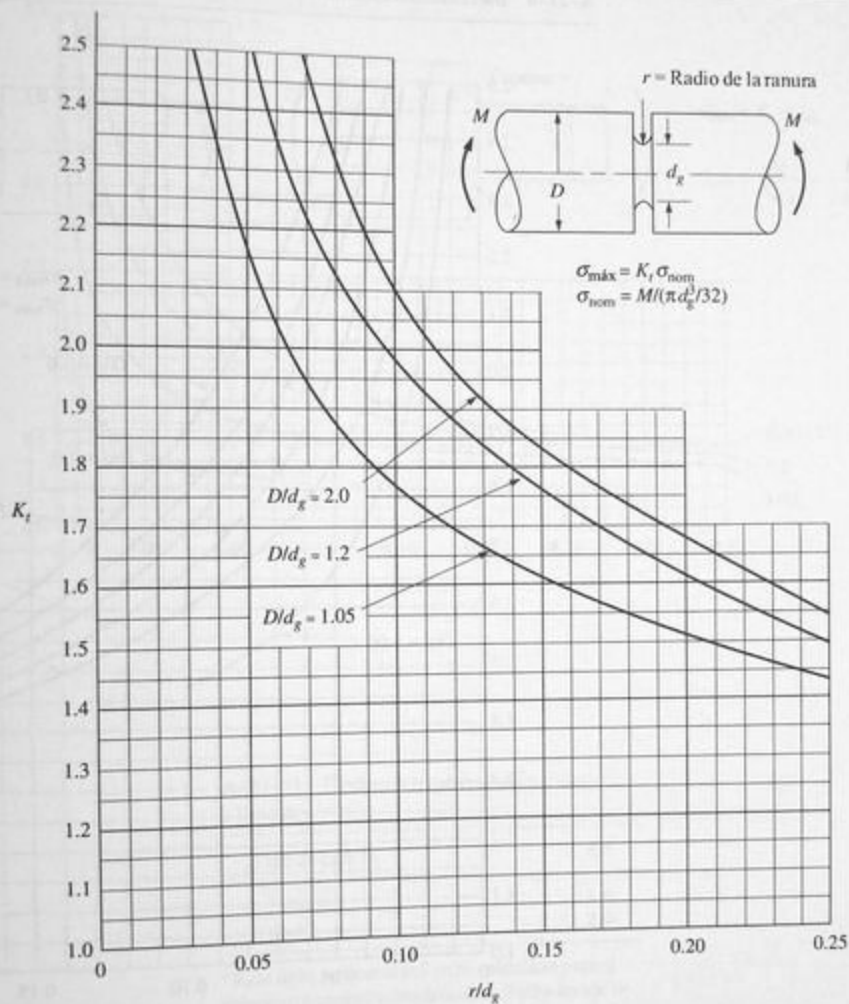
A-21-6 Barra circular ranurada sometida a torsión



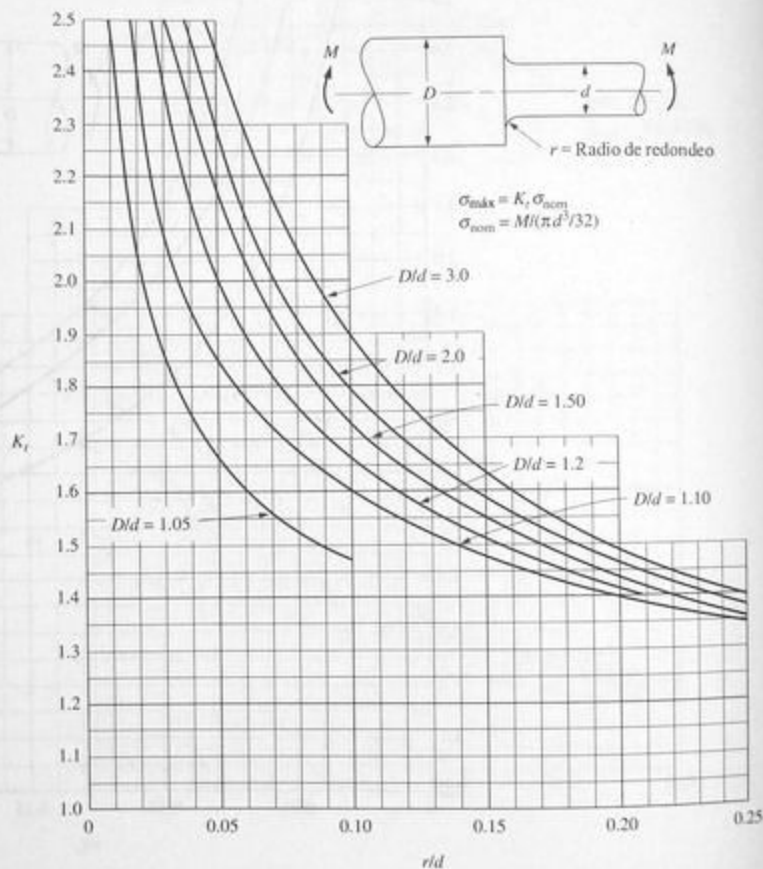
A-21-7 Barra circular escalonada sometida a torsión



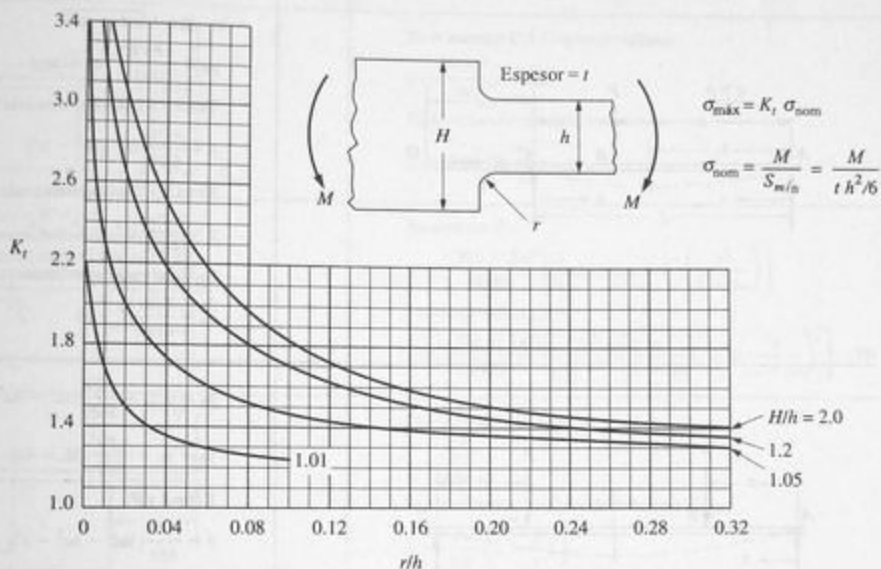
A-21-8 Barra circular ranurada sometida a flexión



A-21-9 Barra circular escalonada sometida a flexión



A-21-10 Placa plana escalonada sometida a flexión



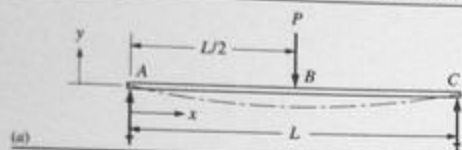
A-21-11 Flechas con cuñeros—sometidas a flexión y torsión

Tipo de cuñero	$K_t^*$
Extremo	1.6
Perfil	2.0

\* $K_t$  se debe aplicar al esfuerzo calculado para el diámetro nominal completo de la flecha donde se localiza el cuñero.



A-22 Fórmulas para determinar deflexión de vigas: vigas simplemente apoyadas



$$y_x = y_{\max} = \frac{-PL^3}{48EI} \text{ en el centro}$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$$



$$y_{\max} = \frac{-Pab(L+b)\sqrt{3a(L+b)}}{27EIL}$$

$$\text{en } x_1 = \sqrt{a(L+b)/3}$$

$$y_B = \frac{-Pa^2b^2}{3EIL} \text{ en la carga}$$

Entre A y B (el segmento más largo):

$$y = \frac{-Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$$

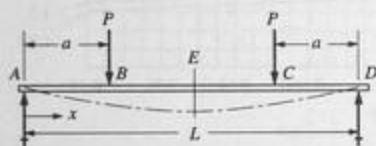
Entre B y C (el segmento más corto):

$$y = \frac{-Pax}{6EIL}(L^2 - v^2 - a^2)$$

En D del extremo saliente:

$$y_D = \frac{Pabc}{6EIL}(L+a)$$

(b)



$$y_x = y_{\max} = \frac{-Pa}{24EI}(3L^2 - 4a^2) \text{ en el centro}$$

$$y_B = y_C = \frac{-Pa^2}{6EI}(3L - 4a) \text{ en las cargas}$$

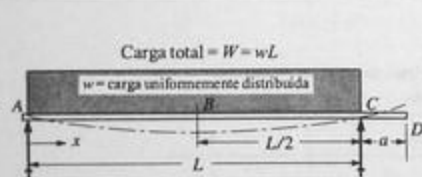
Entre A y B:

$$y = \frac{-Px}{6EI}(3aL - 3a^2 - x^2)$$

Entre B y C:

$$y = \frac{-Pa}{6EI}(3Lx - 3x^2 - a^2)$$

(c)



$$y_B = y_{\max} = \frac{-5wL^4}{384EI} = \frac{-5WL^3}{384EI} \text{ en el centro}$$

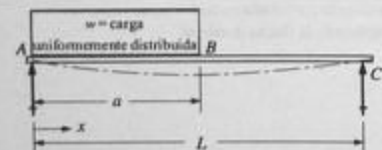
Entre A y B:

$$y = \frac{-wx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

En el extremo D:

$$y_D = \frac{wL^2a}{24EI}$$

(d)



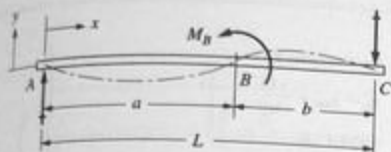
Entre A y B:

$$y = \frac{-wx}{24EIL}[a^2(2L - a)^2 - 2ax^2(2L - a) + Lx^3]$$

Entre B y C:

$$y = \frac{-wa^2(L-x)}{24EI}(4Lx - 2x^2 - a^2)$$

(e)



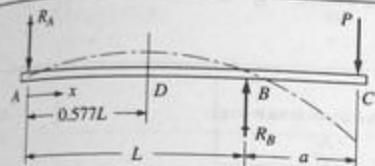
$M_B$  = momento concentrado en B

Entre A y B:

$$y = \frac{-M_B}{6EI} \left[ \left( 6a - \frac{3a^2}{L} - 2L \right) x - \frac{x^3}{L} \right]$$

Entre B y C:

$$y = \frac{M_B}{6EI} \left[ 3a^2 + 3x^2 - \frac{x^3}{L} - \left( 2L + \frac{3a^2}{L} \right) x \right]$$



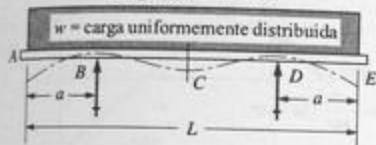
En el extremo C del segmento saliente:

$$y_C = \frac{-Pa^2}{3EI} (L + a)$$

En D: deflexión máxima hacia arriba:

$$y_D = 0.06415 \frac{PaL^2}{EI}$$

Carga total =  $W = wL$

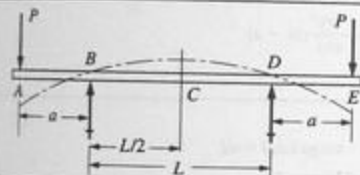


En el centro C:

$$y = \frac{-W(L - 2a)^2}{384EI} \left[ \frac{5}{L}(L - 2a) - \frac{24}{L} \left( \frac{a^2}{L - 2a} \right) \right]$$

En los extremos A y E:

$$y = \frac{-W(L - 2a)a}{24EI} \left[ -1 + 6 \left( \frac{a}{L - 2a} \right)^2 + 3 \left( \frac{a}{L - 2a} \right)^3 \right]$$



En el centro C:

$$y = \frac{PL^2a}{8EI}$$

En los extremos A y E donde actúan las cargas:

$$y = \frac{-Pa^2}{3EI} \left( a + \frac{3}{2}L \right)$$

$w$  = carga uniformemente distribuida



En B:

$$y = 0.03208 \frac{wa^2L^2}{EI}$$

en el extremo D:

$$y = \frac{-wa^3}{24EI} (4L + 3a)$$

Fonte: Engineering Data for Aluminum Structures (Washington, DC: The Aluminum Association, 1986), págs. 63-77.

A-23 Fórmulas para determinar deflexiones de vigas-vigas en voladizo



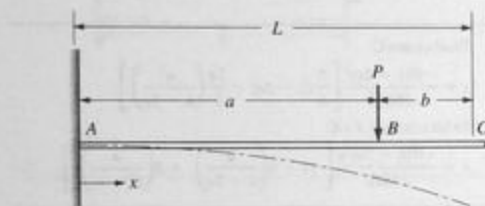
(a)

En el extremo B:

$$y_B = y_{\max} = \frac{-PL^3}{3EI}$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-Px^2}{6EI}(3L - x)$$



(b)

En B donde actúa la carga:

$$y_B = \frac{-Pa^3}{3EI}$$

En el extremo C:

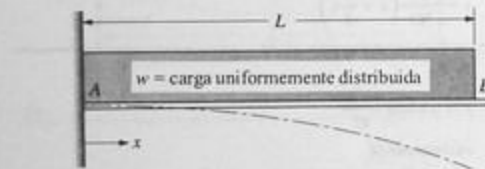
$$y_C = y_{\max} = \frac{-Pa^2}{6EI}(3L - a)$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-Px^2}{6EI}(3a - x)$$

Entre B y C:

$$y = \frac{-Pa^2}{6EI}(3x - a)$$



(c)

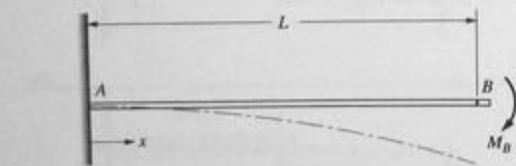
$W =$  carga total  $= wL$

En el extremo B:

$$y_B = y_{\max} = \frac{-WL^3}{8EI}$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-Wx^3}{24EIL}[2L^2 + (2L - x)^2]$$



(d)

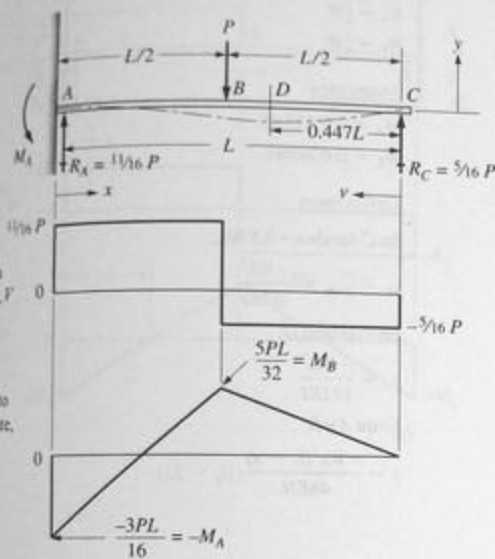
$M_B =$  momento concentrado en el extremo

En el extremo B:

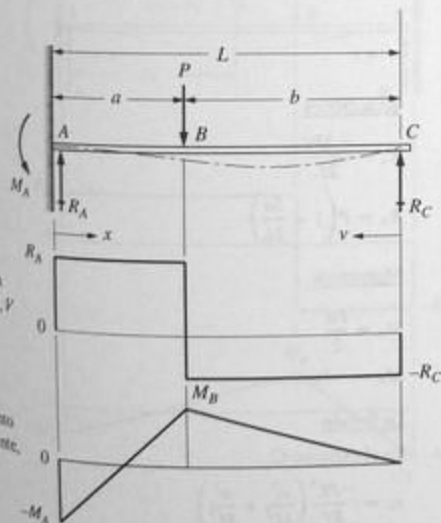
$$y_B = y_{\max} = \frac{-M_B L^2}{2EI}$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-M_B x^2}{2EI}$$



(a)



(b)

### Deflexiones

En B donde actúa la carga:

$$y_B = \frac{-7 PL^3}{768 EI}$$

$y_{\text{máx}}$  ocurre en D donde  $v = 0.447L$ :

$$y_D = y_{\text{máx}} = \frac{-PL^3}{107EI}$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-Px^2}{96EI}(9L - 11x)$$

Entre B y C:

$$y = \frac{-Pv}{96EI}(3L^2 - 5v^2)$$

### Reacciones

$$R_A = \frac{Pb}{2L^2}(3L^2 - b^2)$$

$$R_C = \frac{Pa^2}{2L^2}(b + 2L)$$

### Momentos

$$M_A = \frac{-Pab}{2L^2}(b + L)$$

$$M_B = \frac{Pa^2b}{2L^3}(b + 2L)$$

### Deflexiones

En B donde actúa la carga:

$$y_B = \frac{-Pa^3b^2}{12EIL^3}(3L + b)$$

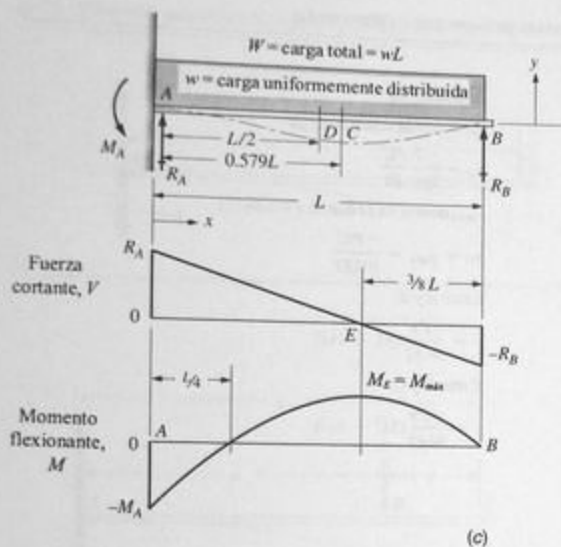
Entre A y B:

$$y = \frac{-Px^2b}{12EIL^3}(3C_1 - C_2x)$$

$$C_1 = aL(L + b); C_2 = (L + a)(L + b) + aL$$

Entre B y C:

$$y = \frac{-Pa^2v}{12EIL^3}[3L^2b - v^2(3L - a)]$$



#### Reacciones

$$R_A = \frac{5}{8}W$$

$$R_B = \frac{3}{8}W$$

#### Momentos

$$M_A = -0.125WL$$

$$M_E = 0.0703WL$$

#### Deflexiones

En C donde  $x = 0.579L$ :

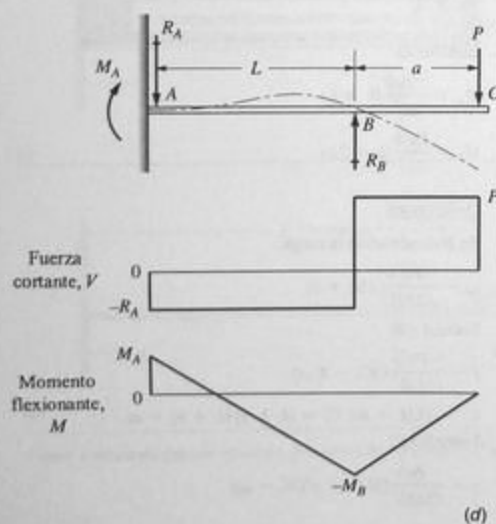
$$y_C = y_{\text{máx}} = \frac{-WL^3}{185EI}$$

En el centro D:

$$y_D = \frac{-WL^3}{192EI}$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-Wx^2(L-x)}{48EIL}(3L-2x)$$



#### Reacciones

$$R_A = \frac{-3Pa}{2L}$$

$$R_B = P \left( 1 + \frac{3a}{2L} \right)$$

#### Momentos

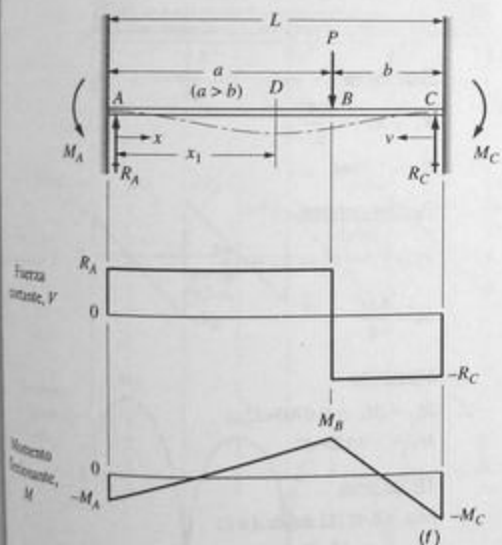
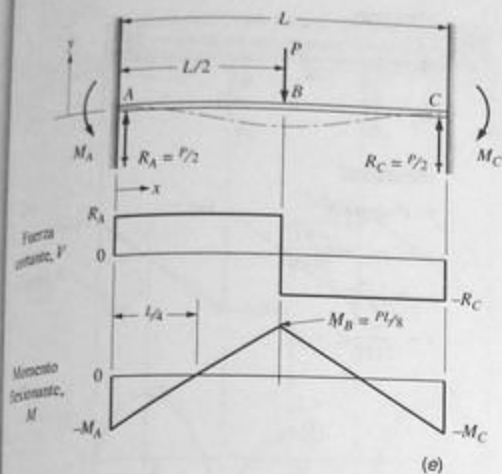
$$M_A = \frac{Pa}{2}$$

$$M_B = -Pa$$

#### Deflexión

En el extremo C:

$$y_C = \frac{-PL^3}{EI} \left( \frac{a^2}{4L^2} + \frac{a^3}{3L^3} \right)$$



### Momentos

$$M_A = M_B = M_C = \frac{PL}{8}$$

### Deflexiones

En el centro B:

$$y_B = y_{\max} = \frac{-PL^3}{192EI}$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-Px^2}{48EI} (3L - 4x)$$

### Reacciones

$$R_A = \frac{Pb^2}{L^2} (3a + b)$$

$$R_C = \frac{Pa^2}{L^2} (3b + a)$$

### Momentos

$$M_A = \frac{-Pab^2}{L^2}$$

$$M_B = \frac{2Pa^2b^2}{L^2}$$

$$M_C = \frac{-Pa^2b}{L^2}$$

### Deflexiones

En B donde actúa la carga:

$$y_B = \frac{-Pa^3b^3}{3EIL^2}$$

En D donde  $x_1 = \frac{2aL}{3a + b}$

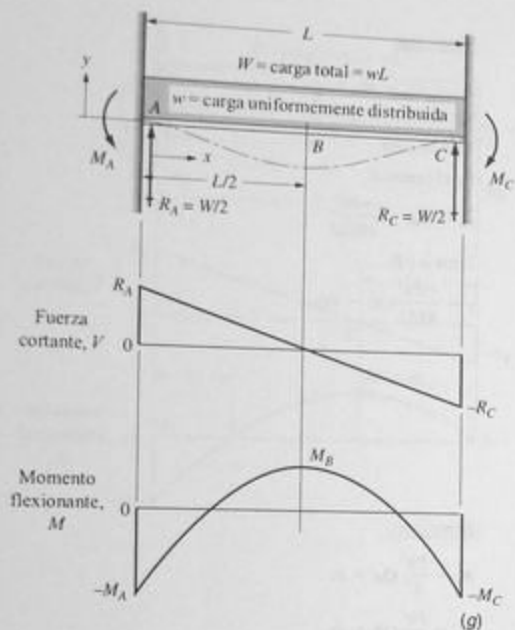
$$y_D = y_{\min} = \frac{-2Pa^3b^2}{3EI(3a + b)^2}$$

Entre A y B (segmento más largo):

$$y = \frac{-Px^3b^2}{6EIL^2} [2a(L - x) + L(a - x)]$$

Entre B y C (segmento más corto):

$$y = \frac{-Pv^3a^2}{6EIL^2} [2b(L - v) + L(b - v)]$$



### Momentos

$$M_A = M_C = -\frac{WL}{12}$$

$$M_B = \frac{WL}{24}$$

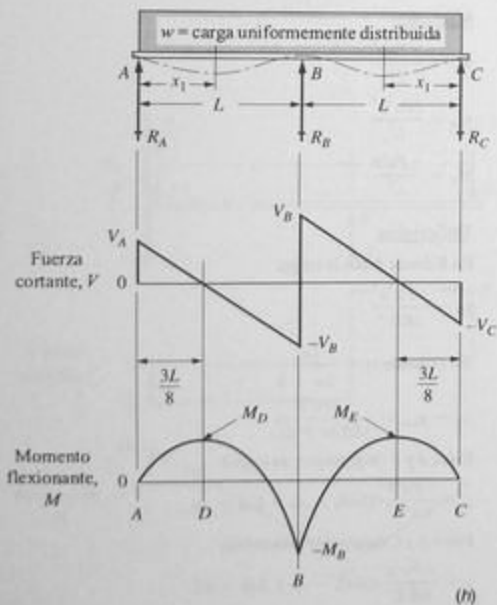
### Deflexiones

En el centro B:

$$y_B = y_{\max} = -\frac{WL^3}{384EI}$$

Entre A y C:

$$y = -\frac{wx^2}{24EI}(L-x)^2$$



### Reacciones

$$R_A = R_C = \frac{3wL}{8}$$

$$R_B = 1.25wL$$

### Fuerzas cortantes

$$V_A = V_C = R_A = R_C = \frac{3wL}{8}$$

$$V_B = \frac{5wL}{8}$$

### Momentos

$$M_D = M_E = 0.0703wL^2$$

$$M_B = -0.125wL^2$$

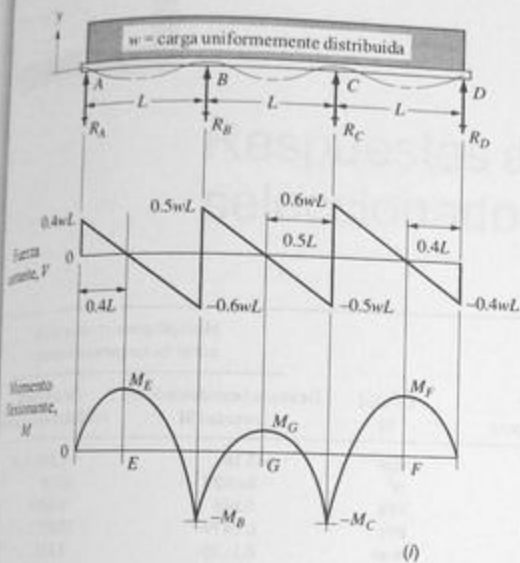
### Deflexiones

en  $x_1 = 0.4215L$  desde A o C:

$$y_{\max} = -\frac{wL^4}{185EI}$$

Entre A y B:

$$y = -\frac{w}{48EI}(L^3x - 3Lx^3 + 2x^4)$$



#### Reacciones

$$R_A = R_D = 0.4wL$$

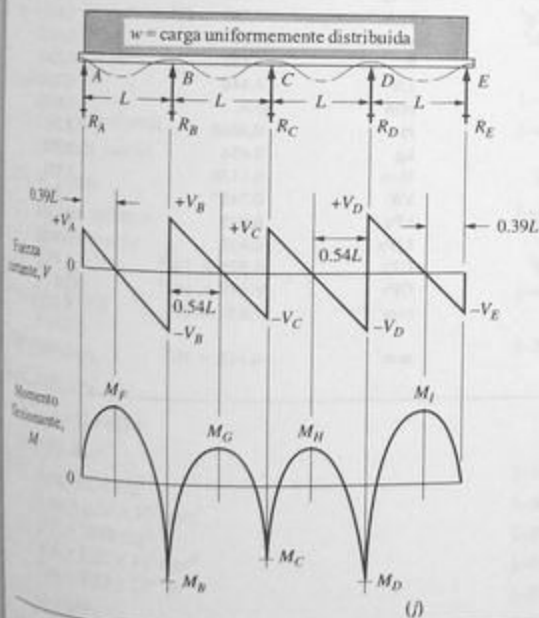
$$R_B = R_C = 1.10wL$$

#### Momentos

$$M_E = M_F = 0.08wL^2$$

$$M_B = M_C = -0.10wL^2 = M_{\text{máx}}$$

$$M_G = 0.025wL^2$$



#### Reacciones

$$R_A = R_E = 0.393wL$$

$$R_B = R_D = 1.143wL$$

$$R_C = 0.928wL$$

#### Fuerzas cortantes

$$V_A = +0.393wL$$

$$-V_B = -0.607wL$$

$$+V_B = +0.536wL$$

$$-V_C = -0.464wL$$

$$+V_C = +0.464wL$$

$$-V_D = -0.536wL$$

$$+V_D = +0.607wL$$

$$-V_E = -0.393wL$$

#### Momentos

$$M_B = M_D = -0.1071wL^2 = M_{\text{máx}}$$

$$M_F = M_I = 0.0772wL^2$$

$$M_C = -0.0714wL^2$$

$$M_G = M_H = 0.0364wL^2$$



A-25 Factores de conversión

Cantidad	Unidad estadounidense	Unidad SI	Multiplíquese el valor dado por el factor para convertir:	
			De unidad estadounidense a unidad SI	De unidad SI a unidad estadounidense
Área	plg <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	645.16	1.550 × 10 <sup>-3</sup>
	pie <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	0.0929	10.76
Carga	lb/plg <sup>2</sup>	kPa	6.895	0.1450
	lb/pie <sup>2</sup>	kPa	0.0479	20.89
Momento flexionante	lb-plg	N-m	0.1130	8.851
	lb-pie	N-m	1.356	0.7376
Densidad	lb <sub>m</sub> /plg <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>	2.768 × 10 <sup>4</sup>	3.613 × 10 <sup>-5</sup>
	lb <sub>m</sub> /pie <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>	16.02	0.0624
Fuerza	lb	N	4.448	0.2248
	kip	kN	4.448	0.2248
Longitud	plg	mm	25.4	0.03937
	pie	m	0.3048	3.281
Masa	lb <sub>m</sub>	kg	0.454	2.205
Par de torsión	lb-plg	N-m	0.1130	8.851
Potencia	hp	kW	0.7457	1.341
Esfuerzo o presión	lb/plg <sup>2</sup>	kPa	6.895	0.1450
	ksi	MPa	6.895	0.1450
	lb/plg <sup>2</sup>	GPa	6.895 × 10 <sup>-8</sup>	1.450 × 10 <sup>5</sup>
Módulo de sección	ksi	GPa	6.895 × 10 <sup>-3</sup>	145.0
	plg <sup>3</sup>	mm <sup>3</sup>	1.639 × 10 <sup>4</sup>	6.102 × 10 <sup>-3</sup>
Momento de inercia	plg <sup>4</sup>	mm <sup>4</sup>	4.162 × 10 <sup>8</sup>	2.403 × 10 <sup>-8</sup>

# Respuestas a problemas seleccionados

## Capítulo 1

1-17. 7.85 kN enfrente  
11.77 kN detrás

1-19. 54.5 mm

1-23. 1765 lb enfrente  
2646 lb detrás

1-25. 55.1 lb  
25.7 lb/plg  
2.14 plg

1-27. 398 slugs

1-29. 8274 kPa

1-31. 96.5 a 524 MPa

1-33. 9097 mm<sup>2</sup>

1-35. Área = 324 plg<sup>2</sup>  
Área =  $2.09 \times 10^5$  mm<sup>2</sup>  
Vol. = 3888 plg<sup>3</sup>  
Vol. =  $6.37 \times 10^7$  mm<sup>3</sup>  
Vol. =  $6.37 \times 10^{-2}$  m<sup>3</sup>

1-37. 40.7 MPa

1-39. 5375 lb/plg<sup>2</sup>

1-41. 79.8 MPa

1-43. 803 lb/plg<sup>2</sup>

1-45.  $\sigma_{AB} = 107.4$  MPa

$\sigma_{BC} = 75.2$  MPa

$\sigma_{BD} = 131.1$  MPa

1-47.  $\sigma_{AB} = 167$  MPa tensión

$\sigma_{BC} = 77.8$  MPa tensión

$\sigma_{CD} = 122$  MPa tensión

1-49.  $\sigma_{AB} = 20\,471$  lb/plg<sup>2</sup> tensión

$\sigma_{BC} = 3129$  lb/plg<sup>2</sup> tensión

1-51. Fuerzas: AD = CD = 10.5 kN

AB = BC = 9.09 kN

Esfuerzos:  $\sigma_{AB} = \sigma_{BC} = 25.3$  MPa tensión

$\sigma_{BD} = 17.5$  MPa tensión

$\sigma_{AD} = \sigma_{CD} = 21.0$  MPa compresión

1-53. 50.0 MPa

1-55. 11 791 lb/plg<sup>2</sup>

1-57. 146 MPa

1-59. 151 MPa

1-61. 81.1 MPa

1-63. 24.7 MPa

1-65. Pasador:  $\tau = 50\,930$  lb/plg<sup>2</sup>

Collar:  $\tau = 38\,800$  lb/plg<sup>2</sup>

- 1-67. 183 MPa  
 1-69. 73.9 MPa  
 1-71. 22.6 MPa  
 1-73. (a) 2187 lb/plg<sup>2</sup>  
 (b) 530 lb/plg<sup>2</sup>  
 1-75. 18963 lb/plg<sup>2</sup>  
 1-77. 28.3 MPa  
 1-79. 5.39 MPa

## Capítulo 2

- 2-15. 1020 HR  
 2-19. 16.4 lb  
 2-21. Magnesio  
 2-29.  $s_w = 40$  ksi;  $s_w = 140$  ksi  
 2-31. Flexión:  $\sigma_x = 1450$  lb/plg<sup>2</sup>  
 Tensión:  $\sigma_x = 850$  lb/plg<sup>2</sup>  
 Compresión:  $\sigma_x = 1000$  lb/plg<sup>2</sup> paralelo a la veta  
 Compresión:  $\sigma_x = 385$  lb/plg<sup>2</sup> perpendicular a la veta  
 Cortante:  $\tau_{xy} = 95$  lb/plg<sup>2</sup>

## Capítulo 3

- 3-1. Se requiere  $s_y = 216$  MPa  
 3-3. Se requiere  $s_w = 86\,000$  lb/plg<sup>2</sup>  
 3-5. No. esfuerzo de tensión excesivo  
 3-7.  $d_{\min} = 0.824$  plg  
 3-9.  $d_{\min} = 12.4$  mm  
 3-11. Se requiere  $\sigma_x > 803$  lb/plg<sup>2</sup>  
 3-13. 16.7 kN  
 3-15.  $d_{\min} = 0.412$  plg  
 3-17. En los lados B y H:  $B_{\min} = 22.2$  mm;  
 $H_{\min} = 44.4$  mm  
 3-19. Se requiere  $s_y = 360$  MPa  
 3-21. Se requiere  $s_w = 400$  MPa  
 3-23. 20 260 lb  
 3-25. 0.577 m en un lado  
 3-26. 36.4 kip  
 3-27. 52.3 kip  
 3-28. (a) 30.4 kip  
 (b) 43.6 kip  
 3-29. (a)  $\sigma_b = 1572$  psi  
 (b) Un diseño posible: Una placa cuadrada en la parte inferior de cada pata; 2.50 plg por lado  
 3-31.  $L_{\min} = 0.556$  plg basada en cortante

- 3-33.  $d_{\min} = 0.808$  basada en cortante  
 Para  $d = 1.00$  plg,  $L_{\min} = 0.285$  plg para esfuerzo de apoyo o empuje  
 3-35.  $r = 151$  MPa; requerido  
 $s_w = 1473$  MPa  
 3-37. 83 kN  
 3-39. 256 kN  
 3-41. 18 300 lb  
 3-43. 62 650 lb  
 3-45. 119 500 lb  
 3-47. 119 700 lb  
 3-49. Pasador A:  $d_{\min} = 13.8$  mm  
 Pasadores en B y C:  $d_{\min} = 17.7$  mm  
 3-51. Fuerza de elevación = 2184 lb  
 $r = 6275$  lb/plg<sup>2</sup> si el pasador está sometido a cortante doble  
 3-53.  $d_{\min} = 0.199$  plg  
 3-55.  $N$  en el agujero = 3.91  
 $N$  en los redondeos = 7.20  
 3-57. 19.15 MPa en las ranuras circulares

## Capítulo 4

- 4-1. 0.041 plg  
 4-3. Fuerza = 2357 lb  
 $\sigma = 3655$  lb/plg<sup>2</sup>  
 4-5. (a) y (b)  $d_{\min} = 10.63$  mm; masa = 0.430 kg  
 (c)  $d_{\min} = 18.4$  mm; masa = 0.465 kg  
 4-7. (a) 0.857 mm  
 (b) 0.488 mm  
 4-9. Alargamiento = 0.0040 plg  
 Compresión = 0.00045 plg  
 4-11. Fuerza = 3214 lb; insegura  
 4-13.  $\delta = 0.016$  mm  
 $\sigma = 27.9$  MPa  
 4-15. 0.804 mm  
 4-17. 2.22 mm más corto  
 4-19. (a)  $\sigma = 0.276$  plg;  $\sigma = 37\,300$  lb/plg<sup>2</sup> (valor próximo a  $s_y$ )  
 (b)  $\sigma = 62\,200$  lb/plg<sup>2</sup> - mayor que  $s_w$ . El alambre se romperá  
 4-21. Fuerza = 6737 lb  
 $\delta = 0.055$  plg  
 4-23. Masa = 132 kg  
 $\sigma = 183$  MPa  
 4-25. 0.806 plg  
 4-27. 180 MPa

- 4-29. (a) 0.459 mm  
(b) 213 MPa
- 4-31. 693 lb/plg<sup>2</sup>
- 4-33. 234.8 °C
- 4-35. Latón:  $\delta = 6.46$  mm  
Acero inoxidable:  $\delta = 3.51$  mm
- 4-37. 38.7 MPa
- 4-39.  $\sigma = 37500$  lb/plg<sup>2</sup> de compresión. La barra fallaría a compresión o se pandearía
- 4-41. 0.157 plg
- 4-43. 154 MPa
- 4-45.  $\sigma_c = 17.1$  MPa;  $\sigma_t = 109$  MPa
- 4-47. 13.8 plg
- 4-49.  $d_{\text{min}} = 6.20$  mm
- 4-51.  $\sigma_c = 427$  MPa;  $\sigma_t = 49.4$  MPa

## Capítulo 5

- 5-1. 178 MPa
- 5-3. 4042 lb/plg<sup>2</sup>
- 5-5. 83.8 MPa
- 5-7.  $\tau = 6716$  lb/plg<sup>2</sup>; seguro
- 5-9.  $\tau = 5190$  lb/plg<sup>2</sup>;  
se requiere  $s_y = 62\,300$  lb/plg<sup>2</sup>
- 5-11.  $\tau = 52.8$  MPa;  $\theta = 0.030$  rad;  
se requiere  $s_y = 211$  MPa
- 5-13.  $D_1 = 46.5$  mm;  $D_2 = 58.1$  mm
- 5-15.  $d_{\text{min}} = 0.512$  plg
- 5-17. Potencia = 0.0686 hp;  $\tau = 8488$  lb/plg<sup>2</sup>;  
se requiere  $s_y = 67\,900$  lb/plg<sup>2</sup>
- 5-19.  $D_1 = 12.09$  plg;  $D_2 = 15.11$  plg
- 5-21. 1.96 N·m
- 5-23. 0.1509 rad
- 5-25. 0.267 rad
- 5-27. 0.0756 rad
- 5-29. 0.278 rad
- 5-31.  $\theta_{AB} = 0.0636$  rad;  $\theta_{AC} = 0.0976$  rad
- 5-33.  $\tau = 9.06$  MPa;  $\theta = 0.0046$  rad
- 5-35. 49.0 MPa
- 5-37. 1370 lb-plg
- 5-39. 2902 lb-plg
- 5-41. 0.083 rad
- 5-43. 0.112 rad
- 5-45. 0.0667 rad
- 5-47. 1.82 MPa
- 5-49. 0.00363 rad
- 5-51. 0.0042 rad
- 5-53. 82750 lb-plg
- 5-55. 153600 lb-plg
- 5-57.  $\tau_{\text{tubo}} / \tau_{\text{tubo}} = 1.028$   
 $\theta_{\text{tubo}} / \theta_{\text{tubo}} = 1.186$

## Capítulo 6

NOTA: Las respuestas siguientes se refieren a las figuras P6-1 a P6-84. Por lo que se refiere a las reacciones,  $R_1$  es la de la izquierda;  $R_2$  es la de la derecha.  $V$  y  $M$  se refieren a los valores máximos absolutos de la fuerza cortante y el momento flexionante, respectivamente. Las soluciones completas requieren la construcción de los diagramas completos de fuerza cortante y momento flexionante.

- P6-1.  $R_1 = R_2 = 325$  lb  
 $V = 325$  lb  
 $M = 4550$  lb-plg
- P6-3.  $R_1 = 11.43$  K;  $R_2 = 4.57$  K  
 $V = 11.43$  K  
 $M = 45.7$  K-pie
- P6-5.  $R_1 = 575$  N;  $R_2 = 325$  N  
 $V = 575$  N  
 $M = 195$  N·m
- P6-7.  $R_1 = 46.36$  kN;  $R_2 = 23.64$  kN  
 $V = 46.36$  kN  
 $M = 71.54$  kN·m
- P6-9.  $R_1 = 1557$  lb;  $R_2 = 1743$  lb  
 $V = 1557$  lb  
 $M = 6228$  lb-plg
- P6-11.  $R_1 = 7.5$  K;  $R_2 = 37.5$  K  
 $V = 20$  K  
 $M = 60$  K-pie
- P6-13.  $R_1 = R_2 = 250$  N  
 $V = 850$  N  
 $M = 362.5$  N·m
- P6-15.  $R_1 = 37.4$  kN (hacia abajo);  $R_2 = 38.3$  kN (hacia arriba)  
 $V = 24.9$  kN  
 $M = 50$  kN·m
- P6-17.  $R = 120$  lb  
 $V = 120$  lb  
 $M = 960$  lb-plg
- P6-19.  $R = 24$  K  
 $V = 24$  K  
 $M = 168$  K-pie

- P6-21.  $R = 1800 \text{ N}$   
 $V = 1800 \text{ N}$   
 $M = 1020 \text{ N}\cdot\text{m}$
- P6-23.  $R = 120 \text{ kN}$   
 $V = 120 \text{ kN}$   
 $M = 240 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- P6-25.  $R_1 = R_2 = 180 \text{ lb}$   
 $V = 180 \text{ lb}$   
 $M = 810 \text{ lb}\cdot\text{plg}$
- P6-27.  $R_1 = 240 \text{ lb}; R_2 = 120 \text{ lb}$   
 $V = 240 \text{ lb}$   
 $M = 640 \text{ lb}\cdot\text{plg}$
- P6-29.  $R_1 = 99.2 \text{ N}; R_2 = 65.8 \text{ N}$   
 $V = 99.2 \text{ N}$   
 $M = 9.9 \text{ N}\cdot\text{m}$
- P6-31.  $R_1 = 42 \text{ kN}; R_2 = 50 \text{ kN}$   
 $V = 50 \text{ kN}$   
 $M = 152.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- P6-33.  $R_1 = R_2 = 440 \text{ lb}$   
 $V = 240 \text{ lb}$   
 $M = 360 \text{ lb}\cdot\text{plg}$
- P6-35.  $R_1 = 1456 \text{ N}; R_2 = 644 \text{ N}$   
 $V = 956 \text{ N}$   
 $M = 125 \text{ N}\cdot\text{m}$
- P6-37.  $R_1 = 35.3 \text{ N}; R_2 = 92.3 \text{ N}$   
 $V = 52.2 \text{ N}$   
 $M = 4.0 \text{ N}\cdot\text{m}$
- P6-39.  $R = 360 \text{ lb}$   
 $V = 360 \text{ lb}$   
 $M = 1620 \text{ lb}\cdot\text{plg}$
- P6-41.  $R = 600 \text{ N}$   
 $V = 600 \text{ N}$   
 $M = 200 \text{ N}\cdot\text{m}$
- P6-43.  $R_1 = R_2 = 330 \text{ lb}$   
 $V = 330 \text{ lb}$   
 $M = 4200 \text{ lb}\cdot\text{plg}$
- P6-45.  $R_1 = 36.6 \text{ K}; R_2 = 30.4 \text{ K}$   
 $V = 36.6 \text{ K}$   
 $M = 183.2 \text{ K}\cdot\text{pie}$
- P6-47.  $R_1 = R_2 = 450 \text{ N}$   
 $V = 450 \text{ N}$   
 $M = 172.5 \text{ N}\cdot\text{m}$
- P6-49.  $R_1 = 180 \text{ kN}; R_2 = 190 \text{ kN}$   
 $V = 190 \text{ kN}$   
 $M = 630 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- P6-51.  $R_1 = 636 \text{ lb}; R_2 = 1344 \text{ lb}$   
 $V = 804 \text{ lb}$   
 $M = 2528 \text{ lb}\cdot\text{plg}$
- P6-53.  $R_1 = 4950 \text{ N}; R_2 = 3100 \text{ N}$   
 $V = 2950 \text{ N}$   
 $M = 3350 \text{ N}\cdot\text{m}$
- P6-55.  $R = 236 \text{ lb}$   
 $V = 236 \text{ lb}$   
 $M = 1504 \text{ lb}\cdot\text{plg}$
- P6-57.  $R = 1130 \text{ N}$   
 $V = 1130 \text{ N}$   
 $M = 709 \text{ N}\cdot\text{m}$
- P6-59.  $R = 230 \text{ kN}$   
 $V = 230 \text{ kN}$   
 $M = 430 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- P6-61.  $R = 1400 \text{ lb}$   
 $V = 1500 \text{ lb}$   
 $M = 99\,000 \text{ lb}\cdot\text{plg}$
- P6-63.  $R = 1250 \text{ N}$   
 $V = 1250 \text{ N}$   
 $M = 1450 \text{ N}\cdot\text{m}$
- P6-65.  $R_1 = 1333 \text{ lb}; R_2 = 2667 \text{ lb}$   
 $V = 2667 \text{ lb}$   
 $M = 5132 \text{ lb}\cdot\text{ft}$
- P6-67.  $R_1 = R_2 = 75 \text{ N}$   
 $V = 75 \text{ N}$   
 $M = 15 \text{ N}\cdot\text{m}$
- P6-69.  $R_1 = 8.60 \text{ kN}; R_2 = 12.2 \text{ kN}$   
 $V = 12.2 \text{ kN}$   
 $M = 9.30 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- P6-71.  $R_1 = R_2 = 5400 \text{ lb}$   
 $V = 5400 \text{ lb}$   
 $M = 19\,800 \text{ lb}\cdot\text{ft}$
- P6-73.  $R = 10.08 \text{ kN}$   
 $V = 10.08 \text{ kN}$   
 $M = 8.064 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- P6-75.  $R = 7875 \text{ lb}$   
 $V = 7875 \text{ lb}$   
 $M = 21\,063 \text{ lb}\cdot\text{ft}$
- Para los problemas P6-77 a P6-83, los resultados se dan sólo para la sección principal horizontal.
- P6-77.  $R_1 = R_2 = 282 \text{ N}$   
 $V = 282 \text{ N}$   
 $M = 120 \text{ N}\cdot\text{m}$
- P6-79.  $R_1 = R_2 = 162 \text{ N}$   
 $V = 162 \text{ N}$   
 $M = 42.2 \text{ N}\cdot\text{m}$
- P6-81.  $R_1 = 165.4 \text{ N}; R_2 = 18.4 \text{ N}$   
 $V = 165.4 \text{ N}$   
 $M = 16.54 \text{ N}\cdot\text{m}$

$$P-83. R_1 = 4.35 \text{ N}; R_2 = 131.35 \text{ N}$$

$$V = 127 \text{ N}$$

$$M = 6.35 \text{ N}\cdot\text{m}$$

## Capítulo 7

NOTA: Las respuestas siguientes se refieren a las figuras P7-1 a P7-39. El primer número es la distancia de la base de la sección al centroide a menos que se indique de otra manera. El segundo número es el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal.

- P7-1. 0.663 plg; 0.3156 plg<sup>4</sup>  
 P7-3. 4.00 plg; 184 plg<sup>4</sup>  
 P7-5. 35.0 mm;  $2.66 \times 10^5 \text{ mm}^4$   
 P7-7. 20.0 mm;  $7.29 \times 10^4 \text{ mm}^4$   
 P7-9. 20.0 mm;  $1.35 \times 10^5 \text{ mm}^4$   
 P7-11. 21.81 mm;  $1.86 \times 10^5 \text{ mm}^4$   
 P7-13. 23.33 mm;  $1.41 \times 10^5 \text{ mm}^4$   
 P7-15. 1.068 plg; 0.3572 plg<sup>4</sup>  
 P7-17. 125 mm;  $6.73 \times 10^7 \text{ mm}^4$   
 P7-19. 0.9305 plg; 1.2506 plg<sup>4</sup>  
 P7-21. 4.25 plg; 151.4 plg<sup>4</sup>  
 P7-23. 2.25 plg; 107.2 plg<sup>4</sup>  
 P7-25. 7.33 plg; 1155 plg<sup>4</sup>  
 P7-27. 7.40 plg; 423.5 plg<sup>4</sup>  
 P7-29. 3.50 plg; 88.94 plg<sup>4</sup>  
 P7-31. 3.00 plg a partir del centro de cualquiera de los tubos; 22.91 plg<sup>4</sup>  
 P7-33. 2.723 plg; 46.64 plg<sup>4</sup>  
 P7-35. 2.612 plg; 58.17 plg<sup>4</sup>  
 P7-37. 3.50 plg; 17.89 plg<sup>4</sup>  
 P7-39. 3.355 plg; 45.07 plg<sup>4</sup>

## Capítulo 8

- 8-1. 94.4 MPa  
 8-3. (a) 20 620 lb/plg<sup>2</sup>  
 (b) 41 240 lb/plg<sup>2</sup>  
 8-5. 21 050 lb/plg<sup>2</sup>  
 8-7.  $\sigma_x = 6882 \text{ lb/plg}^2$   
 $\sigma_y = 12 970 \text{ lb/plg}^2$   
 8-9. 5794 lb/plg<sup>2</sup> (39.9 MPa)  
 8-11. 13 963 lb/plg<sup>2</sup>  
 8-13. Se requiere  $S = 2636 \text{ mm}^3$ , para  $h/b = 3.0$ ;  
 $b = 12.1 \text{ mm}$ ;  $h = 36.3 \text{ mm}$   
 Dimensiones convenientes tomadas del apéndice A-2:  
 $b = 12 \text{ mm}$ ;  $h = 40 \text{ mm}$ ;  $S = 3200 \text{ mm}^3$

$$A = 480 \text{ mm}^2; h/b = 3.33$$

$$b = 14 \text{ mm}; h = 35 \text{ mm}; S = 2858 \text{ mm}^3;$$

$$A = 490 \text{ mm}^2; h/b = 2.5$$

- 8-15. Se requiere  $s_x = 290 \text{ MPa}$ ;  
 material posible - 6061-T6
- 8-17. Se requiere  $S = 88.2 \text{ plg}^3$ ; viga de acero W20  $\times$  66
- 8-19. Se requiere  $s_x = 10.6 \text{ ksi}$ ; OK para 6061-T4
- 8-21. Se requiere  $s_x = 284 \text{ MPa}$ ; OK para 2014-T4
- 8-23. Se requiere  $S = 1.35 \text{ plg}^3$ ; tubo de acero cédula 40 de 3 plg
- 8-24. Se requiere  $S = 6.89 \text{ plg}^3$ ; tubo de acero 6  $\times$  4  $\times$  1/4 u 8  $\times$  2  $\times$  1/4
- 8-25. Se requiere  $S = 6.72 \text{ plg}^3$ ; viga de aluminio 61  $\times$  4.030
- 8-26. Se requiere  $S = 7.47 \text{ plg}^3$ ; viga de acero W8  $\times$  10
- 8-27. Se requiere  $S = 7.47 \text{ plg}^3$ ; ningún canal adecuado
- 8-28. Se requiere  $S = 7.47 \text{ plg}^3$ ; tubo de acero cédula 40 de 6 plg
- 8-31. Se requiere  $S = 9.76 \text{ plg}^3$ ; viga de acero W10  $\times$  12
- 8-33. Se requiere  $S = 23.1 \text{ plg}^3$ ; viga de acero W14  $\times$  26
- 8-35. Se requiere  $S = 16.1 \text{ plg}^3$ ; viga de acero W12  $\times$  16
- 8-37. Se requiere  $S = 63.3 \text{ plg}^3$ ; viga de acero W18  $\times$  40
- 8-39. Se requiere  $S = 20.2 \text{ plg}^3$ ; viga de acero W14  $\times$  26
- 8-41. Se requiere  $S = 0.540 \text{ plg}^3$ ; viga de acero W8  $\times$  10
- 8-43. Se requiere  $S = 23.1 \text{ plg}^3$ ; viga de acero S10  $\times$  25.4
- 8-45. Se requiere  $S = 16.1 \text{ plg}^3$ ; viga de acero S8  $\times$  23
- 8-47. Se requiere  $S = 63.3 \text{ plg}^3$ ; viga de acero S15  $\times$  50
- 8-49. Se requiere  $S = 20.2 \text{ plg}^3$ ; viga de acero S10  $\times$  25.4
- 8-51. Se requiere  $S = 0.540 \text{ plg}^3$ ; viga de acero S3  $\times$  5.7
- 8-53. Se requiere  $S = 13.85 \text{ plg}^3$ ; viga de acero W12  $\times$  16
- 8-55. Se requiere  $S = 9.66 \text{ plg}^3$ ; viga de acero W10  $\times$  12
- 8-57. Se requiere  $S = 38.0 \text{ plg}^3$ ; viga de acero W12  $\times$  30
- 8-59. Se requiere  $S = 12.12 \text{ plg}^3$ ; viga de acero W10  $\times$  15
- 8-61. Se requiere  $S = 0.32 \text{ plg}^3$ ; viga de acero W8  $\times$  10
- 8-63. Se requiere  $S = 18.8 \text{ plg}^3$ ; viga de madera de 2  $\times$  10
- 8-65. Viga de madera de 2  $\times$  8
- 8-68. Se requiere  $S = 11.1 \text{ plg}^3$ ; viga de madera de 2  $\times$  8
- 8-69. Se requiere  $S = 25.0 \text{ plg}^3$ ; viga de madera de 2  $\times$  12
- 8-70. Se requiere  $S = 2.79 \text{ plg}^3$ ; viga de madera de 2  $\times$  4
- 8-71. Se requiere  $S = 12.5 \text{ plg}^3$ ; viga de madera de 2  $\times$  8
- 8-75. Viga de madera de 10  $\times$  12; pino del sur no. 2  
 Viga de acero W10  $\times$  12; acero ASTM A36

- 8-77.  $\sigma_c = 4.3 \text{ MPa}$   
 En A:  $\sigma = 3.81 \text{ MPa}$ ; OK  
 En B:  $\sigma = 5.16 \text{ MPa}$ ; inseguro  
 En C:  $\sigma = 4.62 \text{ MPa}$ ; inseguro
- 8-79.  $5.31 \text{ N/mm}$
- 8-81.  $1180 \text{ N}$
- 8-83.  $1045 \text{ lb}$
- 8-85.  $102 \text{ lb}$
- 8-87.  $6.77 \text{ lb/plg}$
- 8-89.  $3.20 \text{ pies del muro a la junta}$   
 el tubo de  $4 \text{ plg}$  es seguro en el muro
- 8-91.  $398 \text{ MPa en C}$
- 8-93. En el fulcro,  $\sigma = 8000 \text{ lb/plg}^2$   
 En el agujero inferior,  $\sigma = 5067 \text{ lb/plg}^2$   
 En el agujero siguiente,  $\sigma = 3800 \text{ lb/plg}^2$   
 En el agujero siguiente,  $\sigma = 2534 \text{ lb/plg}^2$   
 En el agujero siguiente,  $\sigma = 1267 \text{ lb/plg}^2$
- 8-94. En el fulcro,  $\sigma = 8000 \text{ lb/plg}^2$   
 En el agujero inferior,  $\sigma = 10\,000 \text{ lb/plg}^2$   
 En el agujero siguiente,  $\sigma = 7506 \text{ lb/plg}^2$   
 En el agujero siguiente,  $\sigma = 5004 \text{ lb/plg}^2$   
 En el agujero siguiente,  $\sigma = 2500 \text{ lb/plg}^2$
- 8-95. (a) Con pivote en el agujero extremo como se muestra:  
 En el fulcro,  $\sigma = 8000 \text{ lb/plg}^2$   
 En el agujero inferior,  $\sigma = 8064 \text{ lb/plg}^2$   
 Con el pivote en cualquier otro agujero, el esfuerzo  
 máximo ocurre en el fulcro. Con el pivote en:  
 Agujero 2:  $\sigma = 6800 \text{ lb/plg}^2$   
 Agujero 3:  $\sigma = 5600 \text{ lb/plg}^2$   
 Agujero 4:  $\sigma = 4400 \text{ lb/plg}^2$   
 Agujero 5:  $\sigma = 3200 \text{ lb/plg}^2$
- 8-97.  $109 \text{ MPa}$
- 8-98.  $149 \text{ MPa}$
- 8-99. Se requiere  $s_u = 1195 \text{ MPa}$   
 AISI 4140 OQT 900 (otros posibles)
- 8-100.  $2513 \text{ N}$
- 8-101.  $1622 \text{ N}$
- 8-103. Imposible
- 8-105. Sí.  $d_{\text{máx}} = 37.2 \text{ mm}$
- 8-106.  $118 \text{ MPa}$  en el primer escalón ( $L_1$ )
- 8-107. Se requiere  $s_u = 946 \text{ MPa}$   
 AISI 1141 OQT 900 (otros posibles)
- 8-109.  $L_{1\text{máx}} = 206 \text{ mm}$   
 $L_{2\text{máx}} = 83.4 \text{ mm}$   
 $L_{3\text{máx}} = 24.7 \text{ mm}$
- 8-111.  $x \text{ (mm)}$        $\sigma \text{ (MPa)}$   
 0                      0  
 40                    52.1  
 80                    76.5  
 120                   87.9  
 160                   92.6  
 200                   93.8  
 240                   112.5
- 8-113.  $h_1 = 22 \text{ mm}$ ;  $h_2 = 22 \text{ mm}$
- 8-115. Se requiere  $S = 22.73 \text{ plg}^2$   
 $W14 \times 26$
- 8-117. Para viga compuesta:  $w = 4.18 \text{ k/pie}$   
 Para viga S sola:  $w = 3.58 \text{ k/pie}$
- 8-118.  $11.5 \text{ mm}$
- 8-120.  $0.805 \text{ in}$
- 8-122.  $25.5 \text{ mm}$
- 8-124.  $46 \text{ mm del centro}$
- 8-126.  $e = 12.9 \text{ mm}$
- 8-127.  $4.94 \text{ lb/in}$
- 8-129.  $822 \text{ N}$
- 8-131.  $625 \text{ N}$
- 8-133.  $21.0 \text{ kN}$
- 8-134.  $6.94 \text{ kN/m}$
- 8-135.  $9.69 \text{ kN/m}$
- 8-136.  $48.0 \text{ kN}$
- 8-137.  $126 \text{ kN}$

## Capítulo 9

- 9-1.  $1.125 \text{ MPa}$
- 9-3.  $1724 \text{ psi}$
- 9-5.  $3.05 \text{ MPa}$
- 9-7.  $3180 \text{ psi}$
- 9-9.  $1661 \text{ psi}$
- 9-11.  $69.3 \text{ psi}$
- 9-13.  $7.46 \text{ MPa}$
- 9-15.  $2.79 \text{ MPa}$
- 9-17.  $10.3 \text{ MPa}$
- 9-19.  $2342 \text{ psi}$
- 9-21.  $245 \text{ lb}$
- 9-23.  $788 \text{ lb}$
- 9-25.  $5098 \text{ lb}$
- 9-27.  $661 \text{ lb}$
- 9-29.  $787 \text{ lb}$

4-31. Sea  $y$  = distancia a partir de la base del perfil I:

$y$ (in)	$\tau$ (psi)
0.0	0.0
0.5	5.65
1.0(-)	10.54
1.0(+)	63.25
1.5	67.39
2.0	70.78
2.5	73.42
3.0	75.30
3.5	76.43
4.0	76.81

4-33. 8698 psi

4-35. Con la fórmula para cortante en el alma

$$\tau = 8041 \text{ psi}$$

Aproximadamente 8% más bajo comparado con  $\tau_{\max}$  del problema 9-33

4-37. Sea  $y$  = distancia a partir de la base del perfil I:

$y$ (in)	$\tau$ (psi)
0.0	0
0.175	155
0.35(-)	303
0.35(+)	6582
1.0	7073
2.0	7638
3.0	7976
4.0	8089

9-39.  $\tau = 4352 \text{ lb/plg}^2$ ;

$\tau_d = 14\,400 \text{ lb/plg}^2$ ; OK

$\sigma = 26\,100 \text{ lb/plg}^2$ ;

$\sigma_d = 23\,760 \text{ lb/plg}^2$ ; inseguro

9-41.  $W18 \times 55$ ;  $\tau = 6300 \text{ lb/plg}^2$ ;

$\tau_d = 14\,400 \text{ lb/plg}^2$ ; OK

9-43. Tubo cédula 40 de 1 1/4 plg

$\tau = 2404 \text{ lb/plg}^2$ ;

$\tau_d = 8000 \text{ lb/plg}^2$ ; OK

9-45. Viga de  $4 \times 10$

9-47. 1256 lb

9-49. 116.3 MPa

9-51. (a)  $\tau = 1125 \text{ lb/plg}^2$ ;

(b)  $\sigma = 6750 \text{ lb/plg}^2$ ;

(c)  $s_y = 20\,250 \text{ lb/plg}^2$ ; cualquier acero

9-53. 35.4 mm;  $\tau = 1.59 \text{ MPa}$ ;

$N = 86.7$  para cortante

9-55. 24.5 mm;  $\tau = 1.28 \text{ MPa}$ ;

$\sigma_d = 120 \text{ MPa}$

9-57. Se requiere  $S = 0.45 \text{ plg}^3$ ; tubo cédula 40 de 2 plg

9-59.  $q = 736 \text{ lb/plg}$ ;  $\tau = 526 \text{ lb/plg}^2$

9-61. 431 lb/plg basada en la resistencia de los remaches

9-63. 1722 lb basada en flexión

9-65. Separación máxima = 4.36 plg

9-67. Separación máxima = 3.03 plg

## Capítulo 10

NOTA: Las soluciones completas de los problemas 10-1 a 10-27 requieren la construcción del círculo de Mohr completo y el estado del elemento sometido a esfuerzo principal y del elemento sometido a esfuerzo cortante máximo. A continuación se dan los resultados numéricos significativos. (sh = sentido horario, sah = sentido antihorario)

Probl. Núm.	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\phi$ (grados)	$\tau_{\max}$	$\sigma_{\text{prom}}$	$\phi$ (grados)
1	315.4 MPa	-115.4 MPa	10.9 sh	215.4 MPa	100.0 MPa	34.1 sah
3	110.0 MPa	-40.0 MPa	26.6 sh	75.0 MPa	35.0 MPa	18.4 sah
5	23.5 ksi	-8.5 ksi	19.3 sah	16.0 ksi	7.5 ksi	64.3 sah
7	79.7 ksi	-9.7 ksi	31.7 sah	44.7 ksi	35.0 ksi	76.7 sah
9	677.6 kPa	-977.6 kPa	77.5 sah	827.6 kPa	-150.0 kPa	57.5 sh
11	327.0 kPa	-1202.0 kPa	60.9 sah	764.5 kPa	-437.5 kPa	74.1 sh
13	570.0 lb/plg <sup>2</sup>	-2070.0 lb/plg <sup>2</sup>	71.3 sh	1320.0 lb/plg <sup>2</sup>	-750.0 lb/plg <sup>2</sup>	26.3 sh
15	4180.0 lb/plg <sup>2</sup>	-5180.0 lb/plg <sup>2</sup>	71.6 sh	4680.0 lb/plg <sup>2</sup>	-500.0 lb/plg <sup>2</sup>	26.6 sh
17	360.2 MPa	-100.2 MPa	27.8 sah	230.2 MPa	130.0 MPa	72.8 sah
19	23.9 ksi	-1.9 ksi	15.9 sh	12.9 ksi	11.0 ksi	29.1 sah
21	4.4 ksi	-32.4 ksi	20.3 sh	18.4 ksi	-14.0 ksi	24.7 sah
23	321.0 MPa	-61.0 MPa	66.4 sah	191.0 MPa	130.0 MPa	68.6 sh
25	225.0 MPa	-85.0 MPa	0.0	155.0 MPa	70.0 MPa	45.0 sah
27	775.0 kPa	-145.0 kPa	0.0	460.0 kPa	315.0 kPa	45.0 sah



En los problemas 10-29 a 10-39, el círculo de Mohr trazado con los datos dados da como resultado que los dos esfuerzos principales tengan el mismo signo. En esta clase se problemas, se dibuja el círculo suplementario siguiendo los procedimientos descritos en la sección 10-11 del texto. Los resultados incluyen tres esfuerzos principales donde  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Además, el esfuerzo cortante máximo se calcula con el radio del círculo que contiene  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ , y es igual a  $1/2\sigma_1$  o  $1/2\sigma_3$ , cualquiera que sea mayor. No se piden los ángulos de rotación de los elementos resultantes.

Prob. núm.	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\tau_{\max}$
29	328.1 MPa	71.9 MPa	0.0 MPa	164.0 MPa
31	214.5 MPa	75.5 MPa	0.0 MPa	107.2 MPa
33	35.0 ksi	10.0 ksi	0.0 ksi	17.5 ksi
35	55.6 ksi	14.4 ksi	0.0 ksi	27.8 ksi
37	0.0 kPa	-307.9 kPa	-867.1 kPa	433.5 kPa
39	0.0 lb/plg <sup>2</sup>	-295.7 lb/plg <sup>2</sup>	-1804.3 lb/plg <sup>2</sup>	902.1 lb/plg <sup>2</sup>

En los problemas 10-41 a 10-49, se usan los círculos de Mohr de problemas precedentes para determinar la condición de esfuerzo en el elemento a un ángulo de rotación especificado. Los resultados enumerados incluyen los dos esfuerzos normales y el esfuerzo cortante en el elemento especificado.

Prob. núm.	$\sigma_A$	$\sigma_B$	$\tau_A$
41	130.7 MPa	69.3 MPa	213.2 MPa sh
43	-37.9 MPa	197.9 MPa	31.6 MPa sh
45	3.6 ksi	-21.6 ksi	43.9 ksi sh
47	-2010.3 lb/plg <sup>2</sup>	510.3 lb/plg <sup>2</sup>	392.6 psi sh
49	8363.5 lb/plg <sup>2</sup>	86.5 lb/plg <sup>2</sup>	1421.2 psi sh

10-51.  $\tau_{\max} = 230.2$  MPa

10-53.  $\tau_{\max} = 12.9$  ksi

## Capítulo 11

11-1. -10 510 lb/plg<sup>2</sup>

11-3.  $\sigma_N = 9480$  lb/plg<sup>2</sup>;  
 $\sigma_M = -7530$  lb/plg<sup>2</sup>

11-5.  $\sigma_N = 13980$  lb/plg<sup>2</sup>;  
 $\sigma_M = -15931$  lb/plg<sup>2</sup>

11-7. -64.3 MPa

11-9. 415 N

11-11.  $\sigma = 724$  MPa;  
se requiere  $s_y = 1448$  MPa;  
AISI 4140 OQT 700

11-13. En B:  $\sigma = 24183$  lb/plg<sup>2</sup> tensión en la cara superior de la viga  
 $\sigma = -18674$  lb/plg<sup>2</sup> compresión en la cara inferior de la viga

11-15. Carga = 9650 N;  
Masa = 983 kg

11-17. 26 mm

11-19. 18.7 mm

11-21. 71.6 MPa

11-23. 2548 psi

11-25. 7189 psi

11-27. 51.6 MPa

11-29. 982 MPa

11-31.  $\tau = 9923$  psi,  $s_y = 119$  ksi

11-33. 51.5 MPa

11-35. 7548 lb/plg<sup>2</sup>

11-37. 7149 lb/plg<sup>2</sup>

11-39. 61.5 MPa

11-41. (a) 3438 psi

(b) 3438 psi

(c) 344 psi

(d) 2300 psi

(e) 1186 psi

11-43.	A la mitad de la viga	Cerca de los apoyos	A 15 plg de A
(a)	1875 psi	0 psi	1406 psi
(b)	1875 psi	0 psi	1406 psi
(c)	0 psi	375 psi	188 psi
(d)	1250 psi	208 psi	943 psi
(e)	625 psi	333 psi	498 psi

Respuestas a problemas seleccionados

## Capítulo 12

- 12-1.  $-2.01$  mm  
 12-3.  $-0.503$  mm  
 12-5.  $-5.40$  mm  
 12-7. En las cargas:  $-0.251$  plg  
 En el centro:  $-0.385$  plg  
 12-9.  $-0.424$  plg  
 12-11.  $-0.271$  plg  
 12-13.  $+0.093$  plg de deflexión en  $x = 69.2$  plg  
 12-15.  $D = 64.8$  mm  
 12-17.  $t = 0.020$  plg  
 12-19.  $y_A = -1.291$  mm en la carga de 840 N  
 $y_C = -3.055$  mm en la carga de 600 N  
 $y_D = -1.353$  mm en la carga de 1200 N  
 12-22.  $y_B = -0.0140$  en la carga de 85 lb  
 $y_C = -0.0262$  en la carga de 75 lb aplicada en el extremo  
 12-23.  $-0.869$  mm  
 12-25.  $-3.997$  mm  
 12-26.  $-0.0498$  plg  
 12-29.  $y = -0.0078$  plg en  $x = 8.56$  plg  
 12-31.  $y = -3.79$  mm  
 12-33.  $D = 69.2$  mm  
 12-35. Viga de aluminio  $17 \times 5.800$   
 $y = -5.37$  mm en  $x = 1.01$  m  
 12-37.  $D = 109$  mm  
 12-39.  $-0.0078$  plg  
 12-41.  $-3.79$  mm  
 12-43.  $-3.445$  mm  
 12-45.  $-5.13$  mm  
 12-47.  $-0.01138$  plg  
 12-49.  $-0.257$  plg  
 12-51.  $-71.7$  mm

## Capítulo 13

Para los problemas 13-1 a 13-27, se reportan los valores siguientes:

- Reacciones en todos los apoyos
- Fuerzas cortantes en puntos críticos
- Momentos flexionantes en puntos críticos
- Deflexión máxima o deflexión en puntos seleccionados expresada como,  $y = C_d/EI$

Cuando especifique el material, el perfil y las dimensiones de la viga, puede calcular su rigidez,  $EI$ , y usarla para calcular la

Respuestas a problemas seleccionados

deflexión. Las deflexiones estarán en la unidad de longitud dada cuanto  $E$  e  $I$  están en las mismas unidades de fuerza y longitud dadas en las respuestas. Por ejemplo, en el problema 13-1, la longitud está en m, la fuerza en N. Por tanto la deflexión está en m cuando  $E$  está en  $N/m^2$  (Pa) e  $I$  está en  $m^4$ .

- 13-1.  $R_A = V_A = 24\,063$  N,  $R_C = -V_C = 10\,938$  N  
 $M_A = -26\,250$  N·m,  $M_B = 21\,875$  N·m,  
 $M_C = 0$  N·m  
 $y_{\max} = (-20\,934)/EI$  a  $1.79$  m de C.
- 13-3.  $R_A = V_A = 18\,760$  N,  $R_C = -V_C = 16\,235$  N  
 $M_A = -22\,560$  N·m,  $M_B = 24\,353$  N·m,  
 $M_C = 0$  N·m  
 $y_B = (-21\,629)/EI$  en la carga
- 13-5.  $R_A = V_A = 500$  lb,  $R_B = -V_B = 300$  lb  
 $M_A = -1\,600$  lb·plg,  $M_E(\text{máx}) = 900$  lb·plg en  
 $x = 10.0$  plg,  $M_B = 0$  lb·plg  
 $y_{\max} = (-17\,712)/EI$  en  $x = 9.264$  plg
- 13-7.  $R_A = V_A = 17\,500$  N,  $R_C = -V_C = 17\,500$  N  
 $M_A = -17\,500$  N·m,  $M_B = 17\,500$  N·m,  
 $M_C = -17\,500$  N·m  
 $y_{\max} = (-10\,127)/EI$  en B en el centro
- 13-9.  $R_A = V_A = 11\,074$  N,  $R_C = -V_C = 23\,926$  N  
 $M_A = -12\,305$  N·m,  $M_B = 15\,381$  N·m,  
 $M_C = -20\,508$  N·m  
 $y_{\max} = (-10\,127)/EI$  en B en el centro
- 13-11.  $R_A = V_A = 400$  lb,  $R_B = -V_B = 400$  lb  
 $M_A = -1\,067$  lb·plg,  $M_B = 533$  lb·plg,  
 $M_C = -1\,067$  lb·plg  
 $y_{\max} = (-8533)/EI$  en el centro
- 13-13.  $R_A = V_A = 150$  lb,  $R_B = 500$  lb,  
 $R_C = -V_C = 150$  lb  
 $M_A = 0$  lb·plg,  $M_B = -400$  lb·plg,  $M_C = 0$  lb·plg  
 $M_D = M_E = 225$  lb·plg en  $x = 3.00$  plg a partir de A y C  
 $y_{\max} = (-1\,107)/EI$  en  $x = 3.372$  plg a partir de A o C
- 13-15.  $R_A = R_D = 106.7$  lb,  $R_B = R_C = 293.3$  lb  
 $V_A = -V_D = 106.7$  lb,  $-V_B = V_C = 160$  lb  
 $M_A = M_D = 0$  lb·plg,  $M_B = M_C = -142.2$  lb·plg  
 $M_G = 35.6$  lb·plg  
 $M_E = M_F = 113.8$  lb·plg en  $x = 2.13$  plg a partir de A y D
- 13-17.  $R_A = R_E = 78.6$  lb,  $R_B = R_D = 228.6$  lb,  
 $R_C = 185.6$  lb  
 $V_A = -V_E = 78.6$  lb,  $-V_B = V_D = 121.4$  lb,  
 $V_C = 92.8$  lb  
 $M_A = M_E = 0$  lb·plg,  $M_B = M_D = -85.7$  lb·plg,  
 $M_C = -57.1$  lb·plg  
 $M_F = M_I = 61.8$  lb·plg en  $x = 1.56$  plg a partir de A y E  
 $M_G = M_H = 29.1$  lb·plg en  $x = 2.16$  plg a partir de B y D

$$13-19. R_A = V_A = 22\,500 \text{ N}, R_B = V_B = 13\,500 \text{ N}$$

$$M_A = -8100 \text{ N}\cdot\text{m}, M_E = 4556 \text{ N}\cdot\text{m a } 0.675 \text{ plg de } B$$

$$y_{\max} = -1135/EI \text{ a } 1.042 \text{ de } A$$

$$13-21. R_A = V_A = -13\,750 \text{ N}, R_B = 31\,750 \text{ N}$$

$$V_B = -18\,000 \text{ N}$$

$$M_A = 12\,600 \text{ N}\cdot\text{m}, M_B = -25\,200 \text{ N}\cdot\text{m}, M_C = 0$$

$$Y_C = -40\,719/EI \text{ en el extremo derecho del segmento saliente}$$

$$13-23. R_A = R_C = V_A = -V_C = 25\,200 \text{ lb}, R_B = 8400 \text{ lb}$$

$$V_B = 42\,000 \text{ lb}$$

$$M_A = M_C = 0, M_B = -134\,400 \text{ lb}\cdot\text{pie}$$

$$M_D = M_E = 75\,587 \text{ lb}\cdot\text{pie en } x = 6.0 \text{ pies a partir de } A \text{ o } C$$

$$y_{\max} = (-1.488 \times 10^6 \text{ lb}\cdot\text{pie}^3)/EI \text{ a } 6.74 \text{ pies de } A \text{ o } C$$

$$13-25. R_A = R_E = V_A = -V_E = 212 \text{ lb},$$

$$R_B = R_D = 617 \text{ lb}, R_C = 501 \text{ lb}$$

$$V_B = V_D = 328 \text{ lb}, V_C = 251 \text{ lb}$$

$$M_A = M_E = 0, M_C = -1388 \text{ lb}\cdot\text{plg}$$

$$M_B = M_D = -2082 \text{ lb}\cdot\text{plg}$$

$$M_F = M_G = 1501 \text{ lb}\cdot\text{plg a } 14.04 \text{ plg de } A \text{ o } E$$

$$M_C = M_H = 708 \text{ lb}\cdot\text{plg a } 19.44 \text{ plg de } B \text{ o } D$$

$$13-27. R_A = V_A = 224.6 \text{ N}, R_C = -V_C = 25.4 \text{ N}$$

$$M_A = -2.355 \text{ N}\cdot\text{m}, M_B = 1.014 \text{ N}\cdot\text{m}, M_C = 0$$

$$y_B = (-1.386 \times 10^{-4})/EI \text{ en la carga}$$

13-29. Comparación de los resultados de cinco problemas:

	$V_{\max}$	$V/V_1$	$M_{\max}$	$M/M_1$	$y_{\max}$	$y/y_1$
1. 13-5	500 lb	1.0	900 lb-plg	1.0	-17712/EI	1.0
2. 13-11	400 lb	0.80	-1067 lb-plg	1.19	-8533/EI	0.482
3. 13-13	500 lb	1.0	-400 lb-plg	0.444	-1107/EI	0.0625
4. 13-15	160 lb	0.320	-142 lb-plg	0.158	—	—
5. 13-17	121 lb	0.243	-85.7 lb-plg	0.0952	—	—

13-33. Comparación de los resultados de tres problemas:

	$V_{\max}$	$V/V_1$	$M_{\max}$	$M/M_1$	$y_{\max}$	$y/y_1$	A	$A/A_1$
1. 13-30	1440 lb	1.0	103 680 lb-plg	1.0	$-896 \times 10^6/EI$	1.0	63.3 in <sup>2</sup>	1.0
2. 13-31	900 lb	0.625	25 920 lb-plg	0.25	$-372 \times 10^6/EI$	0.415	25.4 in <sup>2</sup>	0.401
3. 13-33	576 lb	0.40	9 216 lb-plg	0.089	—	—	10.87 in <sup>2</sup>	0.172

13-35. Comparación de los dos diseños mostrados en la figura 13-4:

(a)  $V = 2250 \text{ N}, M = -4500 \text{ N}\cdot\text{m},$

$$y = -22\,500/EI$$

(b)  $V = 3375 \text{ N}, M = -4500 \text{ N}\cdot\text{m},$

$$y = -20\,250/EI = 0.90 y_a$$

Escasa diferencia en el comportamiento de los dos diseños.

13-37.  $R_A = V_A = 32.75 \text{ kN}, R_B = -V_B = 19.65 \text{ kN}$   
 $M_A = -42.9 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_E = 24.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$

13-39. Comparación de cuatro diseños de vigas para soportar una carga uniformemente distribuida:

	$V_{\max}$	$V/V_1$	$M_{\max}$	$M/M_1$	$y_{\max}$	$y/y_1$
(a)	3600 N	1.0	3600 N-m	1.0	-6000/EI	1.0
(b)	7200 N	2.0	-14 400 N-m	4.0	-57 600/EI	9.6
(c)	4500 N	1.25	-3600 N-m	1.0	-2490/EI	0.415
(d)	3600 N	1.0	-2400 N-m	0.67	-1200/EI	0.20

13-41.  $R_A = V_A = 22\,500 \text{ N}, R_B = V_B = 13\,500 \text{ N}$   
 $M_A = -8100 \text{ N}\cdot\text{m}, M_E = 4556 \text{ N}\cdot\text{m a } 0.675 \text{ plg de } B$   
 $y_{\max} = -1135/EI \text{ a } 1.042 \text{ plg de } A$

- 13-43.  $R_A = R_E = 371$  lb en los extremos de la viga  
 $R_C = 858$  lb en el apoyo intermedio  
 $V_{\max} = 429$  lb de B a D entre las dos cargas de 800 lb  
 $M_{\max} = 1113$  lb-pie bajo cada una de las cargas
- 13-45.  $R_A = 56.5$  kN,  $R_C = 135$  kN en el apoyo intermedio  
 $R_D = 16.5$  kN en el extremo derecho  
 $V_{\max} = -87.5$  kN en C  
 $M_{\max} = 32.4$  kN·m en la carga de 80 kN
- 13-47.  $R_A = 4009$  lb en el extremo fijo  
 $R_D = 1991$  lb en el apoyo derecho  
 $V_{\max} = 4009$  lb en A  
 $M_{\max} = -8490$  lb-pie en A
- 13-49.  $R_A = R_E = 371$  lb en los extremos de la viga  
 $R_C = 858$  lb en el apoyo intermedio  
 $V_{\max} = 429$  lb de B a D entre las dos cargas de 800 lb  
 $M_{\max} = 1113$  lb-pie bajo cada una de las cargas
- 13-51.  $R_A = 56.5$  kN,  $R_C = 135$  kN en el apoyo intermedio  
 $R_D = 16.5$  kN en el extremo derecho  
 $V_{\max} = -87.5$  kN en C  
 $M_{\max} = 32.4$  kN·m en la carga de 80 kN
- 13-53.  $R_A = 8.90$  kN,  $R_C = 34.1$  kN en el apoyo intermedio  
 $R_D = 6.00$  kN en el extremo derecho  
 $V_{\max} = 18.0$  kN en C  
 $M_{\max} = 8.9$  kN·m en B en la carga de 25 kN
- 13-55.  $R_A = 21.1$  kN,  $R_C = 101.8$  kN en el apoyo intermedio  
 $R_E = 37.1$  kN  
 $V_{\max} = 62.9$  kN en C  
 $M_{\max} = 31.7$  kN·m en B bajo la carga de 60 kN

## Capítulo 14

- 14-1. 25.1 kN  
 14-3. 8.35 kN  
 14-5. 26.2 kN  
 14-7. 111 kN  
 14-9.  $P_c = 7318$  lb/columna; use 9 columnas  
 14-11. 499 kN  
 14-13. 65 300 lb  
 14-15. Fuerza axial = 31.1 kN; carga crítica = 260 kN;  
 $N = 8.37$  OK  
 14-17. 15.1 kN  
 14-19. Carga crítica = 10 914 lb; carga real = 5 000 lb;  
 $N = 2.18$ ; baja  
 14-21. Carga crítica = 2 849 lb; carga real = 1 500 lb;  
 $N = 1.90$ ; baja  
 14-23. 2.68 plg

- 14-25. Se requiere  $I = 5.02$  plg<sup>4</sup>;  $17 \times 5.800$   
 14-27. 5869 lb  
 14-29. 245 kN  
 14-31. Nada de mejora

## Capítulo 15

- 15-1. 115 MPa  
 15-3. 4.70 mm mínimo  
 15-5. 2134 lb/plg<sup>2</sup>  
 15-7. 1.80 mm  
 15-9.  $N = 3.80$
- 15-11.  $\sigma_2 = 212$  MPa;  $\sigma_3 = -70.0$  MPa
- 15-13. 

Radio (mm)	$\sigma_2$ (MPa)
110	166 superficie interna
120	149
130	136
140	125
150	116 superficie externa
- 15-15. 14.88 MPa
- 15-17. 

Radio (mm)	$\sigma_3$ (MPa)
15	-7.00 superficie interna
17	-4.58
19	-2.88
21	-1.64
23	-0.71
25	0.00 superficie externa
- 15-19. 86.8 MPa
- 15-21. 

Radio (mm)	$\sigma_3$ (MPa)
210	-100.0 superficie interna
215	-83.3
220	-68.0
225	-54.1
230	-41.4
235	-29.7
240	-19.0
245	-9.1
250	0.00 superficie externa
- 15-23. 

Radio (mm)	$\sigma_2$ (MPa)
162.5	22.35 superficie interna
170	20.99
177.5	19.84
185	18.88
192.5	18.06
200	17.35 superficie externa

- 15-25. Los tamaños de 1/8 a 4 son para pared gruesa.  
Los tamaños de 5 a 18 son para pared delgada.

### Capítulo 16

- 16-1. (a)  $F_i = 6872$  lb (permisible);  $F_b = 26\,100$  lb;  
 $F_t = 15\,179$  lb  
(c)  $F_i = 7732$  lb (permisible);  $F_b = 19\,595$  lb;  
 $F_t = 17\,204$  lb
- 16-2. (a)  $F_i = 17\,279$  lb (permisible);  $F_b = 84\,000$  lb;  
 $F_t = 43\,110$  lb  
(c)  $F_i = 34\,558$  lb (permisible);  $F_b = 84\,000$  lb;  
 $F_t = 43\,110$  lb
- 16-3. (a)  $F_i = 11\,780$  lb (permisible);  $F_b = 31\,500$  lb;  
 $F_t = 21\,083$  lb  
(c)  $F_i = 13\,253$  lb (permisible);  $F_b = 23\,625$  lb;  
 $F_t = 23\,895$  lb
- 16-4. (a)  $F_i = 17\,279$  lb (permisible);  $F_b = 86\,220$  lb;  
(c)  $F_i = 34\,558$  lb (permisible);  $F_b = 86\,220$  lb;
- 16-5. 1.25 plg
- 16-7. 23 860 lb en las soldaduras

# Índice

## A

- Aceleración debida a la gravedad, 7
- Aceero, 55-60, 597, 599
- aleación, 55-57, 597
- carbono, 55, 597
- carbono y aleación, propiedades, 597
- coeficiente de expansión térmica, 122
- condiciones para, 56
- desgaste, 60
- endurecimiento por precipitación, 59
- esfuerzo de aplastamiento del diseño, 98
- estirado en frío, 56
- estructural, 59-60, 599
- inoxidable, 59, 598
- laminado en caliente, 56
- laminado en frío, 56
- normalización, 58-59
- recocido, 58-59
- recocido de distensión, 58-59
- sistema de designaciones, 55
- templado, 57
- Aceero al carbono, 55
- Aceero endurecido por precipitación, 59
- Aceero inoxidable, 59, 598
- coeficiente de expansión térmica, 122
- Albañilería, diseño de esfuerzos por aplastamiento, 101-102
- Aleación de acero, 55-57, 597
- Aleaciones de aluminio, 62-63, 601
- coeficiente de expansión térmica, 122
- colado, 63, 601
- esfuerzo de aplastamiento de diseño, 100
- series, 62
- sistema de designaciones, 62
- templados, 63
- Aluminum Association (Asociación del Aluminio), 32, 54, 85, 89, 521, 528, 566, 576
- American Gear Manufacturers Association (Asociación Americana de Fabricantes de Engranajes), 85
- American Institute of Steel Construction (Instituto Americano de Construcción del Acero), 85, 89, 521, 526, 565, 575
- American Iron Steel Institute (Instituto Americano del Hierro y el Acero), 54
- American National Standards Institute (Instituto Nacional Americano de Normas), 85
- American Society for Testing and Materials (Sociedad Americana de Pruebas y Materiales), 54

- American Society of Mechanical Engineers (Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos), 85, 555
- Ángulo de torsión, 161-163
- Ángulos, acero estructural, 29, 589
- Anillos de retención, 157
- Áreas, propiedades de, 582
- Articulaciones soldadas, 573-577
- Asientos de chavetas, 156-157
- Austempleado, 61
- B**
- Bronce, 64, 598
- Bronce, coeficiente de expansión térmica, 122
- C**
- Canales, aluminio, 32, 594
- acero estructural, 29, 590
- Canales y vigas I estándar de la Aluminum Association, 32, 590, 591
- Cargas, concentradas, 183-184
- distribuidas, 184-186
- distribuidas, variables, 216-218, 230-233
- Centro de flexión, 301-303
- Centro de fuerza cortante, 301-303
- Centro de gravedad, 245
- Centro de masa, 245
- Centroide de un área, 244-250
- Cilindros, de paredes gruesas, 546-547
- de paredes delgadas, 541-544
- Círculo de Mohr para esfuerzos, 379-403
- ejemplos, 383-392
- procedimiento para dibujarlo, 380-383
- Cobre, 64, 598
- coeficiente de expansión térmica, 122
- Cobre berilico, 64
- Códigos y estándares, 85
- Coeficiente de expansión térmica, 121-123
- Columnas, 513-530
- carga crítica de pandeo, 520-521
- carga permisible, 521
- con carga no centrada, 529
- especificaciones AISC, 526
- especificaciones de la Asociación del Aluminio, 528
- excéntricas, 529
- formas eficientes para, 525
- fórmula de Euler, 520
- fórmula de J.B. Johnson, 521
- método de análisis, 522
- torcidas, 529
- Compuestos, 67-78
- coeficiente de expansión térmica, 123
- construcción laminada, 74
- fracción de volumen, 75
- limitaciones, 73
- materiales de relleno, 68-69
- matrices de materiales, 68
- módulo de elasticidad, 66
- módulo específico, 69
- preimpregnado, 74
- propiedades predictivas, 75-77
- recipientes a presión, 555
- regla de mezclas, 77
- resistencia específica, 69
- rigidez específica, 69
- ventajas de, 69-70
- Concreto, 66-67
- coeficiente de expansión térmica, 122
- peso específico, 66
- resistencia, 66-67
- Condición de esfuerzo en planos seleccionados, 393-396
- Conexiones, 560-577
- con pernos, 565-573
- con pernos, con carga excéntrica, 569-573
- esfuerzos permisibles, 565, 566, 575, 576
- modos de falla, 562-565
- remachadas, 563-566
- soldadas, 573-577
- tipos, 561
- Conexiones remachadas, 565-573
- Constante de columna, 518
- Construcción compuesta laminada, 74
- Copper Development Association (Asociación de Desarrollo del Cobre), 54
- Corrimiento, 50
- Cortante doble, 16
- Cortante única, 16
- Criterios para el diseño por esfuerzo, 603
- Cuerdas de tornillos, 28, 586
- Cuñas, 18-19
- Curva esfuerzo-deformación, 48, 49, 51
- D**
- Deflexión de vigas, 429-477
- definición de términos, 431
- método área-momento,
- método de área-momento, cargas distribuidas, 474-477
- método de área-momento, con carga asimétrica, 470-474
- método de área-momento, teoremas, 460
- método de área-momento, viga en voladizo, 460-464, 475-477

método de área-momento, vigas con secciones transversales variables, 467-470  
método de área-momento, vigas con soporte simple, 456-477  
método de integración sucesiva, enfoque general, 446-449  
método de la fórmula, 434-439  
necesidad de, 430  
radio de curvatura, 433  
superposición 439-443

Deformación, 3

axial, 116  
normal, 116  
térmica, 120  
torsional, 161-175  
unidad, 24

Deformación, definición, 24

cortante, 26, 162

Deformación torsional, 161-163, 169-171

Deformación torsional elástica, 161-163, 169-171

Densidad, 9

Departamento de Defensa de Estados Unidos, 85

Desgaste de acero, 60

Diagrama de momento flector, regla de las áreas, 206-208, 213

reglas para dibujo, 213

Diagramas de cuerpo libre, partes de vigas, 219-223

Diagramas de fuerza cortante, 196-204

criterios para dibujo, 199, 204

para cargas distribuidas, 201

Diagramas de vigas, ecuaciones para, 224-225

análisis matemático, 223-225

Díámetro medio para recipientes a presión, 538

Diseño para esfuerzos directos, 82-107

Diseño por aplastamiento, 98, 100, 102

Distribuciones de esfuerzos, 362-369

Ductilidad, 52, 53

## E

Eje centroidal, 251

Ejes con caras planas, 171

Ejes, sólidos y huecos, comparación, 153

Electrodos de soldadura, 575-576

Elemento de esfuerzo cortante, 19-20

resumen, 362-369

Elemento de esfuerzo normal, 13-14

Esfers, de paredes gruesas, 546-547

de paredes finas, 539-541

Esfuerzo a tensión, 10-14

Esfuerzo, aparente, 49

compresivo, 10-14

contacto, 23

cortante, directo, 14-20

de carga, 20-24

definición, 9

diseño para flexión, 287-289

longitudinales, recipientes a presión, 542

normal, 10-14

tangencial, recipientes a presión, 543

tensil, 10-14

unidades, 10

verdadero, 49

Esfuerzo combinado, 361-403, 405-420

Esfuerzo compresivo, 10-14

Esfuerzo cortante, 26, 162

Esfuerzo cortante directo, 14-20

Esfuerzo cortante, diseño, 94, 351

directo, 14-20

máximo, 377-379

máximo, teoría de falla, 401-403

Esfuerzo cortante en vigas, 326-356

cortas, 330

de madera, 329

de red fina, 329, 350

distribución de, 337-343

estructuras de revestimiento resistente, 330

formas circulares, 348

formas rectangulares, 347

formas tubulares huecas de paredes delgadas, 350

fórmula general de fuerza cortante, 330

fórmulas especiales de fuerza cortante, 347-351

importancia, 328

momento estático, 330-335

visualización, 328

Esfuerzo cortante torsional, 139-161, 169-175

concentraciones de esfuerzo, 154

diseño, 147-149

fórmula, 140

fórmula, derivación, 142

secciones circulares, 139

secciones no circulares, 169-175

Esfuerzo de aplastamiento, 20-24

Esfuerzo de aplastamiento, diseño, 98, 100, 102

Esfuerzo de contacto, 23

Esfuerzo de trabajo, 84

Esfuerzo del diseño, 84-87, 94, 98, 100, 102, 147-148

cortante, 94, 147-149, 351

cortante torsional, 147-148

flexión, 287-289

métodos de cálculo, 88-89

normal, 84

Índice



recipientes a presión, 547  
Esfuerzo normal, 10-14  
Esfuerzo normal directo, 10-14  
Esfuerzo permisible, 84  
Esfuerzo térmico, 125  
Esfuerzos combinados, normal, 406-413  
casos especiales, 405-420  
normal y cortante, 414-420  
Esfuerzos en cualquier dirección, 372-376  
Esfuerzos, permitidos en conexiones, 565, 566, 575, 576  
combinados, casos especiales, 405-420  
combinados, normales, 406-413  
combinados, normales y cortantes, 414-420  
principal, 376-377  
Esfuerzos principales, 376-377  
Estabilidad, 3  
Expansión térmica, 121

## F

Factor de diseño, 84-87, 148  
Factor de diseño, columnas de carga, 521  
Factor de diseño, esfuerzos tensiles directos, 87  
cortante torsional, 148  
Factor de fijez de extremos, 514-515  
Factor de seguridad (Véase también factor de diseño),  
84-87, 148  
Factores de concentración de esfuerzo, gráficas, 604-613  
en esfuerzos combinados, 417  
en vigas, 296-300  
esfuerzos normales,  
torsión, 154  
Factores de conversión, 622  
Falla cortante de remaches, 564  
Falla de carga de remaches, 564  
Flujo de fuerza cortante, 352-356  
Formas de ala ancha (formas W), 31, 591  
Formas de vigas de madera, 28, 588  
Formas estándar de estructuras, 27-32, 589-595  
miembros estáticamente indeterminados, axial, 126-129  
momento estático, 330-335  
vigas estáticamente indeterminadas, 617-621  
Formas estructurales, 27-32, 589-595  
designaciones, 30  
Formas S, acero estructural, 592  
Formas, estructurales, 27-32, 589-595  
Fórmula de Euler para columnas, 520  
Fórmula de flexión, 275-276  
condiciones sobre su uso, 278  
derivación, 281-283  
Fórmula general para la fuerza cortante, 330  
criterios para su uso, 335

desarrollo de, 344-347  
Fórmula J.B. Johnson para columnas, 521  
Fórmulas de deflexión, vigas, 614-621  
Fórmulas especiales de cortante, 347-351  
Fracción de volumen, 75  
Fractura, 2  
Fuerza, 7  
Fuerza cortante, definición, 195  
Fuerza cortante, doble, 16  
Fuerza cortante, única, 16  
Fuerzas cortantes en vigas, 181, 195-204  
Fuerzas cortantes para vigas en voladizo, 214-216

## H

Hierro colado, 60-62, 600  
blanco, 61  
coeficiente de expansión térmica, 122  
dúctil, 61, 600  
dúctil austempleado, 61, 600  
gris, 60, 600  
maleable, 61, 600  
propiedades, 600  
Hierro dúctil, 61  
Hierro gris, 60, 600  
coeficiente de expansión térmica, 122  
Hierro maleable, 61, 600  
Hojalata, 61

## J

J, Momento polar de inercia, 140, 144-146  
Juntas con pernos, esfuerzo de aplastamiento en, 22

## L

Ley de Newton de la gravitación, 7  
Limite de elasticidad, 49  
Limite elástico, 49, 50  
Limite proporcional, 48-50  
Longitud de medición, 52  
Longitud efectiva, 514, 516  
Longitud, efectiva, para columnas, 514, 516

## M

Madera, 65-66  
propiedades, 602  
Magnesio, 64, 598  
coeficiente de expansión térmica, 122  
Margen de seguridad, 84  
Masa, 7

masa, fuerza, y relación de peso, 7-8  
Material dúctil, 53  
Material quebradizo, 53  
Materiales anisotrópicos, 65, 306-308  
Materiales compuestos, vigas, 309-310  
Materiales de relleno para materiales compuestos, 69-70  
Materiales, anisotrópicos, 65, 306-308  
compuestos, 67-78  
compuestos, vigas, 309-310  
concreto, 66-67  
madera, 65-66  
plástico, 67-68  
propiedades de diseño, 45-78  
Matrices de materiales para materiales compuestos, 68  
Máximo esfuerzo cortante, 377-379  
Metales, 46-65  
curva de esfuerzos y deformaciones, 48, 49, 51  
dúctiles, 53  
frágiles, 53  
límite de elasticidad, 49  
límite proporcional, 48-50  
resistencia, 47-50  
rigidez, 50  
Miembros hechos de más de un material, 127-129  
Modos de falla, 2-3, 53  
Módulo cortante de elasticidad, 163  
Módulo de elasticidad en la fuerza cortante, 27, 163  
Módulo de elasticidad, 27, 50, 51  
Módulo de sección polar, 148  
Módulo de sección, 289  
torsional, 148  
Módulo específico, 69  
Momento de inercia de un área, 244, 251-266  
Momento de inercia para formas compuestas, 253, 255, 260  
Momento de inercia para formas con partes  
rectangulares, 264  
Momento de inercia para formas estructurales, 260  
Momento de inercia, definición, 252  
definición matemática, 259  
métodos de determinación, 252-253  
procedimiento general para su cálculo, 256  
teorema de transferencia de eje, 255  
Momento polar de inercia, 140, 144-145  
Momentos concentrados, 187, 222-223  
Momentos flectores en vigas, 181, 204-214  
Momentos flectores para vigas en voladizo, 214-216  
Momentos, concentrado, 187  
Muesca anular en tensión, 105-106

## N

Newton, unidad de fuerza, 7  
Núcleo

No metales, diseño con, 65-78  
Normalización, 58-59  
Normas militares, 85

## O

Operación de perforación, 15

## P

Pandeo, columnas, 3, 513-530  
Patrones de carga en vigas, 182-187  
Perno de seguridad, 94-98  
Peso específico, 8  
Peso, 7  
Plástico termoendurecible o irreversible, 67  
Plástico termoplástico, 67  
Plásticos, 67-68, 603  
coeficientes de expansión térmica, 122  
propiedades, 603  
Porcentaje de elongación, 53  
Potencia, 136-138

## R

Radio de giro, 514, 516  
Razón de esbeltez, 513, 518  
transición, 518  
Reacción sobre vigas en los soportes, 191-195  
Recipientes a presión, 536-556  
cilindros, de paredes delgadas, 541-544  
compuestos, 555  
consideraciones de diseño, 554  
de paredes delgadas, 537-545  
de paredes gruesas, 546-547  
diámetro medio, 538  
esferas, de paredes delgadas, 539-541  
esfuerzo longitudinal, 542  
esfuerzo tangencial, 543  
grosor de paredes, delgadas/gruesas, 538  
procedimiento de diseño, 546-550  
Recocido, 58-59  
Recocido de distensión, 58-59  
Regla de mezclas, 77  
Relación de Poisson, 25-26  
Remaches, 563-566  
Resistencia a la fatiga, 88  
Resistencia de elasticidad, 47, 49, 50  
Resistencia de elasticidad en cortante, 94  
Resistencia específica, 69  
Resistencia tensil última, 47, 49, 50  
Resistencia última en fuerzas cortantes, 94-95

Resistencia, última a la tensión, 47, 49, 50  
límite elástico, 47, 49, 50

Retorcimiento, 161-163, 169-171

Rigidez, 50

torsional, 161-163, 169-171  
viga, 434

Rigidez de vigas, 434

Rigidez específica, 69

Rigidez torsional, 163, 169-171  
recomendada, 162

Rodamientos, baleros, 98

## S

Sección de columna, acero comercialmente disponible,  
525-527

Secciones no circulares, torsión, 169-175  
tabla, 171

Sistema de numeración unificado, 54

Sistema inglés gravitacional de unidades, 5-9

Sistema métrico decimal, 5-9

Sistema SI de Unidades Métricas, 5-9

Sistemas de unidades, 5-9

Slug, unidad de masa, 8

Society of Automotive Engineers (Sociedad de  
Ingenieros Automotrices), 54

Soldadura en ángulo, 574

Soldadura por puntos, 574

Soldadura, tipos de, 574-575

Soldaduras a tope, 574

Suelos, diseño por esfuerzo, 102

Sujetadores, espaciado, flujo de fuerza cortante en, 354

Superposición, para vigas estáticamente indeterminadas,  
497

## T

Tamaños básicos preferidos, 27, 585

Templado, 57

Teorema de los tres momentos, 502-507

Teoría de fallas de máximo esfuerzo cortante, 401-403, 414

Tipos de soporte de vigas, 181, 187-188

Tipos de vigas, 182, 188-191

compuesta, 190

continua, 190

saliente, 188

simple, 188

voladiza, 188

Titanio, 65, 598

coeficiente de expansión térmica, 122

Torca equivalente, 415

Torca, 136

equivalente, 415

Tubería, estructural, 593

Tubo, acero, 32, 596

## U

Unidades, esfuerzos, 10

## V

Velocidad rotacional, 136

Vidrio, coeficiente de expansión térmica, 122

Viga compuesta, 190

Viga en voladizo, 188, 616

fuerzas cortantes para, 214-216, 230-233

momentos flectores para, 214-216, 230-233

Viga saliente, 188

Viga simple, 188

Viga, definición, 181

distribución de esfuerzo, 280-281

Vigas continuas, 190, 620-621

Vigas convencionales estadounidenses (formas S), 31, 592

Vigas Y, 29-32, 591-592, 595

aluminio, 32, 595

Vigas simplemente soportadas, fórmula, 614-615

Vigas, análisis, 284-287

comparación de tipos de soporte, 489-496

concentraciones de esfuerzos, 296-300, 607-608,  
611-613

continuas, 190, 620-621, 485, 502-507

de extremo fijo, 485, 619, 620

deflexión (Véase Deflexión de vigas)

ejemplos de diseño, 291-296

estáticamente indeterminadas, 190, 484-507, 487-489,  
617-621

estáticamente indeterminadas, características generales,  
488

estáticamente indeterminadas, continuas, 502-507

estáticamente indeterminadas, ejemplos, 485

estáticamente indeterminadas, superposición, 484-507  
formas preferidas, 304-306

hechas de materiales anisotrópicos, 306-308

hechas de materiales compuestos, 309-310

hechas de materiales delgados, 306

procedimientos de diseño, 289-291

reacciones, 191-195

## Z

Zinc, 64, 598